

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF POLİNOMLAR İÇİN DOMİNASYON PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

TUĞÇEN SELMANOĞULLARI

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. MERT ÇAĞLAR





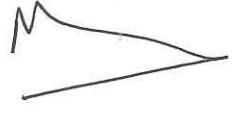
Haziran-2017

Tuğçen SELMANOĞULLARI tarafından hazırlanan POZİTİF POLİNOMLAR İÇİN DOMİNASYON PROBLEMLERİ adlı bu tezin doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylım.


Prof. Dr. Mert ÇAĞLAR

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Mert Çağlar 
Üye : Doç. Dr. Tunç Mürşioğlu 
Üye : Doç. Dr. Özgür Marın 
Üye : Prof. Dr. Sefa Feza Arslan 
Üye : Yrd. Doç. Mohan Ravichandran 

Bu tez, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

İÇİNDEKİLER

| | |
|------------------------------------|-----|
| ÖZET | ii |
| SUMMARY | iv |
| ÖNSÖZ | vi |
| SEMBOL LİSTESİ | vii |
| 1 GİRİŞ | 1 |
| 2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER | 9 |
| 3 BANACH-SAKS POLİNOMLARI | 15 |
| 4 KOMPAKT POLİNOMLAR | 22 |
| 5 DUNFORD-PETTİS POLİNOMLARI | 32 |
| 6 ZAYIF DUNFORD-PETTİS POLİNOMLARI | 38 |
| 7 AYRIK KESİN SİNGÜLER POLİNOMLAR | 44 |
| 8 SONUÇLAR VE ÖNERİLER | 49 |
| KAYNAKLAR | 50 |
| ÖZGEÇMİŞ | 54 |

POZİTİF POLİNOMLAR İÇİN DOMİNASYON PROBLEMLERİ

ÖZET

Bu çalışma sekiz bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın birinci bölümünde çalışma konusuyla ilgili olarak tarihsel bilgilerle birlikte, konuya hazırlayıcı bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde ise, konuyla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Bu tez çalışmasında, pozitif operatörler için daha önceden yapılmış olan bazı dominasyon problemlerinden ilham alınarak, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için çeşitli dominasyon problemleri incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde, Banach-Saks polinom tanımı yapılmış ve pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için Banach-Saks dominasyon problemi çözülmüştür. Ardından pozitif Banach-Saks s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarıyla ilgili elde edilen yeni sonuçlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için modül tanımı yapılmış ve ardından regüler s -homojen ortogonal toplamsal bir polinomun hangi koşullar altında modülünün olduğu ve bu modülün nasıl tanımlı olduğunu belirleyen bir teorem ispatlanmıştır. Daha sonra, hangi koşullar altında bir kompakt regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomun kompakt bir modüle sahip olduğu ve bu modülün nasıl tanımlandığı ispatlanmıştır. Bölüm sonunda ise, (zayıf) kompakt operatörler için verilmiş olan çeşitli sonuçlardan yararlanarak, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Çalışmanın beşinci bölümünde, Dunford-Pettis polinomu tanımı verilmiş ve pozitif Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomların dominasyon problemi için üç farklı teorem ispatlanmıştır. Bölüm sonunda ise, pozitif Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için elde edilen yeni sonuçlara yer verilmiştir.

Altıncı bölümde, zayıf Dunford-Pettis polinomu tanımlanmış ve $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s tek sayı olmak üzere, pozitif zayıf Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal

polinomlar için dominasyon problemi ispatlanmıştır. Bölüm sonunda, pozitif zayıf Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için elde edilen yeni sonuçlar verilmiştir.

Yedinci bölümde, ayrık kesin singüler polinom tanımı verilerek, pozitif ayrık kesin singüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için dominasyon problemi incelenmiştir. Bölüm sonunda ise, regüler ayrık kesin singüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için bulunan yeni sonuçlara yer verilmiştir.

Son olarak sekizinci bölümde, bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Dominasyon problemi, regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinom, Banach-Saks polinom, modül, kompakt regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinom, Dunford-Pettis polinom, zayıf Dunford-Pettis polinom, ayrık kesin singüler polinom.

DOMINATION PROBLEMS FOR POSITIVE POLYNOMIALS

SUMMARY

This study consists of eight chapters. The first chapter is the introduction chapter containing preliminary information and historical information regarding the subject. The second chapter contains basic definitions and theorems that are related to the subject.

In this thesis, various domination problems for positive s -homogenous orthogonal additive polynomials are investigated and new results are obtained, inspired by some previous domination problems for positive operators.

In the third chapter, Banach-Saks polynomial is defined and the Banach-Saks domination problem solved for positive s -homogenous orthogonal addition polynomials. Then, new results are obtained about positive Banach-Saks s -homogenous orthogonal additive polynomials.

In the fourth chapter, a modulus is defined for regular s -homogenous orthogonal additive polynomials and then a theorem, determining the conditions under which a regular s -homogenous orthogonal additive polynomial has modulus and how this modulus is defined, is proved. Later, it has been proven that under which conditions a compact regular s -homogenous orthogonal additive polynomial has a compact modulus and that how this modulus has been defined. At the end of the chapter, new results have been obtained for positive s -homogenous orthogonal additive polynomials through taking the advantage of the various results given for (weak) compact operators.

In the fifth chapter, the definition of Dunford-Pettis polynomial is given and three different theorems have been proved for the domination problem of the positive Dunford-Pettis s -homogeneous orthogonal additive polynomials. At the end of the chapter, new results obtained for positive Dunford-Pettis s -homogenous orthogonal additive polynomials are presented.

In the sixth chapter, the weak Dunford-Pettis polynomial is defined and the domination problem has been proved for positive weak Dunford-Pettis

s -homogenous orthogonal additive polynomials with $1 \leq s \in \mathbb{N}$ and s is an odd number. At the end of the chapter, new results are obtained for positive weak Dunford-Pettis s -homogenous orthogonal additive polynomials.

In the seventh chapter, the domination problem for positive disjointly strictly singular s -homogenous orthogonal additive polynomials is investigated by giving definite disjointly strictly singular polynomials. At the end of the chapter, new results for regular disjointly strictly singular s -homogenous orthogonal additive polynomials are given.

Finally, in the eighth chapter, the conclusions and recommendations for this thesis are given.

Key Words : Domination problem, regular s -homogenous orthogonally additive polynomial, Banach-Saks polynomial, modulus, compact regular s -homogenous orthogonally additive polynomial, Dunford-Pettis polynomial, weak Dunford-Pettis polynomial, disjointly strictly singular polynomial.

ÖNSÖZ

Doktora sürecim boyunca bana her zaman destek olan, ilgisini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, bunun yanında yeniden akademik kariyerime devam etmemi sağlayarak beni her zaman cesaretlendiren değerli tez danışmanım Prof. Dr. Mert Çağlar'a minnettarım. Onunla çalışmak benim için büyük bir şans ve onurdur.

Ayrıca doktora tez çalışmalarım sırasında sabırla bana destek veren Dr. Z. A. Kusraeva'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Bununla beraber en zor zamanlarımda her zaman yanımda olup bana destek çıkan çok değerli hocalarım Prof. Dr. Fatma Senyücel'e ve Prof. Dr. Leyla Zeren Akgün'e;

Hiç sıkılmadan, sabırla bana her koşulda destek olan, yanımda duran değerli dostum Rukiye Kara'ya;

Canım oğlum Doğuhan'ın doğumundan sonra, hayatımı uzunca bir süre kolaylaştıran ve bana manevi olarak destek veren Yasemin Ertemel'e;

Sabırla, maddi ve manevi olarak desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, bana her zaman moral veren, seven ve her koşulda yanımda olan aileme de çok teşekkür ederim. Bu çalışmayı bana umut ve güç veren oğlum Doğuhan'a ve canım aileme ithaf etmek istiyorum.

Haziran 2017

Tuğçen Selmanoğulları

SEMBOL LİSTESİ

| | | |
|-------------------------------|---|---|
| E' | : | E 'nin norm duali |
| E^+ | : | E 'nin (pozitif) konisi |
| $E_{(s)}$ | : | E 'nin s -konkavlaştırılması |
| E^s | : | $E \times E \times \dots \times E$ (s tane bileşenli kartezyen çarpım) |
| B_e | : | $e \in E^+$ vektörü tarafından üretilen bant |
| $U(E)$ | : | E 'nin kapalı birim topu |
| $\mathcal{P}_0^r({}^sE, F)$ | : | E 'den F 'ye tüm regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomların uzayı |
| $\mathcal{L}^r(E, F)$ | : | E 'den F 'ye regüler operatörler |
| $\mathcal{L}_b(E, F)$ | : | E 'den F 'ye sıra sınırlı operatörler |
| $\mathcal{K}_0^r({}^sE, F)$, | : | E 'den F 'ye kompakt regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar |
| $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ | : | (Ω, Σ, μ) ölçü uzayı üzerindeki mutlak integrallenebilir fonksiyonlar uzayı |
| $ x $ | : | x vektörünün mutlak değeri veya modülü |
| x^+ | : | x vektörünün pozitif kısmı |
| x^- | : | x vektörünün negatif kısmı |
| \perp | : | diklik sembolü |
| J_s | : | s . dereceden kanonik polinom |
| $x_n \xrightarrow{w} x$ | : | Zayıf yakınsaklık |

1. GİRİŞ

Zengin yapısı nedeniyle s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar sınıfı, araştırmacıların dikkatini çeken önemli konulardan biridir. Bu polinomlara duyulan ilgi Sundaresan'a [39] dayanmaktadır. Bununla beraber s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar üzerine yapılmış pek çok çalışma mevcuttur [7, 24, 28, 29, 30, 33, 37, 41].

E ve F Banach örgüleri ve T de bir pozitif s -homojen ortogonal toplamsal $P : E \rightarrow F$ polinomunun sağladığı bir özellik olsun. Ayrıca $P \in T(E, F)$ gösterimi de P polinomunun T özelliğine sahip olduğunu gösterebilir. Dominasyon problemi řu şekildedir: $0 \leq Q \leq P$ ve $P \in T(E, F)$ ise $Q \in T(E, F)$ olur mu? Pozitif operatörler için de dominasyon problemi aynı şekilde tanımlanmaktadır. Pozitif operatörler için dominasyon problemleri uzun yıllardır yaygın olarak incelenen bir konudur. Dodds ve Fremlin'nin [11] kompakt operatörler, Kalton ve Saab'ın [26]Dunford-Pettis operatörler ve Wickstead'ın [42] zayıf kompakt operatörler için çözmüş olduğu dominasyon problemleri en önemli dominasyon problemleri arasındadır. Ayrıca Dodds-Fremlin-Wickstead Teoremi de bu konuyla ilgili olarak verilmiş önemli sonuçlardan biridir [11, 30, 43].

Son yıllarda, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için dominasyon problemleri, çalışılmaya yeni başlanan konulardan biridir. Bu konuyla ilgili olarak yapılan ilk ve tek çalışma Kusraeva'ya [30] aittir. Kusraeva [30], Dodds-Fremlin-Wickstead Teoremi'nin ve Wickstead'ın [42] zayıf kompakt operatörlerin dominasyon problemiyle ilgili olarak vermiş olduğu teoremin, s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için, karşılık gelen formunu vermiştir.

Bu tez çalışmasında pozitif operatörler için yapılmış olan bazı dominasyon problemlerinden esinlenerek, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için bazı dominasyon problemleri ele alınmıştır. Bu çalışmada, sırasıyla, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için Banach-Saks dominasyon problemi, regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için modül tanımı ve sonuçları, Dunford-Pettis dominasyon problemi, zayıf Dunford-Pettis dominasyon

problemi ve son olarak da ayrık kesin singüler dominasyon problemiyle ilgili elde edilen sonuçların yanı sıra, Banach-Saks, (zayıf) kompakt, Dunford-Pettis, zayıf Dunford-Pettis ve ayrık kesin singüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için elde edilen yeni sonuçlara yer verilmiştir.

Öte yandan birçok E ve F uzayı için, E' 'den F' 'ye s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının pek çok temsili yapılmıştır [7, 10, 25, 28, 37, 39]. Bu çalışmada Kusraeva'nın [30], regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için vermiş olduğu temsil kullanılmıştır. Bu temsili kısaca açıklayacak olursak, E ve F vektör örgüleri, E düzgün tam, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, $P : E \rightarrow F$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom ve $S : E_{(s)} \rightarrow F$ regüler lineer bir operatör olmak üzere, $P = Soj_s$ şeklinde tek türlü temsil edilebilir. Buna ek olarak, $P \leftrightarrow S$ karşılık getirmesi, $\mathcal{P}_0^r({}^s E, F)$ ve $\mathcal{L}^r(E_{(s)}, F)$ sıralı vektör uzayları arasında bir izomorfizmdir. Dahası, eğer E ve F Banach örgüleri ve E , $0 < M \in \mathbb{R}$ sabiti ile s -konveks ise, $\|P\|_r \leq \|S\|_r \leq M^s \|P\|_r$ olur [30]. Burada bahsi geçen $j_s : E \rightarrow E_{(s)}$, E vektör örgüsünün s . dereceden kanonik polinomu olarak adlandırılır ve $j_s : x \rightarrow x^{s\odot} := x \odot_s \dots \odot_s x$ ($x \in E$) formülüyle tanımlanır. Ayrıca regüler P polinomu için, P nin regüler normu,

$$\|P\|_r := \inf \{ \|Q\| : 0 \leq Q \in \mathcal{P}_0^r({}^s E, F), |P(x)| \leq Q(|x|) \ (x \in E) \}$$

şeklinde tanımlıdır [30].

E ve F Banach uzayları ve $T : E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere eğer, E içinde sınırlı her (x_n) dizisinin, $T(x_{n_k})$ Cesàro yakınsak (yani $\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N T(x_{n_k})\right)_N$ F nin normuna göre yakınsak) olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi varsa, T operatörüne Banach-Saks operatörü denir. Banach-Saks operatörleri Beauzamy [6] tarafından tanımlanmıştır. Flores ve Tradacete [18, 38], Banach-Saks operatörleriyle ilgili olarak, E bir Banach örgüsü ve $0 \leq R \leq T : E \rightarrow E$ pozitif operatörler olmak üzere eğer, T bir Banach-Saks operatör ise, R^2 nin de bir Banach-Saks olduğunu göstermiştir. Ayrıca Flores ve Tradacete [18, 38] Banach-Saks operatörleri için dominasyon problemini de çözerek, E ve F Banach örgüleri ve F sıra sürekli norma sahip olmak üzere eğer, $0 \leq R \leq T : E \rightarrow F$ ve T Banach-Saks ise, R nin de bir Banach-Saks operatörü olduğunu ispatlamıştır. Flores ve Tradacete'nin [18, 38] bu sonuçları, Flores ve Ruiz'in [17] sonuçlarının bir genelleştirilmesidir. Yapılan bu çalışmalardan ilham alınarak tezin üçüncü bölümünde, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için Banach-Saks dominasyon problemi ele alınmıştır. Öncelikle Banach-Saks

polinomunun tanımı verilip, ardından pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomların Banach-Saks dominasyon probleminin ispatında kullanılmak üzere çeşitli önermeler ispatlandı. Bu önermelerden iki tanesi ise, çözülen diğer dominasyon problemlerinde de sıklıkla kullanıldığı için oldukça önemli bir yere sahiptir:

Önerme 1.1

Eğer $1 \leq r \leq q \in \mathbb{R}$ ve E , q -konveks bir Banach örgüsü ise, $E_{(r)}$ ' de bir Banach örgüsüdür.

Önerme 1.2

$2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve E bir Banach örgüsü olmak üzere, her $x \in E$ için, s çift ise $j_s(x) = \iota_s(|x|)$ ve s tek ise $j_s(x) = \iota_s(x)$ dir.

Bu bölümde Flores ve Tradacete'nin [18, 38], Banach-Saks operatörlerinin dominasyon problemiyle ilgili olarak yukarıda verdiği sonucun, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlara karşılık gelen formu Teorem 1.3 ve Teorem 1.4 ile aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

Teorem 1.3

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı, E p -konveks bir Banach örgüsü, F sıra sürekli norma sahip bir Banach örgüsü, P ve Q ise E' den F' ye pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Eğer, $0 \leq P \leq Q$ ve Q bir Banach-Saks polinomu ise, P de bir Banach-Saks polinomudur.

Teorem 1.4

$p \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$, $2 \leq s \leq p$ ve s bir çift sayı, E ve F Banach örgüleri, P ve Q ise E' den F' ye pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

1. E , p -konveks bir Banach örgüsü,
2. F Banach örgüsü bir zayıf birimle birlikte sıra sürekli norma sahip,
3. F' sıra sürekli bir norma sahip olsun.

Bu durumda, $0 \leq P \leq Q$ ve Q bir Banach-Saks polinomu ise, P de bir Banach-Saks polinomudur.

Bölümün son kısmında ise, Banach-Saks s -homojen ortogonal toplamsal polinomları için bulunan yeni sonuçlara yer verilmiştir.

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere, eğer $|T| := T \vee (-T)$

varsa, T 'nin modülü vardır denir ve $|T|$ ile gösterilir. Burada $|T|$, $\mathcal{L}(E, F)$ ' de $\{T, -T\}$ kümesinin supremumudur. [3, Theorem 1.14] ve [3, Theorem 5.7]' de sırasıyla, T operatörü ve T kompakt operatörünün hangi koşullar altında bir modüle sahip olduğu ve bu modülün nasıl tanımlı olduğu ispatlanmıştır. Buradan hareketle, tezin dördüncü bölümünde, regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için modül tanımı yapılmış ve ardından, yukarıda bahsedilen bu teoremlerin regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlara karşılık gelen formları sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

Teorem 1.5

$1 \leq s \in \mathbb{N}$, E bir Banach örgüsü, F bir vektör örgüsü, $P : E \rightarrow F$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom ve her $x \in E^+$ için $\sup \{|Py| : |y| \leq x\}$ değeri F 'de var olsun. O zaman P regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun modülü vardır ve her $x \in E^+$ için

$$|P|(x) = \sup \{|Py| : |y| \leq x\}$$

sağlanır.

Teorem 1.6

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, F bir AM -uzayı ve $P : E \rightarrow F$ kompakt, regüler s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom olsun. O zaman P 'nin modülü $|P|$ vardır ve kompakt pozitif s -homojen ortogonal toplamsal bir polinomdur. Ayrıca, her $x \in E^+$ için,

$$|P|(x) = \sup \{|Py| : |y| \leq x\}$$

olur. Dahası F Dedekind tam ve E Banach örgüsü $M = 1$ sabiti ile s -konveks ise, E ' den F ' ye tüm kompakt regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomların vektör uzayı regüler norm ile birlikte bir Banach örgüsüdür.

Bölüm sonunda ise, (zayıf) kompakt pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için bulunan yeni sonuçlara yer verilmiştir.

N. Dunford ve P. J. Pettis [13], $L_1(\mu)$ ' den yine kendisine tanımlı olan bir zayıf kompakt operatörün, zayıf yakınsak dizileri norm yakınsak dizilere gönderdiğini ispatlamıştır. Buradan hareketle A. Grothendieck [20], bu özelliğe sahip olan her operatörü Dunford-Pettis operatörü olarak adlandırmıştır. Dunford-Pettis operatörleri için ilk dominasyon sonuçları Aliprantis ve Burkinshaw [2] tarafından verilmiştir. Buna göre Aliprantis ve Burkinshaw [2], pozitif

Dunford-Pettis operatörlerinin dominasyon problemiyle ilgili olarak aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır:

Teorem 1.7

E bir AM -uzayı, F bir Banach örgüsü ve $S, T : E \rightarrow F$ pozitif operatörleri için $0 \leq S \leq T$ sağlansın. Eğer T bir Dunford-Pettis operatör ise, S de bir Dunford-Pettis operatördür.

Daha sonra ise Kalton ve Saab [26] tarafından bu sonuçlar geliştirilmiştir. Kalton ve Saab [26], E ve F Banach örgüleri ve F sıra sürekli norma sahip olmak üzere, $T : E \rightarrow F$ bir pozitif Dunford-Pettis operatör ve $0 \leq S \leq T$ ise, S 'nin de bir Dunford-Pettis operatör olduğunu ispatlamıştır. Bunlara ek olarak, Haid [21] tarafından farklı koşullar altında pozitif operatörler için, Dunford-Pettis dominasyon problemi çözülmüştür. Bunun yanında Dunford-Pettis dominasyon problemiyle ilgili olarak verilen diğer bir önemli sonuç ise aşağıdaki gibidir [3, Theorem 5.89].

Teorem 1.8

$S, T : E \rightarrow F$ Banach örgüleri arasında iki pozitif operatör ve $0 \leq S \leq T$ olsun. Eğer E zayıf dizisel sürekli örgü işlemlerine sahip ve T bir Dunford-Pettis operatör ise, S de bir Dunford-Pettis operatördür.

Tezin beşinci bölümünde önce, Dunford-Pettis polinomu tanımlanmış ve ardından yukarıda ifade edilen Teorem 1.8' in, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarına karşılık gelen formu aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 1.9

$1 \leq s \in \mathbb{N}$, E, F Banach örgüleri, P ve Q ise $0 \leq P \leq Q$ olacak şekilde E ' den F ' ye pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Eğer E Banach örgüsü zayıf dizisel sürekli örgü işlemlerine sahip ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Dunford-Pettis polinomu ise, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

Daha sonra ise, Aliprantis ve Burkinshaw'ın [2], Teorem 1.7 ile ifade edilen teoreminin pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarına karşılık gelen formu aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 1.10

$1 \leq s \in \mathbb{N}$, E, F Banach örgüleri, E AM -uzayı ve $P, Q : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomları için $0 \leq P \leq Q$ olsun. Eğer Q

pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Dunford-Pettis polinomu ise, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

Ardından, gerekli ön sonuçlar verildikten sonra, Kalton ve Saab'ın [26], yukarıda ifade edilen, pozitif operatörler için yapılmış olan Dunford-Pettis dominasyon probleminin, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarına karşılık gelen formu aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 1.11

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E ve F Banach örgüleri, F sıra sürekli norma sahip, E p -konveks, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip, $0 \leq P \leq Q : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar ve Q bir Dunford-Pettis polinomu olsun. O zaman P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

Bölüm sonunda ise, Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için elde edilen yeni sonuçlara yer verilmiştir.

X ve Y Banach uzayı olmak üzere eğer, X uzayında $x_n \xrightarrow{w} 0$ ve Y uzayında $y'_n \xrightarrow{w} 0$ olması $\lim_{n \rightarrow \infty} y'_n(Tx_n) = 0$ olmasını gerektiriyorsa, T operatörüne zayıf Dunford-Pettis operatör denir. Aliprantis ve Burkinshaw [2] ile Kalton ve Saab'ın [26] çalışmaları, zayıf Dunford-Pettis operatörlerle ilgili yapılmış olan en önemli çalışmalardandır. Aliprantis ve Burkinshaw'ın [2] zayıf Dunford-Pettis operatörü ile ilgili olarak vermiş olduğu temel sonuçlardan biri aşağıdaki gibidir:

Teorem 1.12

E Banach örgüsü ve $S, T : E \rightarrow E$ pozitif operatörler için $0 \leq S \leq T$ sağlansın. Eğer T kompakt ise,

1. S^3 kompakt bir operatördür (S^2 kompakt olmak zorunda değildir);
2. S^2 bir Dunford-Pettis operatördür ve zayıf kompakttır (S böyle olmak zorunda değildir);
3. S bir zayıf Dunford-Pettis operatörüdür.

Buna ek olarak, Kalton ve Saab [26], zayıf Dunford-Pettis operatörlerinin dominasyon problemiyle ilgili olarak aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır:

Teorem 1.13

E ve F Banach örgüleri ve $T : E \rightarrow F$ bir pozitif zayıf Dunford-Pettis operatörü

olsun. Eğer $0 \leq S \leq T$ ise, S de bir zayıf Dunford-Pettis operatörüdür.

Bu teoremler, bu tezde pozitif zayıf Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarla ilgili olarak kullanılan temel sonuçlardır.

Tezin altıncı bölümünde, önce zayıf Dunford-Pettis polinom tanımı verilmiş ve ardından pozitif zayıf Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarla ilgili olarak elde edilen yeni teoremleri ispatlamak için gerekli olan ön sonuçlar kanıtlanmıştır. Daha sonra, Kalton ve Saab'ın [26] pozitif zayıf Dunford-Pettis operatörlerin dominasyon problemiyle ilgili olarak yukarıda ifade edilmiş olan teoreminin, zayıf Dunford-Pettis pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için olan formu, aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 1.14

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı, E p -konveks bir Banach örgüsü, F Banach örgüsü, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip ve $Q : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir zayıf Dunford-Pettis polinomu olsun. Eğer $0 \leq P \leq Q$ ise, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir zayıf Dunford-Pettis polinomudur.

Buna ek olarak, Aliprantis ve Burkinshaw'ın [2], zayıf Dunford-Pettis operatörü ile ilgili olarak yukarıda ifade edilmiş olan sonucunun da, s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için olan formu, aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 1.15

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip, $Q, P : E \rightarrow E_{(s)}$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar ve $0 \leq P \leq Q$ olsun. Eğer Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu kompakt ise,

1. $S_2^2 P$ kompakt pozitif s -homojen ortogonal toplamsal bir polinomdur ($S_2 P$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu kompakt olmak zorunda değildir);
2. $S_2 P$ Dunford-Pettis ve zayıf kompakt bir pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomdur (P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu aynı özelliklere sahip olmak zorunda değildir);
3. P , pozitif zayıf Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal bir polinomdur.

Bölümün son kısmında ise, zayıf Dunford-Pettis pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

E ve F Banach örgüleri ve $T : E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer E de, T operatörünün (x_n) vektörleri tarafından gerilen $[(x_n)]$ alt uzayı üzerindeki kısıtlanması bir izomorfizm olacak şekilde, hiç biri sıfır olmayan ayrık vektörlerin (x_n) dizisi yoksa, T operatörüne bir ayrık kesin singüler operatördür denir. Ayrık kesin singüler operatörlerin sınıfı Hernández ve Rodríguez-Salinas [22] tarafından tanıtıldı. Operatörlerin bu sınıfı, kesin singüler (veya Kato) operatörlerinin bir genelleştirmesi, Banach fonksiyon örgülerinin örgü yapısını karşılaştırmada kullanılan yararlı bir araçtır [19]. Bununla beraber, Flores ve Hernandez [14, 16, 23] ayrık kesin singüler operatörlerin birçok özelliği üzerine çalışmalar yapmıştır. Flores ve Hernandez [14], ayrık kesin singüler operatörler için dominasyon problemini aşağıdaki gibi çözmüştür:

Teorem 1.16

E ve F Banach örgüleri ve $0 \leq S \leq T : E \rightarrow F$ iki pozitif operatör olsun. Eğer F üzerindeki norm sıra sürekli ve T ayrık kesin singüler operatör ise, R de bir ayrık kesin singüler operatördür.

Bu teorem, ayrık kesin singüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için, bu çalışmada ispatlanan dominasyon teoreminde kullanılan önemli bir sonuçtur.

Tezin yedinci bölümünde, ayrık kesin singüler polinom tanımı yapılmış ve gerekli ön sonuçlar kanıtlanmıştır. Ardından, Flores ve Hernandez'in [14], yukarıda ifade edilen, ayrık kesin singüler operatörler için vermiş olduğu dominasyon probleminin, s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için olan formu, aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 1.17

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı, F Banach örgüsü, E p -konveks bir Banach örgüsü, P ve Q ise $0 \leq P \leq Q : E \rightarrow F$ olmak üzere, iki pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinom olsun. Eğer F sıra sürekli bir norma sahip ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir ayrık kesin singüler polinom ise, P polinomu da bir ayrık kesin singüler polinomdur.

Bunlara ek olarak, bölüm sonunda regüler ayrık kesin singüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarla ilgili elde edilen yeni sonuçlar verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde üzerinde çalışılan konularla ilgili olarak gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

Tanım 2.1

E ve F vektör uzayları ve $s \geq 1$ bir tam sayı olsun. Eğer her $x \in E$ için $P(x) = \varphi(x, \dots, x)$ olacak şekilde s -lineer bir $\varphi : E^s \rightarrow F$ fonksiyonu varsa, $P : E \rightarrow F$ fonksiyonuna bir s -homojen polinom denir.

$\varphi : E^s \rightarrow F$ s -lineer bir fonksiyon olmak üzere eğer, her $x_1, \dots, x_s \in E$ ve $\{1, \dots, s\}$ nin her σ permütasyonu için,

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(s)})$$

oluyorsa, φ s -lineer fonksiyonuna simetriktir denir. Bununla birlikte, verilen $P : E \rightarrow F$ s -homojen polinomu için, $P(x) = \varphi(x, \dots, x)$ olacak şekilde tek bir simetrik s -lineer φ fonksiyonu vardır. Bu fonksiyona da P yi üreten fonksiyon denir.

x ve y bir vektör örgüsünün iki elemanı olmak üzere, eğer $|x| \wedge |y| = 0$ oluyorsa, x ve y ayrıktır denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. Bununla beraber bir vektör örgüsünde $u \perp v$ ve $u \perp w$ ise, her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $u \perp (\lambda v + \mu w)$ dir. E ve F vektör örgüleri ve $P : E \rightarrow F$ s -homojen bir polinom olmak üzere, eğer $x \perp y$ koşulunu sağlayan her $x, y \in E$ için, $P(x + y) = P(x) + P(y)$ oluyorsa, P polinomuna ortogonal toplamsaldır denir. Ayrıca her $0 \leq x_1, \dots, x_s$ için $\varphi(x_1, \dots, x_s) \geq 0$ ise, P s -homojen ortogonal toplamsal polinomu pozitif olarak adlandırılır ve $0 \leq P$ şeklinde gösterilir. Eğer s -homojen ortogonal toplamsal P polinomu, pozitif iki s -homojen ortogonal toplamsal polinomun farkı şeklinde ifade edilebiliyorsa, P polinomuna regülerdir denir. $\mathcal{P}_0^r(sE, F)$, E ' den F ' ye tüm regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomların uzayı olarak tanımlanır. Bu uzay üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı, $T - S \geq 0 \Leftrightarrow T \geq S$ şeklinde tanımlıdır ve bu bağıntı ile $\mathcal{P}_0^r(sE, F)$ bir sıralı vektör uzayıdır. Bunlara ek olarak, regüler s -homojen

ortogonal toplamsal bir P polinomu için, P nin regüler normu,

$$\|P\|_r := \inf \{ \|Q\| : 0 \leq Q \in \mathcal{P}_0^r({}^s E, F), |P(x)| \leq Q(|x|) \ (x \in E) \}$$

şeklinde tanımlanır.

$P : E \longrightarrow F$ s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom ve $U(E) := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, E normlu vektör örgüsünün kapalı birim topu olmak üzere, eğer $P(U(E))$, F' de (zayıf) görelî kompakt ise, P' ye (zayıf) kompakttır denir ve ayrıca $\|P\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| < \infty$ oluyorsa, P s -homojen ortogonal toplamsal polinomu sınırlıdır denir.

E bir Banach örgüsü olmak üzere eğer, $x_n \xrightarrow{w} 0$ olması $|x_n| \xrightarrow{w} 0$ olmasını gerektiriyorsa, E' ye zayıf dizisel sürekli örgü işlemlerine sahiptir denir. E Banach uzayında (x_n) bir dizi olsun. Eğer her $f \in E'$ için \mathbb{R}' de, her ne zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ varsa, (x_n) bir zayıf Cauchy dizisi olarak isimlendirilir. Ayrıca E Banach uzayında her ne zaman her zayıf Cauchy dizisi, yine E' deki bir vektöre zayıf yakınsarsa, E Banach uzayına zayıf dizisel tamdır denir. E Banach uzayında $x_n \xrightarrow{w} 0$ olması $\|x_n\| \rightarrow 0$ olmasını gerektiriyorsa, E' ye Schur özelliğine sahiptir denir. Bununla beraber, E bir vektör örgüsü olmak üzere, E' nin her boştan farklı üstten sınırlı alt kümesinin supremumu varsa E' ye Dedekind tamdır denir. E bir Banach örgüsü olmak üzere eğer, $\inf_{\alpha} x_{\alpha} = 0$ olan E içindeki her azalan (x_{α}) ağı için, $\lim_{\alpha} \|x_{\alpha}\| = 0$ oluyorsa, E' ye sıra sürekli norma sahiptir veya sıra süreklidir denir. E bir vektör örgüsü ve $B_e, e \in E^+$ tarafından üretilen bir bant olmak üzere eğer, $B_e = E$ oluyorsa e elemanına zayıf birim denir.

(x_n) dizisi E vektör örgüsündeki bir dizi olsun. Eğer $0 \leq a \in E$ herhangi bir eleman olmak üzere, her ne zaman her $\varepsilon > 0$ için, her $n \geq n_0$ için, $|x_n - x| \leq \varepsilon a$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, E' deki (x_n) dizisi bir $x \in E$ elemanına a -düzgün yakınsaktır denir. (Bazı kaynaklarda bu yakınsaklık görelî düzgün yakınsak olarak da isimlendirilir.) Bununla beraber, a -düzgün bir Cauchy dizisi de benzer şekilde tanımlanır. Dahası $0 \leq a \in E$ herhangi bir eleman olmak üzere, eğer E' deki her a -düzgün Cauchy dizisi a -düzgün yakınsıyorsa, E' ye düzgün tamdır denir. Bunlara ek olarak, her Banach örgüsü düzgün tam bir vektör örgüsüdür.

E , sonlu bir ölçü uzayı (Ω, Σ, μ) üzerinde sıra sürekli norma sahip bir Banach fonksiyon uzayı olsun. $A \subset E$ bir alt küme olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için; $\mu(B) < \delta$ olan her $B \in \Sigma$ ve her $f \in A$ için, $\|f\chi_B\|_E < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa, A' ya düzgün integrallenebilirdir (eş-integrallenebilir) denir.

E bir Banach örgüsü olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, E Banach örgüsünün normu

p -toplamsal ise, yani; $x \wedge y = 0$ olan her $x, y \in E^+$ için $\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$ sağlamıyorsa E ye bir soyut L_p -uzayıdır denir. Özel olarak, soyut L_1 -uzayı AL -uzayı olarak isimlendirilir. Benzer şekilde E Banach örgüsünün normu bir M -norm ise, yani; eğer $x \wedge y = 0$ olması $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ olmasını gerektiriyorsa, E' ye bir soyut M -uzayıdır denir. Ayrıca soyut M -uzayı AM -uzayı olarak da bilinmektedir.

x ve y , E Banach örgüsünün herhangi iki elemanı olsun. $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ ve $(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ gibi ifadelere, E Banach örgüsünde anlam verebilmek için fonksiyonel hesap kullanılır. Buna göre, [34, Theorem 1.d.1] (ayrıca bakınız [9])'den, \mathbb{R}^n 'den \mathbb{R} 'ye tüm sürekli homojen fonksiyonları ($f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi bir x_1, x_2, \dots, x_n ve $\lambda \geq 0$ için eğer, $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$ oluyorsa f ye homojen fonksiyon denir.) , E^n 'den E' ye tek türlü genişletilebilir. Bu konuyla ilgili ayrıntılı bilgilere Lindenstrauss ve Tzafriri'nin [34] kitabından ulaşılabilir.

E Banach örgüsü ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, E' de $(x_i)_{i=1}^n \in E$ vektörlerinin her seçimi için,

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leq M \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $M < \infty$ sabiti varsa, E' ye p -konvektir denir.

Tanım 2.2

E Banach örgüsü, $1 \leq p \in \mathbb{R}$ olsun. E , üzerinde \oplus toplama ve $*$ skalerle çarpma işlemleri $x, y \in E$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x \oplus y := (x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}$ ve $\alpha * x := \alpha^{\frac{1}{p}} x$ şeklinde tanımlansın. E üzerindeki orijinal sıralama ve yukarıda tanımlanan yeni toplama ve çarpma işlemleriyle yine bir vektör örgüsüdür. Elde edilen yeni vektör örgüsü $E_{(p)} := (E, \oplus, *, \leq)$ şeklinde tanımlanır ve E' nin p -konkavlaştırılması olarak isimlendirilir. (Burada $x \oplus y$ fonksiyonel hesap ile tanımlıdır ve $t \in \mathbb{R}$ ve $p > 0$ için $t^p, |t|^p \text{sign } t$ anlamına gelmektedir).

Eğer E Banach örgüsü ve $1 \leq p < \infty$ ise, $E_{(p)}$ vektör örgüsü üzerinde,

$$\|x\|_{(p)} := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|u_i\|^p : |x| = u_1 \oplus \dots \oplus u_n; u_1, \dots, u_n \in E^+, n \in \mathbb{N} \right\}$$

bir yarı normdur.

Kusraeva'nın [30] aşağıda verilen sonucu, bu çalışmada sıklıkla kullanılan önemli sonuçlardan biridir.

Lemma 2.3

E' den $E_{(p)}$ üzerine ι_p bir sıra izomorfizmi vardır öyle ki; her $x, y \in E$ için

1. $x \leq y \iff \iota_p(x) \leq \iota_p(y)$;
2. $x \perp y \Rightarrow \iota_p(x + y) = \iota_p(x) \oplus \iota_p(y)$;
3. $\iota_p(\alpha^{\frac{1}{p}} x) = \alpha * \iota_p(x)$, özel olarak, $\iota_p(-x) = -\iota_p(x)$;
4. $\iota_p(|x|) = |\iota_p(x)|$;
5. $\iota_p((x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}) = \iota_p(x) \oplus \iota_p(y)$ dir.

Bununla beraber fonksiyonel hesap kullanılarak, $E^{s'}$ den $E_{(s)}$ ' ye, düzgün tam E vektör örgüsünün kanonik s -morfizmi \odot_s , $f : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ pozitif homojen sürekli fonksiyonu $f(t_1, \dots, t_s) := (t_1 \dots t_s)^{\frac{1}{s}}$ şeklinde tanımlı olmak üzere,

$$(x_1, \dots, x_s) \mapsto x_1 \odot_s \dots \odot_s x_s := f(x_1, \dots, x_s)$$

kuralı ile tanımlanır [30].

Bununla beraber Kusraeva [30], kanonik s -morfizmin taşıdığı özelliklerle ilgili olarak aşağıdaki lemmayı vermiştir:

Lemma 2.4

Her $2 \leq s \in \mathbb{N}$ için,

1. \odot_s multilineer, simetrik ve pozitif;
2. \odot_s ortosimetrik, yani eğer $1 \leq i, j \leq s$ bazı indeks çifti için $x_i \perp x_j$ ise, $x_1 \odot_s \dots \odot_s x_s = 0$ dir.
3. \odot_s örgü s -morfizmdir; yani her $x_1, \dots, x_s \in E$ için $|x_1 \odot_s \dots \odot_s x_s| = |x_1| \odot_s \dots \odot_s |x_s|$ dir.
4. Her $x \in E$ için $\iota_s(x) = x \odot_s |x| \odot_s \dots \odot_s |x|$ dir.

$j_s : E \rightarrow E_{(s)}$, E vektör örgüsünün s . dereceden kanonik polinomu olarak adlandırılır ve $j_s : x \rightarrow x^{s\odot} := x \odot_s \dots \odot_s x$ ($x \in E$) formülüyle tanımlanır. Dikkat edilirse, ι_s ve j_s , E^+ üzerinde birbirlerine denktirler [30].

Kusraeva'nın [30] aşağıda verilen sonucu, bu çalışmada sıklıkla kullanılan önemli bir sonuçtur.

Lemma 2.5

Eğer E , M sabitiyle bir p -konveks Banach örgüsü, $s \in \mathbb{N}$ ve $s \leq p$ ise, $E_{(s)}$ bir

p/s -konveks Banach örgüsüdür ve her $x \in E$ için, $\frac{1}{M^s} \|x\|^s \leq \| \iota_s(x) \|_{(s)} \leq \|x\|^s$ dır. Dahası ι_s , E den $E_{(s)}$ üzerine bir homeomorfizmidir.

Öte yandan, birçok E ve F uzayı için, E den F ye s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının pek çok temsili yapılmıştır [39, 37, 10, 7, 25, 28]. Örneğin Sundaresan [39], $P : L^p \rightarrow \mathbb{R}$ için, her n -homojen ortogonal toplamsal polinomunun temsilini $g \in L^{\frac{p}{p-n}}$ olmak üzere,

$$P(f) = \int f^n g d\mu \quad (f \in L^p)$$

olarak vermiştir.

Bu çalışmada Kusraeva'nın [30], regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için vermiş olduğu aşağıdaki temsil kullanılmıştır:

Theorem 2.6

E ve F vektör örgüleri, E düzgün tam, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ olsun. E den F ye her regüler s -homojen ortogonal toplamsal P polinomu, $S, E_{(s)}$ ' den F ye regüler lineer bir operatör olmak üzere, $P = Soj_s$ şeklinde tek türlü temsil edilir. Buna ek olarak, $P \leftrightarrow S$ karşılık getirmesi, $\mathcal{P}_0^r(sE, F)$ ve $\mathcal{L}^r(E_{(s)}, F)$ sıralı vektör uzayları arasında bir izomorfizmdir. Eğer dahası, E ve F Banach örgüleri ve E , $0 < M \in \mathbb{R}$ sabiti ile s -konveks ise, $\|P\|_r \leq \|S\|_r \leq M^s \|P\|_r$ dir.

Bunlara ek olarak, her zayıf birime sahip sıra sürekli E Banach örgüsü için, (Ω, Σ, μ) olasılık uzayı, $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ' in (genelde kapalı olmayan) bir sıra ideali I , I üzerinde bir örgü normu $\| \cdot \|_I$ ve E ile $(I, \| \cdot \|_I)$ arasında bir ψ_1 sıra izometrisi vardır öyle ki; I dan $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ' e olan doğal gömme $\|f\|_1 \leq \|f\|_I$ ile süreklidir [38, Theorem 1.2.7] veya [34, Theorem 1.b.14].

Aşağıdaki Lemma 2.7 [17, Lemma 2.1] (veya ispatı için bkz. [15, Lemma 3.3]) Banach-Saks pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomların dominasyon probleminin kanıtında kullanılan önemli bir sonuçtur.

Lemma 2.7

E , sıra sürekli norma ve bir zayıf birime sahip, bundan dolayı da bir (Ω, Σ, μ) olasılık uzayı için, $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ içinde bir sıra ideal olarak temsil edilebilen bir Banach örgüsü olsun. O zaman,

- (a) E ' nin sınırlı bir alt kümesinin düzgün integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul L -zayıf kompakt olmasıdır,

- (b) E' de norm sınırlı bir $(g_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul düzgün integrallenebilir ve $\|\cdot\|_1$ -yakınsak olmasıdır.

Son olarak vektör örgüleri, Banach örgüleri ve Banach örgüleri üzerindeki pozitif operatörlerle ilgili daha fazla bilgiye, Aliprantis ve Burkinshaw [3] ile Meyer-Nieberg'in [36] kitaplarından ulaşılabilir.

Bu çalışmada operatörler lineer anlaşılacaktır.

3. BANACH-SAKS POLİNOMLARI

Bu bölümde öncelikle, Banach-Saks polinom tanımı yapılmış ve ardından pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomların Banach-Saks dominasyon problemini ispatlamak için gerekli ön sonuçlar verilmiştir. Ardından, pozitif Banach-Saks s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için dominasyon problemi ispatlanmıştır. Bölüm sonunda ise, pozitif Banach-Saks s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarla ilgili elde edilen yeni sonuçlara yer verilmiştir.

Banach-Saks polinom tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tanım 3.1

$1 \leq s \in \mathbb{N}$, E ve F Banach uzayları ve $P : E \rightarrow F$ bir s -homojen polinom olmak üzere eğer, E içinde sınırlı her (x_n) dizisinin, $P(x_{n_k})$ Cesàro yakınsak (yani $\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P(x_{n_k})\right)_N$ F ' nin normuna göre yakınsak) olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi varsa, P s -homojen polinomuna Banach-Saks polinomu denir.

Pozitif Banach-Saks s -homojen ortogonal toplamsal polinomların dominasyon problemini ispatlamak için gerekli olan ön sonuçlar aşağıda verilmiştir:

Önerme 3.2

Eğer $1 \leq r \leq q \in \mathbb{R}$ ve E , q -konveks bir Banach örgüsü ise, $E_{(r)}$ ' de bir Banach örgüsüdür.

Kant. [34, Proposition 1.d.5] yada [32, Remark 3.4.14] nedeniyle E , q -konveks bir Banach örgüsü ise, E aynı zamanda r -konvektir. Dahası eğer E , r -konveks bir Banach örgüsü ise, $E_{(r)}$ ' de bir Banach örgüsüdür [8, Proposition 5].

Önerme 3.3

$2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve E bir Banach örgüsü olmak üzere, her $x \in E$ için, s çift bir doğal sayı ise, $J_s(x) = \iota_s(|x|)$ ve s tek bir doğal sayı ise, $J_s(x) = \iota_s(x)$ dir.

Kant. $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s çift bir doğal sayı olsun. Buna göre $x^+ \perp x^-$ olduğundan,

[30, Lemma 2-(1,2)] ve [30, Lemma 1-(2)]' den;

$$\begin{aligned}
j_s(x) &= j_s(x^+ - x^-) = \underbrace{(x^+ - x^-) \odot_s \dots \odot_s (x^+ - x^-)}_{s \text{ tane}} \\
&= (x^+ \odot_s \dots \odot_s x^+) \oplus (x^- \odot_s \dots \odot_s x^-) \\
&= j_s(x^+) \oplus j_s(x^-) \\
&= \iota_s(x^+) \oplus \iota_s(x^-) \\
&= \iota_s(x^+ + x^-) = \iota_s(|x|)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s , tek bir doğal sayı olsun. Buna göre $x^+ \perp x^-$ olduğundan ve Lemma 2.4-(1,2)' den;

$$\begin{aligned}
j_s(x) &= j_s(x^+ - x^-) = \underbrace{(x^+ - x^-) \odot_s \dots \odot_s (x^+ - x^-)}_{s \text{ tane}} \\
&= (x^+ \odot_s \dots \odot_s x^+) \oplus (- (x^- \odot_s \dots \odot_s x^-)) \\
&= j_s(x^+) \oplus (-j_s(x^-)) \\
&= \iota_s(x^+) \oplus (-\iota_s(x^-))
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Lemma 2.3-(2,3)' den,

$$\iota_s(x^+) \oplus (-\iota_s(x^-)) = \iota_s(x^+) \oplus \iota_s(-x^-) = \iota_s(x^+ - x^-) = \iota_s(x)$$

bulunur.

Önerme 3.4

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, F bir Banach örgüsü, E bir p -konveks Banach örgüsü olsun. Eğer $S : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif operatörü Banach-Saks ise, buna karşılık gelen pozitif s -homojen ortogonal toplamsal $Q : E \rightarrow F$ polinomu da Banach-Saks tır.

Kanıt. $S : E_{(s)} \rightarrow F$, pozitif bir Banach-Saks operatörü, $(x_n) \in E$ sınırlı herhangi bir dizi ve $y_n := j_s(x_n)$ şeklinde tanımlı olsun. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Ayrıca, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ olmak üzere, Önerme 3.3 ve Lemma 2.3-(4)' den,

$$\|j_s(x_n)\|_s = \|\iota_s(|x_n|)\|_s = \|\iota_s(x_n)\|_s = \|\iota_s(x_n)\|_s$$

elde edilir. Bu eşitlik göz önüne alınarak, [30, Lemma 3]' den de, $(y_n) \in E_{(s)}$ dizisinin sınırlı olduğu açıkça görülür. Bununla beraber, S bir Banach-Saks operatör olduğundan, $y_n = j_s(x_n) \in E_{(s)}$ sınırlı dizisinin $S(y_{n_k})$ Cesàro yakınsak olacak şekilde bir (y_{n_k}) alt dizisi vardır. Yani [30, Theorem 3]' den yararlanarak;

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S y_{n_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S o j_s(x_{n_k}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Q(x_{n_k})$$

dizisi F' nin normuna göre yakınsaktır. Dolayısıyla Q pozitif s -homejen ortogonal toplamsal polinomu da Banach-Saks tır. Bununla beraber $s = 1$ için $E_{(1)} = E$ ve her $x \in E$ için $j_s(x) = x$ olduğundan önermenin ispatı açıktır.

Önerme 3.5

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı, F bir Banach örgüsü, E bir p -konveks Banach örgüsü olsun. Eğer, $Q : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu Banach-Saks ise, bu polinoma karşılık gelen pozitif $S : E_{(s)} \rightarrow F$ operatörü de Banach-Saks tır.

Kanıt. Önerme 3.3' den anlaşıldığı üzere, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s tek bir doğal sayı ise, her $x \in E$ için, $j_s(x) = \iota_s(x)$ dir. Dolayısıyla Teorem 2.6' dan, her $x \in E$ için, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu $Q(x) = S o j_s(x) = S o \iota_s(x)$ şeklinde ifade edilebilir. Bununla beraber Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. $(y_n) \in E_{(s)}$ herhangi bir sınırlı dizi olsun. Lemma 2.3' den, ι_s bir sıra izomorfizm olduğundan, $y_n = \iota_s(x_n)$ olacak şekilde bir $(x_n) \in E$ dizisi her zaman vardır. Dahası Lemma 2.5' den, $(x_n) \in E$ dizisinin de sınırlı bir dizi olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla, Q pozitif bir Banach-Saks s -homojen ortogonal toplamsal polinom olduğundan, (x_n) dizisinin $(Q x_{n_k})$ Cesàro yakınsak olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Yani,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Q x_{n_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S o j_s(x_{n_k}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S y_{n_k}$$

dizisi F' nin normuna göre yakınsaktır. O halde S bir Banach-Saks operatördür. Bununla beraber $s = 1$ için, $E_{(1)} = E$ ve her $x \in E$ için $j_s(x) = x$ olduğundan önermenin ispatı açıktır.

Önerme 3.6

$p \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$, $2 \leq s \leq p$ ve s bir çift sayı, E bir p -konveks Banach örgüsü, F

bir zayıf birimle birlikte sıra sürekli norma sahip bir Banach örgüsü ve F' de sıra sürekli bir norma sahip olsun. Eğer, $Q : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu Banach-Saks ise, bu polinoma karşılık gelen $S : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif operatörü de Banach-Saks tır.

Kanıt. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' nin de bir Banach örgüsü ve Önerme 3.3' den, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir çift doğal sayı olduğunda, her $x \in E$ için $j_s(x) = \iota_s(|x|)$ olduğu bilinmektedir. Bununla beraber [38, Theorem 1.2.7] (veya [34, Theorem 1.b.14])' den, F Banach örgüsü, (Ω, Σ, μ) bir olasılık uzayı olmak üzere, $i : F \hookrightarrow L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ içermesi ile, $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ uzayının bir sıra ideali olarak temsil edilebilir.

$(y_n) \in E_{(s)}$ herhangi bir sınırlı dizi olsun. Lemma 2.3' den, ι_s bir sıra izomorfizm olduğundan, $\iota_s(x_n) = |y_n|$ olacak şekilde bir $(x_n) \in E^+$ dizisi vardır. Dolayısıyla Lemma 2.5' den, (x_n) dizisinin de sınırlı bir dizi olduğu açıktır. Dahası Teorem 2.6' dan, $(x_n) \in E^+$ için,

$$S(|y_n|) = S\iota_s(x_n) = S j_s(x_n) = Q(x_n)$$

dir. Bu eşitlikten yararlanarak, Q pozitif, Banach-Saks s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom olduğundan, $(x_n) \in E^+$ dizisinin (Qx_{n_k}) Cesàro yakınsak olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Yani,

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Qx_{n_k} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S j_s(x_{n_k}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S\iota_s(x_{n_k}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S(|y_{n_k}|)$$

dizisi, F' deki norma göre bir $x \in F$ ye yakınsaktır. Dahası Cesàro toplanabilirlik regüler bir toplanabilirlik metodu olduğu için, [12] den, (n_k) nın tüm alt dizileri için de bu durum geçerlidir.

Bunlara ek olarak, $t_m := \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S(|y_{n_k}|)$ şeklinde tanımlansın. (t_m) dizisi F Banach örgüsünde yakınsak ve sınırlı bir dizi olduğundan, [17, Lemma 2.1] (veya ispatı için bkz. [15, Lemma 3.3])' den, (t_m) dizisi düzgün integrallenebilirdir. Ayrıca, $c_m := \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S(y_{n_k})$ şeklinde tanımlı olmak üzere,

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S(y_{n_k}) \right| \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S(|y_{n_k}|)$$

olduğundan, (c_m) dizisi de düzgün integrallenebilirdir. Dolayısıyla, (n_k) nın tüm

alt dizileri için de düzgün integrallenebilir olma durumu geçerlidir.

$(Sy_{n_k})_k$ alt dizisi F Banach örgüsünde sınırlı, F ve F' sıra sürekli normlara sahip olduğundan, [3, Theorem 4.25]' den, $(Sy_{n_k})_k$ alt dizisinin bir zayıf Cauchy alt dizisi vardır. Bu alt dizi $(Sy_{n_{k_i}})_i$ ile temsil edilmek üzere, $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ uzayı zayıf dizisel tam olduğundan, $(Sy_{n_{k_i}})_i$ alt dizisi $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ uzayında zayıf yakınsaktır. O halde [40] dan, $(Sy_{n_{k_i}})_i$ alt dizisinin $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ' deki norma göre, $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ye yakınsayan, Cesàro yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu alt dizi de $(Sy_{n_{k_{i_t}}})_t$ ile temsil edilsin. Dahası,

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m S(y_{n_{k_{i_t}}}) \right| \leq \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m S(|y_{n_{k_{i_t}}}|)$$

ve

$$\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m S(|y_{n_{k_{i_t}}}|) \rightarrow x, \quad x \in F$$

olduğundan $|f| \leq x$ ve dolayısıyla $f \in F$ dir.

Sonuç olarak Lemma 2.7' den,

$$\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m S(y_{n_{k_{i_t}}})$$

sınırlı alt dizisi F Banach örgüsünde yakınsaktır. O halde S operatörü bir Banach-Saks operatördür.

Yukarıda verilen önermeleri kullanarak, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için Banach-Saks dominasyon problemi aşağıdaki gibi ispatlanmıştır:

Teorem 3.7

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı, E p -konveks bir Banach örgüsü, F sıra sürekli norma sahip bir Banach örgüsü, P ve Q ise E' den F' ye pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Eğer, $0 \leq P \leq Q$ ve Q bir Banach-Saks polinomu ise, P de bir Banach-Saks polinomudur.

Kanıt. Teorem 2.6' dan, P ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının $S_2, S_1 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o J_s$ ve $P = S_2 o J_s$ şeklinde tek türlü temsil edilebildiği ve $0 \leq P \leq Q$ ise, $0 \leq S_2 \leq S_1$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca Önerme 3.2' den, $E_{(s)}$ bir Banach örgüsüdür. O halde Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Banach-Saks polinomu ise, Önerme 3.5' den, S_1 pozitif operatörü de bir Banach-Saks operatördür. O halde

[38, Corollary 7.2.3] (veya [18, Corollary 3.3])' den, S_2 pozitif operatörünün bir Banach-Saks operatör olduğu açıktır. Dolayısıyla Önerme 3.4' den, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Banach-Saks polinomudur.

Teorem 3.8

$p \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$, $2 \leq s \leq p$ ve s bir çift sayı, E ve F Banach örgüleri, P ve Q ise E' den F' ye pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

1. E , p -konveks bir Banach örgüsü,
2. F Banach örgüsü bir zayıf birimle birlikte sıra sürekli norma sahip,
3. F' sıra sürekli bir norma sahip olsun.

Bu durumda, $0 \leq P \leq Q$ ve Q bir Banach-Saks polinomu ise, P de bir Banach-Saks polinomudur.

Kanıt. Teorem 2.6' dan, P ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomları, $S_2, S_1 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o_{J_s}$ ve $P = S_2 o_{J_s}$ şeklinde tek türlü temsil edilebilir ve $0 \leq S_2 \leq S_1$ dir. Ayrıca Önerme 3.2' den, $E_{(s)}$ bir Banach örgüsüdür. O halde Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Banach-Saks polinomu ise, Önerme 3.6' dan, S_1 pozitif operatörü de bir Banach-Saks operatörüdür. O halde [38, Corollary 7.2.3] (veya [18, Corollary 3.3])' den, S_2 pozitif operatörünün bir Banach-Saks operatörü olduğu açıktır. Dolayısıyla Önerme 3.4' den, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Banach-Saks polinomudur.

Bu bölümde son olarak, pozitif Banach-Saks s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarla ilgili elde edilen yeni sonuçlar verilmiştir:

Teorem 3.9

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı, E bir p -konveks Banach örgüsü, P ve Q ise, E' den $E_{(s)}$ ' ye pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Bu durumda $0 \leq P \leq Q$ ve Q bir Banach-Saks polinomu ise, $S_2 P$ de bir Banach-Saks polinomudur.

Kanıt. Teorem 2.6' dan, P ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomları $S_2, S_1 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o_{J_s}$ ve $P = S_2 o_{J_s}$ şeklinde tek türlü temsil edilebilir ve dahası $0 \leq S_2 \leq S_1$

dir. Önerme 3.2' den, $E_{(s)}$ bir Banach örgüsüdür. Ayrıca Önerme 3.5' den, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Banach-Saks polinomu olduğundan, S_1 pozitif operatörü de bir Banach-Saks operatörüdür. Dolayısıyla [38, Corollary 7.2.2] (veya [18, Corollary 3.2])' den, S_2^2 pozitif operatörü de bir Banach-Saks operatörüdür. Dolayısıyla Önerme 3.4 ve Teorem 2.6' dan, $S_2^2 o_{j_s} = S_2 (S_2 o_{j_s}) = S_2 P$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Banach-Saks polinomudur.

Teorem 3.10

$p \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$, $2 \leq s \leq p$ ve s bir çift sayı, E bir Banach örgüsü, P ve Q ise E' den $E_{(s)}$ ' ye pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

1. E , p -konveks bir Banach örgüsü,
2. $E_{(s)}$ Banach örgüsü bir zayıf birimle birlikte sıra sürekli norma sahip,
3. $E'_{(s)}$ sıra sürekli bir norma sahip olsun.

Bu durumda, $0 \leq P \leq Q$ ve Q bir Banach-Saks polinomu ise, $S_2 P$ de bir Banach-Saks polinomudur.

Kanıt. Teorem 2.6' dan, P ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının $S_2, S_1 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o_{j_s}$ ve $P = S_2 o_{j_s}$ şeklinde tek türlü temsil edilebildiği bilinmektedir. Dahası $0 \leq S_2 \leq S_1$ dir. Önerme 3.6' dan, Q pozitif s -homojen polinomu bir Banach-Saks polinomu olduğundan, S_1 pozitif operatörü de bir Banach-Saks operatörüdür. Dolayısıyla [38, Corollary 7.2.2] (veya [18, Corollary 3.2])' den, S_2^2 pozitif operatörü de bir Banach-Saks operatörüdür. Dahası Önerme 3.4 ve Teorem 2.6' dan, $S_2^2 o_{j_s} = S_2 (S_2 o_{j_s}) = S_2 P$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Banach-Saks polinomudur.

4. KOMPAKT POLİNOMLAR

Bu bölümde öncelikle regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için modül tanımı verilmiş ve ardından regüler (kompakt) s -homojen ortogonal toplamsal polinomların modülünün varlığıyla ilgili olarak iki tane teorem ispatlanmıştır. Bölümün son kısmında ise, kompakt regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarla ilgili elde edilen yeni sonuçlara yer verilmiştir.

Buna göre, regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için modül tanımı aşağıdaki gibidir:

Tanım 4.1

$1 \leq s \in \mathbb{N}$, E ve F vektör örgüleri, $Q : E \rightarrow F$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom olmak üzere eğer,

$$|Q| := Q \vee (-Q)$$

varsa, Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun modülü vardır denir ve $|Q|$ ile gösterilir. Başka bir deyişle $|Q|$, $\mathcal{P}_0^r({}^s E, F)$ de, $\{Q, -Q\}$ kümesinin supremumudur.

Aşağıda ifade ve ispat edilen Teorem 4.2 ve Teorem 4.5 ile, bir regüler (kompakt) s -homojen ortogonal toplamsal polinomun hangi koşullar altında modülünün olduğu ve bu modülün nasıl ifade edildiği verilmiştir.

Teorem 4.2

$1 \leq s \in \mathbb{N}$, E bir Banach örgüsü, F bir vektör örgüsü, $P : E \rightarrow F$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom ve her $x \in E^+$ için $\sup \{|Py| : |y| \leq x\}$ değeri F 'de var olsun. O zaman P regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun modülü vardır ve her $x \in E^+$ için

$$|P|(x) = \sup \{|Py| : |y| \leq x\}$$

sağlanır.

Kanıt. Teorem 2.6' dan, P regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun $S : E_{(s)} \rightarrow F$ regüler bir operatör olmak üzere, $P = Soj_s$ şeklinde tek türlü temsil edilebildiği bilinmektedir. $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve $t := j_s(y)$ şeklinde tanımlı olmak üzere, Lemma 2.4-(3)' den;

$$|j_s(y)| = j_s|y| = \iota_s|y| = |t|$$

ve her $x \in E^+$ için, Lemma 2.3' den;

$$\sup \{|Py| : |y| \leq x\} = \sup \{|Soj_s(y)| : |y| \leq x\} = \sup \{|St| : \iota_s^{-1}|t| \leq x\}$$

elde edilir. Bununla beraber $x \in E^+$ için, $k \in E_{(s)}^+$ olmak üzere, $k := \iota_s x = j_s x$ şeklinde tanımlansın. O halde Lemma 2.3' den, ι_s bir sıra izomorfizm olduğundan,

$$\sup \{|St| : \iota_s^{-1}|t| \leq x\} = \sup \{|St| : |t| \leq k\}$$

olur. Dolayısıyla her $k \in E_{(s)}^+$ için F' de, $\sup \{|St| : |t| \leq k\}$ vardır. O halde [3, Theorem 1.14]' den, S regüler operatörünün modülü vardır ve her $k \in E_{(s)}^+$ için,

$$|S|(k) = \sup \{|St| : |t| \leq k\}$$

dir. Buradan hareketle her $x \in E^+$ için,

$$|S|(k) = |S|oj_s(x) = \sup \{|Py| : |y| \leq x\}$$

dir. Bununla beraber Teorem 2.6' dan, $P \leftrightarrow S$ karşılık getirmesi $\mathcal{P}_0^r({}^sE, F)$ ve $\mathcal{L}^r(E_{(s)}, F)$ sıralı vektör uzayları arasında bir izomorfizm olduğundan, S regüler operatörünün modülü varsa, P regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun da modülü vardır ve bu modül S operatörünün modülüne karşılık gelen bir pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomdur. Dolayısıyla her $x \in E^+$ için,

$$|P|(x) = |S|(j_s(x)) = \sup \{|Py| : |y| \leq x\}$$

dır. Bununla beraber $s = 1$ için, $j_s(x) = x$ ve $E_{(1)} = E$ olduğundan teoremin ispatı açıktır.

Lemma 4.3

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve E bir Banach örgüsü olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanmaktadır:

1. Eğer E , $0 < M \in \mathbb{R}$ sabitiyle p -konveks bir Banach örgüsü ise,

$$\iota_s(U(E)) \subseteq U(E_{(s)}) \subseteq \iota_s(MU(E))$$

2. $\iota_s(U(E)) \subseteq J_s(U(E) \cap E^+) \oplus (-J_s(U(E) \cap E^+))$

3. Eğer s tek bir doğal sayı ise, $\iota_s(U(E)) = J_s(U(E))$,

4. Eğer s çift bir doğal sayı ise,

$$J_s(U(E)) \subseteq \iota_s(U(E))$$

dir.

Kanıt. Lemma 2.5' den $\iota_s(U(E)) \subseteq U(E_{(s)}) \subseteq \iota_s(MU(E))$ olduğu hemen görülür.

Diğer taraftan, $x \in U(E)$ olsun. E bir Banach örgüsü ve $0 \leq x^+, x^- \leq |x|$ olduğundan, $\|x^+\|, \|x^-\| \leq \|x\| = \|x\|$ olur. Dolayısıyla $x^+, x^- \in (U(E) \cap E^+)$ dır. O halde Lemma 2.3-(2,3)' den,

$$\iota_s(x) = \iota_s(x^+ - x^-) = \iota_s(x^+) \oplus (-\iota_s(x^-)) \in \iota_s(U(E) \cap E^+) \oplus (-\iota_s(U(E) \cap E^+))$$

olduğu görülür. Bunlara ek olarak, ι_s ve J_s nin tanımlarından, her $x \in E^+$ için, $\iota_s(x) = J_s(x)$ olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla $x \in U(E)$ olmak üzere,

$$\iota_s(x) \in \iota_s(U(E) \cap E^+) \oplus (-\iota_s(U(E) \cap E^+)) = J_s(U(E) \cap E^+) \oplus (-J_s(U(E) \cap E^+))$$

olur.

Bunlara ek olarak eğer, s tek bir doğal sayı ise, Önerme 3.3' den her $x \in E$ için, $\iota_s(x) = J_s(x)$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $\iota_s(U(E)) = J_s(U(E))$ dir.

Son olarak Önerme 3.3' den, s çift bir doğal sayı olmak üzere, her $x \in E$ için $J_s(x) = \iota_s(|x|)$ dir. Dolayısıyla, eğer $x \in U(E)$ ise, $J_s(x) = \iota_s(|x|) \in \iota_s(U(E))$ olur.

Önerme 4.4

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve E , $0 < M \in \mathbb{R}$ sabitiyle p -konveks bir Banach örgüsü, F bir Banach örgüsü ve $Q : E \rightarrow F$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom olsun. Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun (zayıf) kompakt olması için gerek ve yeter koşul Q , regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomuna karşılık gelen $S : E_{(s)} \rightarrow F$ regüler

operatörünün de (zayıf) kompakt olmasıdır.

Kanıt. Varsayalım ki, $S : E_{(s)} \rightarrow F$ regüler operatörü kompakt ve s çift bir doğal sayı olsun. Önerme 3.2' den $E_{(s)}$ bir Banach örgüsüdür. Ayrıca $S(U(E_{(s)}))$ (zayıf) görelî kompakttır. Bununla beraber Lemma 4.3-(1,4)' den yararlanarak,

$$S_{j_s}(U(E)) \subseteq S_{\iota_s}(U(E)) \subseteq S(U(E_{(s)}))$$

olduğu hemen görülür. Dolayısıyla $Q(U(E)) = S(j_s(U(E)))$ de (zayıf) görelî kompakt olacağından, Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da (zayıf) kompakt olur.

Şimdi de S regüler operatörü (zayıf) kompakt, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s tek bir doğal sayı olsun. Bu durumda $S(U(E_{(s)}))$ (zayıf) görelî kompakttır. Önerme 3.3' den her $x \in E$ için $j_s(x) = \iota_s(x)$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla Lemma 4.3-(1,3)' den,

$$S(j_s(U(E))) = S(\iota_s(U(E))) \subseteq S(U(E_{(s)}))$$

elde edilir. O halde S (zayıf) kompakt bir operatör olduğundan, $Q = Soj_s = Sol_s$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da (zayıf) kompakttır.

Tersine, varsayalım ki Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu (zayıf) kompakt olsun. O halde $Q(U(E)) = S(j_s(U(E)))$ (zayıf) görelî kompakttır. Eğer $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s tek bir doğal sayı ise, Önerme 3.3' den, her $x \in E$ için $j_s(x) = \iota_s(x)$ olduğundan, Lemma 2.3-(3) ve Lemma 4.3-(1,3)' den yararlanarak,

$$U(E_{(s)}) \subseteq \iota_s(MU(E)) = M^s * \iota_s(U(E)) = M^s * j_s(U(E))$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$S(U(E_{(s)})) \subseteq M^s S(j_s(U(E))) = M^s Q(U(E))$$

olur. Buradan da S regüler operatörünün de (zayıf) kompakt olduğu anlaşılır.

Eğer s çift bir doğal sayı ve Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu (zayıf) kompakt ise, Lemma 4.3-(1,2) ve Lemma 2.3-(3)' den,

$$U(E_{(s)}) \subseteq \iota_s(MU(E)) = M^s * \iota_s(U(E)) \subseteq M^s * (j_s(U(E) \cap E^+) \oplus (-j_s(U(E) \cap E^+)))$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$S(U(E_{(s)})) \subseteq M^s(S(j_s(U(E) \cap E^+) - S(j_s(U(E) \cap E^+)))$$

olur. O halde $S(j_s(U(E) \cap E^+)) \subseteq S(j_s(U(E)))$ ve $S(j_s(U(E)))$ (zayıf) görelî kompakt olduğundan, $S(j_s(U(E) \cap E^+))$ de (zayıf) görelî kompakt olur. Dolayısıyla $S(U(E_{(s)}))$ de (zayıf) görelî kompakt olduğundan, S regüler operatörü de (zayıf) kompakt olur. Ayrıca $s = 1$ için $j_s(x) = x$ ve $E_{(1)} = E$ olduğundan önermenin ispatı açıktır.

Teorem 4.5

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, F bir AM -uzayı ve $P : E \rightarrow F$ kompakt, regüler s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom olsun. O zaman P 'nin modülü $|P|$ vardır ve kompakt pozitif s -homojen ortogonal toplamsal bir polinomdur. Ayrıca, her $x \in E^+$ için,

$$|P|(x) = \sup \{|Py| : |y| \leq x\}$$

olur. Dahası F Dedekind tam ve E Banach örgüsü $M = 1$ sabiti ile s -konveks ise, E' den F' ye tüm kompakt regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomların vektör uzayı regüler norm ile birlikte bir Banach örgüsüdür.

Kanıt. Teorem 2.6' dan, P regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun $S : E_{(s)} \rightarrow F$ regüler bir operatör olmak üzere, $P = Soj_s$ şeklinde tek türlü temsil edilir. Ayrıca Önerme 3.2' den $E_{(s)}$ ' nin bir Banach örgüsü olduğu bilinmektedir. Bununla beraber Önerme 4.4' den, P kompakt bir regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinom olduğundan, S regüler operatörü de kompakt olur. Buna göre [3, Theorem 5.7]' den, S kompakt operatörünün $|S|$ modülü vardır ve $|S|$ de kompakt bir operatördür. Dahası her $k \in E_{(s)}^+$ için,

$$|S|(k) = \sup \{|St| : |t| \leq k\}$$

sağlanmaktadır.

Bununla beraber eğer dikkat edilirse, her $x \in E^+$ için, F' de $\sup \{|Py| : |y| \leq x\}$ vardır. Gerçekten $2 \leq s \in \mathbb{N}$, $t := j_s(y)$ olmak üzere

$$|j_s(y)| = j_s|y| = \iota_s|y| = |t|$$

ve Lemma 2.3' den, her $x \in E^+$ için,

$$\sup \{|Py| : |y| \leq x\} = \sup \{|Soj_s(y)| : |y| \leq x\} = \sup \{|St| : \iota_s^{-1} |t| \leq x\}$$

olur. Bununla beraber, $x \in E^+$ için, $k \in E_{(s)}^+$ olmak üzere, $k := \iota_s x = j_s x$ şeklinde tanımlansın. O halde Lemma 2.3' den, ι_s bir sıra izomorfizm olduğundan,

$$\sup \{|St| : \iota_s^{-1} |t| \leq x\} = \sup \{|St| : |t| \leq k\}$$

olur. O halde her $x \in E^+$ için, F' de, $\sup \{|Py| : |y| \leq x\}$ vardır. Buradan hareketle Teorem 4.2' den, P kompakt regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun $|P|$ modülü vardır ¹ ve her $x \in E^+$ için,

$$|P|(x) = \sup \{|Py| : |y| \leq x\}$$

sağlanır. Bununla beraber Önerme 4.4' den, $|S|$ kompakt bir operatör olduğundan, $|P|$ modülü de kompakt pozitif s -homojen ortogonal toplamsal bir polinomdur. Ayrıca $s = 1$ için $j_s(x) = x$ ve $E_{(1)} = E$ olduğundan teoremin ispatı açıktır.

E ve F Banach örgüleri teoremden verilen özelliklere sahip olsun. Bu durumda $\mathcal{K}_0^r({}^sE, F)$, E' den F' ye tüm kompakt regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomların vektör uzayını temsil etmek üzere, bu uzayın regüler norm ile birlikte bir Banach örgüsü olduğunu gösterebiliriz. $\mathcal{K}_0^r({}^sE, F)$ vektör uzayı bir sıra vektör uzayıdır ($Q \leq P$ gerek ve yeter koşul $0 \leq P - Q$). Yukarıda her P kompakt regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu için, $|P|$ modülünün var ve kompakt bir pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinom olduğu gösterildi. Dolayısıyla $\mathcal{K}_0^r({}^sE, F)$ uzayı bir vektör örgüsüdür. Ayrıca regüler norm $\mathcal{K}_0^r({}^sE, F)$ uzayı üzerinde bir örgü normudur. (Q_n) kompakt regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomların bir Cauchy dizisi olsun. O zaman her $\epsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda, $\|Q_n - Q_m\|_r < \epsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı mevcuttur. Ayrıca Teorem 2.6' dan, her n için, Q_n regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının $S_n : E_{(s)} \rightarrow F$ lineer, regüler operatörler olmak üzere $Q_n = S_n o j_s$ olacak şekilde tek türlü temsil edilir ve dahası her $\epsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda,

$$\|S_n - S_m\|_r < \epsilon$$

¹Teorem 2.6' dan, $P \leftrightarrow S$ karşılık getirmesi $\mathcal{P}_0^r({}^sE, F)$ ve $\mathcal{L}^r(E_{(s)}, F)$ sıralı vektör uzayları arasında bir izomorfizm olduğundan, P regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun modülü $|P|$ vardır ve $|P|$, $|S|$ pozitif operatörüne karşı gelen pozitif s -homojen ortogonal toplamsal bir polinomdur.

olacak şekilde bir n_0 sayısı vardır. Bununla beraber Önerme 4.4' den, S_n operatörleri de kompakttır. Dahası, F Dedekind tam olduğundan $\mathcal{L}_b(E, F) = \mathcal{L}_r(E, F)$ dir [3]. Dolayısıyla [3, Teorem 4.74]' den, $\mathcal{L}_b(E, F)$ regüler norm ile bir Dedekind tam Banach örgüsü olduğundan, (S_n) regüler operatörler dizisi bir regüler operatöre regüler norm ile yakınsaktır. Ayrıca [3, Teorem 5.7]' den, (S_n) kompakt operatörler dizisi bir kompakt operatöre regüler norm ile yakınsaktır. O halde (S_n) kompakt, regüler operatörler dizisi bir S kompakt, regüler operatörüne regüler norm ile yakınsaktır. Dolayısıyla Teorem 2.6 ve Önerme 4.4' den, (Q_n) dizisi de S kompakt regüler lineer operatörüne karşı gelen, $Q := S o J_s$ kompakt regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomuna regüler norm ile yakınsaktır. O zaman $\mathcal{K}_0^r({}^s E, F)$ uzayı regüler norm ile birlikte bir Banach örgüsüdür.

Teorem 4.6, Teorem 4.8, Sonuç 4.9 ve Teorem 4.10' da tanımlanmış olan S_i , $i = 1, 2, 3$ pozitif operatörleri, Teorem 2.6 uyarınca, $Q_i = S_i o J_s$ olacak şekilde Q_i , $i = 1, 2, 3$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomuna karşılık gelen operatörleri temsil etmektedir.

Aşağıda (zayıf) kompakt, regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarla ilgili elde edilen yeni sonuçlara yer verilmiştir.

Teorem 4.6

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve E p -konveks bir Banach örgüsü, $Q_1, Q_2 : E \rightarrow E_{(s)}$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Eğer, $0 \leq Q_2 \leq Q_1$ ve Q_1 , s -homojen ortogonal toplamsal polinomu kompakt ise, S_2^3 pozitif operatörüne karşılık gelen $S_2^2 Q_2$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da kompakttır.

Kanıt. Önerme 3.2' den $E_{(s)}$ bir Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q_i = S_i o J_s$ $i = 1, 2$ ve $0 \leq S_2 \leq S_1$ dir. Dahası Önerme 4.4' den, S_1 operatörü de kompakttır. O halde [3, Theorem 5.13]' den, S_2^3 pozitif operatörü de kompakttır. Dolayısıyla Önerme 4.4' den, $S_2^3 o J_s = S_2^2 Q_2$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da kompakttır.

Teorem 4.7

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, $E_{(s)}$ AL -uzayı, F sıra sürekli norma sahip bir Banach örgüsü olsun. Eğer, $Q : E \rightarrow F$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu kompakt ise, Q polinomunun kompakt

bir modülü vardır.

Kanıt. Teorem 2.6' ya göre, Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu, $S : E_{(s)} \rightarrow F$ regüler bir operatör olmak üzere, $Q = SoJ_s$ şeklinde tek türlü temsil edilir. S operatörü regüler bir operatör olduğu için aynı zamanda sıra sınırlı bir operatördür [3]. Ayrıca Önerme 4.4' den, S operatörü de kompakttır. Dolayısıyla [3, Teorem 5.9]' dan, S operatörü kompakt bir modüle sahiptir. O halde Teorem 2.6' dan, Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun modülü vardır ve bu modül S operatörünün modülüne karşılık gelen pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomdur. Dolayısıyla Önerme 4.4' den, Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun $|Q|$ modülü de kompakttır.

Teorem 4.8

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve G Banach örgüsü, E p -konveks bir Banach örgüsü, ya $E'_{(s)}$ yada G sıra sürekli norma sahip olsun. Eğer $Q_1 = E \rightarrow E_{(s)}$ ve $Q_2 = E \rightarrow G$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının her biri, kompakt pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar tarafından domine ediliyorsa, S_2Q_1 pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da kompakttır.

Kanıt. Önerme 3.2' den $E_{(s)}$ Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, $S_1 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ ve $S_2 : E_{(s)} \rightarrow G$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q_1 = S_1oJ_s$, $Q_2 = S_2oJ_s$ şeklinde tek türlü temsil edilir. Q_1 ve Q_2 pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomları, kompakt pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar tarafından domine edildiğine göre, Teorem 2.6 ve Önerme 4.4' den, S_1 ve S_2 operatörleri de,

$$E_{(s)} \xrightarrow{s_1} E_{(s)} \xrightarrow{s_2} G$$

kompakt pozitif operatörler tarafından domine edilmektedir. O halde [3, Theorem 5.15]' den, S_2S_1 pozitif operatörü de kompakttır. Dolayısıyla Teorem 2.6 ve Önerme 4.4' den, $(S_2S_1)oJ_s = S_2Q_1$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da kompakttır.

Sonuç 4.9

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, ya $E'_{(s)}$ yada $E_{(s)}$ sıra sürekli norma sahip olsunlar. Eğer, $Q_1 = E \rightarrow E_{(s)}$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir kompakt pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinom tarafından domine ediliyorsa, S_1Q_1 pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da kompakttır.

Kanıt. Önerme 3.2' den $E_{(s)}$ Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, $S_1 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ pozitif bir operatör olmak üzere, $Q_1 = S_1 o J_s$ şeklinde temsil edilir. Q_1 pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu, kompakt bir pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinom tarafından domine ediliyorsa, Önerme 4.4 ve Teorem 2.6' dan, S pozitif operatörü de kompakt bir pozitif operatör tarafından domine edilir. Dolayısıyla [3, Corollary 5.16]' dan, S_1^2 pozitif operatörü de kompakttır. O halde Önerme 4.4' den, $S_1^2 o J_s = S_1 Q_1$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da kompakttır.

Teorem 4.10

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, H Banach örgüsü, E p -konveks bir Banach örgüsü olmak üzere, $Q_i = E \rightarrow E_{(s)}$, $i = 1, 2$ ve $Q_3 = E \rightarrow H$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Eğer her bir Q_i , $i = 1, 2, 3$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu, kompakt pozitif s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom tarafından domine ediliyorsa, $(S_3 S_2 S_1)$ pozitif operatörüne karşı gelen $(S_3 S_2 Q_1)$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da kompakttır.

Kanıt. Önerme 3.2' den $E_{(s)}$ bir Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$, $S_3 : E_{(s)} \rightarrow H$ pozitif operatörler olmak üzere, $i = 1, 2, 3$ için, $Q_i = S_i o J_s$ şeklinde tek türlü temsil edilir. Her bir Q_i , $i = 1, 2, 3$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu, kompakt pozitif s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom tarafından domine edildiğine göre, Önerme 4.4 ve Teorem 2.6' dan,

$$E_{(s)} \xrightarrow{S_1} E_{(s)} \xrightarrow{S_2} E_{(s)} \xrightarrow{S_3} H$$

ve S_i , $i = 1, 2, 3$ pozitif operatörleri de kompakt pozitif operatörler tarafından domine edilir. Dolayısıyla [3, Theorem 5.14]' den, $S_3 S_2 S_1$ pozitif operatörü de kompakttır. O halde Önerme 4.4' den, $(S_3 S_2 S_1) o J_s = (S_3 S_2 Q_1)$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da kompakttır.

Bölümün son teoremi ise pozitif zayıf kompakt polinomlarla ilgilidir.

Teorem 4.11

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve E p -konveks bir Banach örgüsü $Q_1, Q_2 : E \rightarrow E_{(s)}$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Eğer, $0 \leq Q_2 \leq Q_1$ ve Q_1 , s -homojen ortogonal toplamsal polinomu zayıf kompakt ise, S_2^2 pozitif operatörüne karşılık gelen $S_2 Q_2$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu

da zayıf kompakttır.

Kanıt. Önerme 3.2' den $E_{(s)}$ bir Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q_i = S_i o_j$ $i = 1, 2$ ve $0 \leq S_2 \leq S_1$ dir. Dahası Önerme 4.4' den, S_1 operatörü de zayıf kompakttır. O halde [3, Theorem 5.32] (veya bkz. [1])' den, S_2^2 pozitif operatörü de zayıf kompakttır. Dolayısıyla Önerme 4.4 ve Teorem 2.6' dan, $S_2^2 o_j = S_2 Q_2$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da zayıf kompakttır.

5. DUNFORD-PETTİS POLİNOMLARI

Bu bölümde ilk olarak, Dunford-Pettis polinom tanımı yapılmış ve ardından pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomların Dunford-Pettis dominasyon problemini ispatlamak için gerekli ön sonuçlar verilmiştir. Daha sonra ise, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomların Dunford-Pettis dominasyon problemi için üç farklı teorem ispatlanmıştır. Bölüm sonunda ise, pozitif Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarla ilgili elde edilen diğer yeni sonuçlara yer verilmiştir.

Buna göre, Dunford-Pettis s -homojen polinom tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tanım 5.1

$1 \leq s \in \mathbb{N}$, E, F Banach uzayları, $P : E \rightarrow F$ bir s -homojen polinom olmak üzere, eğer E Banach örgüsünde $x_n \xrightarrow{w} 0$ olması $\|P(x_n)\| \rightarrow 0$ olmasını gerektiriyorsa, P s -homojen polinomuna Dunford-Pettis polinomu denir.

Pozitif Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomların dominasyon problemiyle ilgili olarak ispatlanan teoremlerin ilki aşağıdaki gibidir:

Teorem 5.2

$1 \leq s \in \mathbb{N}$, E, F Banach örgüleri, P ve Q ise $0 \leq P \leq Q$ olacak şekilde E' den F' ye pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Eğer E Banach örgüsü zayıf dizisel sürekli örgü işlemlerine sahip ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Dunford-Pettis polinomu ise, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

Kanıt. E Banach örgüsünde, $x_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. O halde E Banach örgüsü, zayıf dizisel sürekli örgü işlemlerine sahip olduğundan, E' de $|x_n| \xrightarrow{w} 0$ dir. Bununla beraber, Q s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Dunford-Pettis polinom olduğu için,

$$\|Q(|x_n|)\| \rightarrow 0$$

dir. Ayrıca Teorem 2.6' dan, P ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif operatörler olmak üzere, $P = S_1 \circ J_s$

ve $Q = S_2 o J_s$ şeklinde tek türlü temsil edilebildiği ve $0 \leq S_1 \leq S_2$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla,

$$|P(x_n)| = |(S_1 o J_s)(x_n)| \leq S_1 |J_s(x_n)| \leq S_2 |J_s(x_n)| = S_2 o J_s(|x_n|) = Q(|x_n|)$$

ve F bir Banach örgüsü olduğundan,

$$0 \leq \|P(x_n)\| \leq \|Q(|x_n|)\|$$

dır. Dolayısıyla $\|P(x_n)\| \rightarrow 0$ dır. O halde P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

Pozitif Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomların dominasyon problemiyle ilgili olarak ispatlanan teoremlerin ikincisi ise aşağıdaki gibidir:

Teorem 5.3

$1 \leq s \in \mathbb{N}$, E, F Banach örgüleri, E AM -uzayı ve $P, Q : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomları için $0 \leq P \leq Q$ olsun. Eğer Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Dunford-Pettis polinomu ise, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

Kanıt. [3, Theorem 4.31]' den, E bir AM -uzayı ise, zayıf dizisel sürekli örgü işlemlerine sahip olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla bu teoremin geri kalan ispatı Teorem 5.2 ile aynıdır.

Pozitif Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomların dominasyon problemiyle ilgili olarak ispatlanan teoremlerin üçüncüsü için gerekli olan ön sonuçlar aşağıdaki gibi verilmiştir:

Önerme 5.4

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip olsun. Bu durumda E de $x_n \xrightarrow{w} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $E_{(s)}$ ' de $J_s(x_n) \xrightarrow{w} 0$ olmasıdır.

Kanıt. E de $x_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Ayrıca Önerme 3.3 ve Lemma 2.3-(4)'

den, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ için,

$$\|J_s(x_n)\|_s = \|\iota_s(|x_n|)\|_s = \|\iota_s(x_n)\|_s = \|\iota_s(x_n)\|_s \quad (5.1)$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca E de $x_n \xrightarrow{w} 0$ ve E Banach örgüsü Schur özelliğine sahip olduğundan, $\|x_n\| \rightarrow 0$ olur. O halde (5.1) eşitliğinden ve Lemma 2.5' den, $\|J_s(x_n)\|_s \rightarrow 0$ elde edilir. Dolayısıyla $E_{(s)}$ ' de, $J_s(x_n) \xrightarrow{w} 0$ olur.

Tersine $E_{(s)}$ ' de, $J_s(x_n) \xrightarrow{w} 0$ olsun. $E_{(s)}$ Banach örgüsü Schur özelliğine sahip olduğundan, $\|J_s(x_n)\|_s \rightarrow 0$ dir. Dolayısıyla (5.1) eşitliğinden ve Lemma 2.5' den, $\|x_n\| \rightarrow 0$ olur. O halde E' de $x_n \xrightarrow{w} 0$ dir.

Ayrıca $s = 1$ için $E_{(1)} = E$ ve her $x \in E$ için $J_1(x) = x$ olduğundan önermenin ispatı açıktır.

Eğer Önerme 5.4' de, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ olmak üzere J_s yerine ι_s alınır, yine benzer bir ispatla aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.5

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $2 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip olsun. Bu durumda E' de $x_n \xrightarrow{w} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $E_{(s)}$ ' de $\iota_s(x_n) \xrightarrow{w} 0$ olmasıdır.

Önerme 5.6

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E ve F Banach örgüleri, E p -konveks, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip olmak üzere, eğer pozitif s -homojen ortogonal toplamsal $Q : E \rightarrow F$ polinomu bir Dunford-Pettis polinom ise, Q polinomuna karşılık gelen S_1 pozitif operatörü de bir Dunford-Pettis operatördür.

Kanıt. Teorem 2.6' dan, $Q : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu, $S_1 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif bir operatör olmak üzere, $Q = S_1 \circ J_s$ şeklinde tek türlü temsil edilir. Varsayalım ki $2 \leq s \in \mathbb{N}$ önermedeki koşulları sağlayan bir çift doğal sayı ve $E_{(s)}$ ' de $y_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. Önerme 3.3' den $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s çift bir doğal sayı ise, her $x \in E$ için $J_s(x) = \iota_s(|x|)$ dir. Ayrıca Lemma 2.3' den, $\iota_s : E \rightarrow E_{(s)}$ bir sıra izomorfizm olduğundan, her n için, $\iota_s(x_n) = y_n$ olacak şekilde bir $(x_n) \in E$ vardır. Dolayısıyla Sonuç 5.5' den, E' de $x_n \xrightarrow{w} 0$ olur. Bununla beraber $S_1 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif bir operatör ve F bir Banach örgüsü olduğundan, her n için;

$$|S_1(y_n)| \leq S_1(|y_n|)$$

ve

$$\|S_1(\iota_s(x_n))\| = \|S_1(y_n)\| \leq \|S_1(|y_n|)\| = \|S_1(j_s(x_n))\| = \|Q(x_n)\| \quad (5.2)$$

dir. Bununla beraber Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Dunford-Pettis polinom olduğundan, $\|Q(x_n)\| \rightarrow 0$ dir. Dolayısıyla (5.2) eşitsizliğinden $\|S_1(y_n)\| \rightarrow 0$ olur. O halde S_1 pozitif operatörü de bir Dunford-Pettis operatördür.

Varsayalım ki $2 \leq s \in \mathbb{N}$ önermedeki koşulları sağlayan bir tek doğal sayı ve $E_{(s)}$ ' de $y_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. Bu durumda Önerme 3.3' den, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s tek bir doğal sayı olmak üzere, her $x \in E$ için $j_s(x) = \iota_s(x)$ dir. Lemma 2.3' den, $\iota_s : E \rightarrow E_{(s)}$ bir sıra izomorfizm olduğundan, her n için, $\iota_s(x_n) = y_n$ olacak şekilde bir $(x_n) \in E$ vardır. Dolayısıyla Önerme 5.4' den, E' de $x_n \xrightarrow{w} 0$ olur. O halde Q s -homojen polinomu bir Dunford-Pettis polinomu ve

$$\|Q(x_n)\| = \|S_1(j_s(x_n))\| = \|S_1(y_n)\|$$

olduğundan, $\|S_1(y_n)\| \rightarrow 0$ elde edilir. Böylece S_1 pozitif operatörü de bir Dunford-Pettis operatörü olur.

Ayrıca $s = 1$ için $E_{(1)} = E$ ve her $x \in E$ için $j_1(x) = x$ olduğundan önermenin ispatı açıktır.

Önerme 5.7

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E ve F Banach örgüleri, E p -konveks, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip olmak üzere, eğer $S_1 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif operatörü bir Dunford-Pettis operatörü ise, buna karşılık gelen $Q : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

Kanıt. Teorem 2.6' dan, $Q : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu, $S_1 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif bir operatör olmak üzere, $Q = S_1 \circ j_s$ şeklinde tek türlü temsil edilir. Varsayalım ki E' de $x_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. O halde Önerme 5.4' den, $E_{(s)}$ ' de $j_s(x_n) \xrightarrow{w} 0$ olur. S_1 pozitif lineer operatörü bir Dunford-Pettis operatörü olduğuna göre, $\|Q(x_n)\| = \|S_1(j_s(x_n))\| \rightarrow 0$ dir. O halde $Q = S_1 \circ j_s$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

Pozitif Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomların dominasyon problemiyle ilgili olarak ispatlanan son teorem ise aşağıdaki gibidir:

Teorem 5.8

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E ve F Banach örgüleri, F sıra sürekli norma sahip, E p -konveks, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip, $0 \leq P \leq Q : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar ve Q bir Dunford-Pettis polinomu olsun. O zaman P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

Kanıt. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsü olur. Teorem 2.6' dan, P ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif operatörler olmak üzere, $P = S_1 o_{J_s}$ ve $Q = S_2 o_{J_s}$ olacak şekilde tek türlü temsil edilebildiği bilinmektedir. Dahası $0 \leq S_1 \leq S_2$ dir. Dolayısıyla Önerme 5.6' dan, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Dunford-Pettis polinom ise, S_2 pozitif operatörü de bir Dunford-Pettis operatördür. O halde [26, Theorem 4.4]' den, S_1 pozitif operatörü de bir Dunford-Pettis operatör dür. Dolayısıyla Önerme 5.7' den, S_1 operatörüne karşılık gelen P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomdur.

Teorem 2.6' dan, E ve F vektör örgüleri, E düzgün tam ve $1 \leq s \in \mathbb{N}$ için, $P, Q : E_{(s)} \rightarrow F$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomların, $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow F$ regüler operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o_{J_s}$ ve $P = S_2 o_{J_s}$ şeklinde tek türlü temsil edilebildiği bilinmektedir. Teorem 5.9 ve Teorem 5.10' da tanımlanan Q ve P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomları için de bu temsil geçerlidir. Buna göre Teorem 5.9 ve Teorem 5.10' daki S_2 operatörü, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomuna karşılık gelen pozitif operatörü temsil etmektedir.

Dunford-Pettis pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için elde edilen yeni sonuçlar, Teorem 5.9 ve Teorem 5.10 ile aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

Teorem 5.9

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip ve $P, Q : E \rightarrow E_{(s)}$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Eğer $0 \leq P \leq Q$ ve Q bir Dunford-Pettis polinomu ise, $S_2 P$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

Kanıt. Teorem 2.6' dan, $0 \leq S_2 \leq S_1 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ dir. Ayrıca Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Bununla

beraber Önerme 5.6' dan, Q pozitif s -homojen polinomu bir Dunford-Pettis polinomu olduğundan, S_1 pozitif operatörde bir Dunford-Pettis operatörü olur. Dolayısıyla [26, Corollary 4.7]' den, S_2^2 pozitif operatörde bir Dunford-Pettis operatördür. O halde Önerme 5.7' den, $S_2^2 o_{J_s} = S_2 P$ pozitif s -homojen polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

Teorem 5.10

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip, $0 \leq P \leq Q : E \rightarrow E_{(s)}$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Eğer Q bir Dunford-Pettis polinomu ise, $S_2^2 P$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

Kanıt. Teorem 2.6' dan, $0 \leq S_2 \leq S_1 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ dir. Ayrıca Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Bununla beraber Önerme 5.6' dan, Q pozitif s -homojen polinomu bir Dunford-Pettis polinom olduğundan, S_1 pozitif operatörü de bir Dunford-Pettis operatörü dür. Dolayısıyla [2, Theorem 3.1]' den, S_2^3 pozitif operatörde bir Dunford-Pettis operatördür. O halde Önerme 5.7' den, $S_2^3 o_{J_s} = S_2^2 P$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomudur.

6. ZAYIF DUNFORD-PETTİS POLİNOMLARI

Bu bölümde öncelikle zayıf Dunford-Pettis polinom tanımı ve daha sonra pozitif, zayıf Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarla ilgili olan teoremleri kanıtlamak için gerekli ön sonuçlar verildi. Ardından pozitif zayıf Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için dominasyon problemi, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s tek bir sayı olmak üzere, ispatlandı. Bölüm sonunda ise pozitif zayıf Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarla ilgili olarak elde edilen yeni sonuçlara yer verildi.

Tanım 6.1

$1 \leq s \in \mathbb{N}$, E ve F Banach uzayları ve $P : E \rightarrow F$, s -homojen bir polinom olmak üzere, E Banach uzayında $x_n \xrightarrow{w} 0$ ve F' uzayında $y'_n \xrightarrow{w} 0$ iken, $\lim_{n \rightarrow \infty} y'_n (Px_n) = 0$ oluyorsa, P s -homojen polinomuna zayıf Dunford-Pettis polinomu denir.

Teorem 2.6' dan, E ve F vektör örgüleri, E düzgün tam ve $1 \leq s \in \mathbb{N}$ için, $Q, P : E \rightarrow F$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar, $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow F$ regüler operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o J_s$ ve $P = S_2 o J_s$ şeklinde tek türlü temsil edilebildiği bilinmektedir. Buna göre Önerme 6.2 ve Önerme 6.3' deki S_1 operatörü, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomuna karşılık gelen pozitif operatörü ve Teorem 6.6' daki S_2 operatörü de, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomuna karşılık gelen pozitif operatörü temsil etmektedir.

Aşağıda pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomların zayıf Dunford-Pettis dominasyon problemini kanıtlamak için gerekli ön sonuçlar verilmiştir.

Önerme 6.2

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, F Banach örgüsü, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip olsun. Eğer regüler $S_1 : E_{(s)} \rightarrow F$ operatörü bir zayıf Dunford-Pettis operatörü ise, bu operatöre karşılık gelen $Q : E \rightarrow F$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir zayıf Dunford-Pettis polinomu olur.

Kanıt. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Varsayalım ki, E Banach örgüsünde $x_n \xrightarrow{w} 0$ ve F' uzayında $y'_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. O halde Önerme 5.4' den, $E_{(s)}$ Banach örgüsünde $J_s(x_n) \xrightarrow{w} 0$ olur. Buradan S_1 operatörü bir zayıf Dunford-Pettis operatör olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} y'_n(S_1(J_s(x_n))) = \lim_{n \rightarrow \infty} y'_n(Q(x_n)) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir zayıf Dunford-Pettis polinomudur.

Önerme 6.3

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek doğal sayı, E p -konveks bir Banach örgüsü, F Banach örgüsü, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip olsun. Eğer $Q : E \rightarrow F$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir zayıf Dunford-Pettis polinomu ise, bu polinoma karşılık gelen regüler $S_1 : E_{(s)} \rightarrow F$ operatörü de bir zayıf Dunford-Pettis operatörüdür.

Kanıt. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Varsayalım ki, $E_{(s)}$ Banach örgüsünde $t_n \xrightarrow{w} 0$ ve F' uzayında $y'_n \xrightarrow{w} 0$ olsun. Önerme 3.3' den, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek doğal sayı olmak üzere, her $x \in E$ için $J_s(x) = \iota_s(x)$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca Lemma 2.3' den, ι_s bir sıra izomorfizm olduğundan, her n için, $t_n = J_s(x_n) = \iota_s(x_n)$ olacak şekilde E Banach örgüsünde bir (x_n) dizisi vardır. Dolayısıyla Önerme 5.4' den, E' de $x_n \xrightarrow{w} 0$ dir. Bununla beraber Q bir zayıf Dunford-Pettis polinomu olduğundan ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y'_n(S_1(t_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} y'_n(S_1(J_s(x_n))) = \lim_{n \rightarrow \infty} y'_n(Q(x_n)) = 0$$

dir. O halde regüler S_1 operatörü de bir zayıf Dunford-Pettis operatörüdür. Ayrıca $s = 1$ olmak üzere, her $x \in E$ için, $J_1(x) = x$ ve $E_{(1)} = E$ olacağından önermenin ispatı ispat açıktır.

Teorem 6.4

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı, E p -konveks bir Banach örgüsü, F Banach örgüsü, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip ve $Q : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir zayıf Dunford-Pettis polinomu olsun. Eğer $0 \leq P \leq Q$ ise, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir zayıf Dunford-Pettis polinomudur.

Kanıt. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir

Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, P ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o J_s$ ve $P = S_2 o J_s$ olacak şekilde tek türlü temsil edilebildiği ve $0 \leq S_2 \leq S_1$ olduğu bilinmektedir. Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir zayıf Dunford-Pettis polinom olduğundan, Önerme 6.3' den, S_1 pozitif operatörde bir zayıf Dunford-Pettis operatör olur. Dolayısıyla [26, Theorem 4.5]' den, S_2 pozitif operatörü de bir zayıf Dunford-Pettis operatördür. O halde Önerme 6.2' den, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir zayıf Dunford-Pettis polinom olur.

Aşağıda pozitif zayıf Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarla ilgili olarak elde edilen diğer yeni sonuçlar verilmiştir.

Teorem 6.5

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, F Banach örgüsü, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip ve $Q, P : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomları için $0 \leq P \leq Q$ sağlansın. Eğer Q polinomu kompakt ise, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir zayıf Dunford-Pettis polinomudur.

Kanıt. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, P ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o J_s$ ve $P = S_2 o J_s$ olacak şekilde tek türlü temsil edilebildiği ve $0 \leq S_2 \leq S_1$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca Önerme 4.4' den, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir kompakt polinom olduğundan, buna karşılık gelen S_1 pozitif operatörü de kompakttır. O halde [2, Theorem 2.3]' den, S_2 pozitif operatörünün de bir zayıf Dunford-Pettis operatör olduğu görülür. Dolayısıyla Önerme 6.2' den, S_2 pozitif operatörüne karşılık gelen, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da, bir zayıf Dunford-Pettis polinomu olur.

Teorem 6.6

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip, $Q, P : E \rightarrow E_{(s)}$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar ve $0 \leq P \leq Q$ olsun. Eğer Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu kompakt ise,

1. $S_2^2 P$ kompakt pozitif s -homojen ortogonal toplamsal bir polinomdur ($S_2 P$

pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu kompakt olmak zorunda değildir);

2. S_2P Dunford-Pettis ve zayıf kompakt bir pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomdur (P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu aynı özelliklere sahip olmak zorunda değildir);
3. P , pozitif zayıf Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal bir polinomdur.

Kanıt. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, P ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomların, $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o_{J_s}$ ve $P = S_2 o_{J_s}$ olacak şekilde tek türlü temsil edilebildiği ve $0 \leq S_2 \leq S_1$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca Önerme 4.4' den, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir kompakt polinom olduğundan, buna karşılık gelen S_1 pozitif operatörü de kompakttır. Bununla beraber [2, Theorem 2.5-(1)]' den, S_2^3 pozitif operatörü de bir kompakt operatör olur. O halde Önerme 4.4' den, $S_2^3 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ pozitif kompakt operatörüne karşılık gelen $S_2^3 o_{J_s} = S_2^2 P$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da kompakttır. Bunlara ek olarak, [2, Theorem 2.5-(1)]' den, S_2^2 pozitif operatörü kompakt olmak zorunda olmadığından, Önerme 4.4' den, $S_2 P$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da kompakt olmak zorunda değildir.

Bununla beraber [2, Theorem 2.5-(2)]' den, S_1 pozitif operatörü kompakt olduğundan, S_2^2 pozitif operatörü de Dunford-Pettis ve zayıf kompakt bir operatör olur. Dolayısıyla Önerme 5.7' den, S_2^2 pozitif Dunford-Pettis operatörüne karşılık gelen $S_2^2 o_{J_s} = S_2 P$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir Dunford-Pettis polinomdur. Ayrıca Önerme 4.4' den, S_2^2 pozitif zayıf kompakt operatörüne karşılık gelen $S_2^2 o_{J_s} = S_2 P$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir zayıf kompakt polinomdur. Bununla beraber [2, Theorem 2.5-(2)]' den, S_2 pozitif operatörü Dunford-Pettis ve zayıf kompakt bir operatör olmak zorunda değildir. Dolayısıyla Önerme 5.6 ve Önerme 4.4' den, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da Dunford-Pettis ve zayıf kompakt bir polinom olmak zorunda değildir.

Bunlara ek olarak, [2, Theorem 2.5-(3)]' den, S_2 pozitif operatörü de bir zayıf Dunford-Pettis operatör olur. O halde Önerme 6.2' den, S_2 pozitif, zayıf Dunford-Pettis operatörüne karşılık gelen P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir zayıf Dunford-Pettis polinomdur.

Teorem 6.7

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, F sıra sürekli norma sahip bir Banach örgüsü, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip, $Q, P : E \rightarrow F$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar ve $0 \leq P \leq Q$ olsun. Eğer Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu kompakt ise, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da zayıf kompakt ve Dunford-Pettis bir polinomdur.

Kanıt. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, P ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o J_s$ ve $P = S_2 o J_s$ olacak şekilde tek türlü temsil edilebilir ve $0 \leq S_2 \leq S_1$ dir. Bununla beraber Önerme 4.4' den, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir kompakt polinom olduğundan, buna karşılık gelen S_1 pozitif operatörü de kompakttır. Dolayısıyla [2, Theorem 2.6]' dan, S_2 pozitif operatörü Dunford-Pettis ve zayıf kompakt bir operatör olur. O halde Önerme 4.4 ve Önerme 5.7' den, S_2 operatörüne karşılık gelen P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da zayıf kompakt ve Dunford-Pettis bir polinomdur.

Teorem 6.8

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, $E'_{(s)}$ sıra sürekli norma sahip, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip, $Q : E \rightarrow E_{(s)}$ pozitif, Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom olsun. Bu durumda Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu kompakttır. (ve böylece bu durumda eğer, $P : E \rightarrow E_{(s)}$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom ve $0 \leq P \leq Q$ ise, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da kompakttır.)

Kanıt. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun $S_1 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ pozitif lineer operatör olmak üzere, $Q = S_1 o J_s$ olacak şekilde tek türlü temsil edilebilir. Bununla beraber $E_{(s)}$ Banach örgüsü Schur özelliğine sahip olduğundan [44, Theorem 2]' den, $E_{(s)}$ sıra sürekli bir norma sahiptir. Ayrıca Önerme 5.6' dan, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Dunford-Pettis polinom olduğundan, buna karşılık gelen S_1 pozitif operatörü de bir Dunford-Pettis operatördür. Dolayısıyla [2, Theorem 2.7]' den, S_1 pozitif operatörü kompakttır. O halde Önerme 4.4' den de, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu kompakttır.

Bunlara ek olarak Teorem 2.6' dan, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun, $S_2 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ pozitif bir operatör olmak üzere, $P = S_2 o J_s$ şeklinde temsil edilir ve $0 \leq S_2 \leq S_1$ dir. Ayrıca Önerme 4.4' den, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir kompakt polinom olduğundan, buna karşılık gelen S_1 pozitif operatörü de kompakttır. Dolayısıyla [2, Theorem 2.7]' den, S_2 pozitif operatörü kompakt bir operatördür. O halde Önerme 4.4' den, S_2 pozitif kompakt operatörüne karşı gelen P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da kompakttır.

Teorem 6.9

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, E p -konveks bir Banach örgüsü, F Banach örgüsü, $E'_{(s)}$ sıra sürekli norma sahip, E ve $E_{(s)}$ Schur özelliğine sahip, $Q : E \rightarrow F$ pozitif, Dunford-Pettis s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom olsun. Bu durumda Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu kompakttır. (ve böylece eğer, $P : E \rightarrow F$ s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom ve $0 \leq P \leq Q$ ise, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da zayıf kompakt ve zayıf Dunford Pettis bir polinomdur.)

Kant. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun $S_1 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif lineer operatör olmak üzere, $Q = S_1 o J_s$ olacak şekilde tek türlü temsil edilebilir. Bununla beraber $E_{(s)}$ Banach örgüsü Schur özelliğine sahip olduğundan [44, Theorem 2]' den, $E_{(s)}$ sıra sürekli bir norma sahiptir. Ayrıca Önerme 5.6' dan, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir Dunford-Pettis polinom olduğundan, buna karşılık gelen S_1 pozitif operatörü de bir Dunford-Pettis operatördür. Dolayısıyla [2, Theorem 2.8]' den, S_1 pozitif operatörü kompakttır. O halde Önerme 4.4' den de, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu kompakttır.

Bunlara ek olarak Teorem 2.6' dan, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun $S_2 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif lineer operatör olmak üzere, $P = S_2 o J_s$ şeklinde temsil edilebildiği ve $0 \leq P \leq Q$ olduğundan $0 \leq S_2 \leq S_1$ olduğu bilinmektedir. Bununla beraber Önerme 4.4' den, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir kompakt polinom olduğundan, buna karşılık gelen S_1 pozitif operatörü de kompakttır. Dolayısıyla [2, Theorem 2.8]' den, S_2 pozitif operatörü zayıf kompakt ve zayıf Dunford-Pettis bir operatördür. Dolayısıyla Önerme 4.4 ve Önerme 6.2' den, S_2 pozitif operatörüne karşı gelen P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da zayıf kompakt ve zayıf Dunford Pettis bir polinomdur.

7. AYRIK KESİN SİNGÜLER POLİNOMLAR

Bu bölümde öncelikle, ayrik kesin singüler polinom tanımı yapılmış ve ardından pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomların ayrik kesin singüler dominasyon problemini ispatlamak için gerekli ön sonuçlar verilmiştir. Daha sonra ise, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomların ayrik kesin singüler dominasyon problemi ispatlanmıştır. Bölüm sonunda ise, ayrik kesin singüler regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarla ilgili elde edilen diğer yeni sonuçlara yer verilmiştir.

Tanım 7.1

$1 \leq s \in \mathbb{N}$, E , F sırasıyla Banach örgüsü ve Banach uzayı ve $Q : E \rightarrow F$ s -homojen bir polinom olsun. Eğer E de, Q s -homojen polinomunun (x_n) vektörleri tarafından gerilen $[(x_n)]$ alt uzayı üzerindeki kısıtlanması bir izomorfizm olacak şekilde, hiç biri sıfır olmayan ayrik vektörlerin (x_n) dizisi yoksa, Q s -homojen polinomuna bir ayrik kesin singüler polinomdur denir.

Önerme 3.3' den, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir çift sayı ise, her $x \in E$ için, $j_s(x) = \iota_s |x|$ olduğu bilindiğine göre,

$$Q(x) = Soj_s(x) = Sol_s(|x|)$$

olduğu açıktır. Burada Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun hiç biri sıfır olmayan (x_n) ayrik vektörleri tarafından gerilen $[(x_n)]$ alt uzayı üzerindeki kısıtlanması, $\iota_s(|x|)$ ' nin $[(x_n)]$ alt uzayı üzerindeki kısıtlanışının bire bir olmamasından dolayı, bir izomorfizm olmayacaktır. Dolayısıyla Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir çift sayı olmak üzere, her zaman bir ayrik kesin singüler polinomdur.

Önerme 7.2

E Banach örgüsü ve $2 \leq s \in \mathbb{N}$ olmak üzere, (x_n) dizisinin E ' de hiç biri sıfır olmayan ayrik vektörlerin bir dizisi olması için gerek ve yeter koşul $(\iota_s(x_n))$ dizisinin de $E_{(s)}$ ' de hiç biri sıfır olmayan ayrik vektörlerin bir dizisi olmasıdır.

Kanıt. Lemma 2.3' den, ι_s bir sıra izomorfizm olduğundan önermenin ispatı açıktır.

Önerme 7.3

$2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve (x_i) dizisi E Banach örgüsünde, hiç biri sıfır olmayan ayırık vektörlerin bir dizisi ve $\iota_s(x_i) = y_i$ ise, $\iota_s[(x_i)] = [(y_i)]$ dir.

Kanıt. Varsayalım ki $t \in \iota_s[(x_i)]$ olsun. O halde $\alpha_{i_k} \in \mathbb{R}/\{0\}$, $k = 1, \dots, n$ olmak üzere,

$$t = \iota_s(\alpha_{i_1}x_{i_1} + \dots + \alpha_{i_n}x_{i_n})$$

dir. Ayrıca (x_n) dizisi E' de hiç biri sıfır olmayan ayırık vektörlerin bir dizisi olduğundan, $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $i \neq j$ için, $\beta x_i \perp \lambda x_j$ dir. Dolayısıyla Lemma 2.3-(2,3)' den,

$$\begin{aligned} \iota_s(\alpha_{i_1}x_{i_1} + \dots + \alpha_{i_n}x_{i_n}) &= \iota_s(\alpha_{i_1}x_{i_1}) \oplus \dots \oplus \iota_s(\alpha_{i_n}x_{i_n}) \\ &= \alpha_{i_1}^s * \iota_s(x_{i_1}) \oplus \dots \oplus \alpha_{i_n}^s * \iota_s(x_{i_n}) \\ &= \alpha_{i_1}^s * y_{i_1} \oplus \dots \oplus \alpha_{i_n}^s * y_{i_n} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $t \in [(y_i)]$ dir.

Tersine , eğer $t \in [(y_i)]$ ise, Lemma 2.3-(2,3)' den, $\beta_{i_k} \in \mathbb{R}/\{0\}$, $k = 1, \dots, n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} t &= (\beta_{i_1} * y_{i_1}) \oplus \dots \oplus (\beta_{i_n} * y_{i_n}) \\ &= (\beta_{i_1} * \iota_s(x_{i_1})) \oplus \dots \oplus (\beta_{i_n} * \iota_s(x_{i_n})) \\ &= \iota_s\left(\beta_{i_1}^{\frac{1}{s}}x_{i_1}\right) \oplus \dots \oplus \iota_s\left(\beta_{i_n}^{\frac{1}{s}}x_{i_n}\right) \\ &= \iota_s\left(\beta_{i_1}^{\frac{1}{s}}x_{i_1} + \dots + \beta_{i_n}^{\frac{1}{s}}x_{i_n}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $t \in \iota_s[(x_i)]$ dir. O halde $\iota_s[(x_i)] = [(y_i)]$ dir.

Lemma 7.4

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, s bir tek sayı, F Banach örgüsü, E p -konveks bir Banach örgüsü ve $Q = E \rightarrow F$ bir regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinom olsun. Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun bir ayırık kesin singüler polinom olması için gerek ve yeter koşul Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomuna karşılık gelen, $S : E_{(s)} \rightarrow F$ regüler operatörünün de bir

ayrık kesin singüler operatör olmasıdır.

Kanıt. Varsayalım ki Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir ayrık kesin singüler polinom olmasın. O halde E' de hiç biri sıfır olmayan ayrık vektörlerin bir (x_n) dizisi vardır öyle ki; Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomunun (x_n) vektörleri tarafından gerilen $[(x_n)]$ alt uzayı üzerindeki kısıtlanması bir izomorfizmdir. Bununla beraber Önerme 3.2' den $E_{(s)}$ ' nin bir Banach örgüsü ve Önerme 3.3' den de, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı olmak üzere, her $x \in E$ için $J_s(x) = \iota_s(x)$ olduğu bilinmektedir. Dahası Önerme 7.2' den, $2 \leq s \in \mathbb{N}$, s bir tek sayı ve $\iota_s(x_n) = y_n$ olmak üzere, (y_n) dizisi de, $E_{(s)}$ de hiç biri sıfır olmayan ayrık vektörlerin bir dizisidir. Ayrıca Önerme 7.3' den, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s tek sayısı için, $\iota_s[(x_i)] = [(y_i)]$ dir. O halde Teorem 2.6' dan, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı olmak üzere,

$$Q|_{[(x_n)]} = SoJ_s|_{[(x_n)]} = So\iota_s|_{[(x_n)]} = S|_{[(y_n)]}$$

elde edilir. Dolayısıyla $S|_{[(y_n)]}$ de bir izomorfizmdir. O halde S operatörü bir ayrık kesin singüler operatör değildir.

Tersine S regüler operatörü bir ayrık kesin singüler operatör olmasın. Bu durumda $E_{(s)}$ ' de hiç biri sıfır olmayan ayrık vektörlerin bir (y_n) dizisi vardır öyle ki; S operatörünün $[(y_n)]$ alt uzayı üzerindeki kısıtlanması bir izomorfizmdir. ι_s bir sıra izomorfizm olduğundan, her n için, $\iota_s(x_n) = y_n$ olacak şekilde $x_n \in E$ vardır. O halde Önerme 7.2' den, $\iota_s(x_n) = y_n$ olmak üzere, (x_n) dizisi de E de hiç biri sıfır olmayan ayrık vektörlerin bir dizisidir. Dahası Önerme 7.3' den, $\iota_s[(x_i)] = [(y_i)]$ dir. O halde Teorem 2.6' dan, $2 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı olmak üzere,

$$Q|_{[(x_n)]} = So\iota_s|_{[(x_n)]} = S|_{[(y_n)]}$$

olur. Ayrıca Lemma 2.5' den, ι_s nin bir homeomorfizm olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $Q|_{[(x_n)]}$ de bir izomorfizm olduğundan, Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir ayrık kesin singüler polinom değildir.

Ayrıca $s = 1$ olmak üzere, her $x \in E$ için, $J_1(x) = x$ ve $E_{(1)} = E$ olduğundan lemmanın ispatı açıktır.

Teorem 7.5

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı, F Banach örgüsü, E p -konveks bir Banach örgüsü, P ve Q ise $0 \leq P \leq Q : E \rightarrow F$ olmak üzere, iki pozitif s -homojen

ortogonal toplamsal polinom olsun. Eğer F sıra sürekli bir norma sahip ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir ayrık kesin singüler polinom ise, P polinomu da bir ayrık kesin singüler polinomdur.

Kanıt. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, P ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow F$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o_{j_s}$ ve $P = S_2 o_{j_s}$ olacak şekilde tek türlü temsil edilebildiği ve $0 \leq S_2 \leq S_1$ olduğu bilinmektedir. O halde Lemma 7.4' den, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir ayrık kesin singüler polinom olduğundan, S_1 pozitif operatörü de bir ayrık kesin singüler operatördür. Dolayısıyla [14, Theorem 1.1]' den, S_2 pozitif operatörü de bir ayrık kesin singüler operatördür. Sonuç olarak Lemma 7.4' den, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir ayrık kesin singüler polinomdur.

Teorem 7.6' daki S_2 operatörü Teorem 2.6 gereğince, P pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomuna karşılık gelen pozitif operatörü temsil etmektedir.

Teorem 7.6

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı, E p -konveks bir Banach örgüsü, P ve Q ise, $0 \leq P \leq Q : E \rightarrow E_{(s)}$ olmak üzere, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Eğer Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir ayrık kesin singüler polinom ise, $S_2 P$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir ayrık kesin singüler polinomdur.

Kanıt. Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Ayrıca Teorem 2.6' dan, P ve Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow E_{(s)}$ pozitif operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o_{j_s}$ ve $P = S_2 o_{j_s}$ olacak şekilde tek türlü temsil edilebildiği ve $0 \leq S_2 \leq S_1$ olduğu bilinmektedir. Bununla beraber Lemma 7.4' den, Q pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir ayrık kesin singüler polinom olduğundan, S_1 operatörü de bir ayrık kesin singüler operatördür. O halde, [14, Theorem 1.2]' den de, S_2^2 pozitif operatörü de bir ayrık kesin singüler operatör olur. Dolayısıyla Lemma 7.4' den, $S_2^2 o_{j_s} = S_2 P$ pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir ayrık kesin singüler polinomdur.

Önerme 7.7

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$, s bir tek sayı, E p -konveks bir Banach örgüsü, F Banach örgüsü ve $Q, P = E \rightarrow F$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar olsun. Eğer Q ve P regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomları ayrık kesin singüler polinomlar ise, $Q + P$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu da bir ayrık kesin singüler polinomdur.

Kanıt. Teorem 2.6' dan, P ve Q regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlarının $S_1, S_2 : E_{(s)} \rightarrow F$ regüler operatörler olmak üzere, $Q = S_1 o_{J_s}$ ve $P = S_2 o_{J_s}$ olacak şekilde tek türlü temsil edilebildiği bilinmektedir. Ayrıca Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Bununla beraber Lemma 7.4' den, S_1 ve S_2 operatörlerinin birer regüler ayrık kesin singüler, operatör olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla [23, Proposition 2]' den, $S_1 + S_2$ regüler operatörü de bir ayrık kesin singüler operatördür. O halde Lemma 7.4' den, $Q + P$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir ayrık kesin singüler polinomdur.

Önerme 7.8

$1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$, $1 \leq s \in \mathbb{N}$ ve s bir tek sayı, E p -konveks bir Banach örgüsü, F ve Z Banach örgüleri olsun. Eğer $Q = E \rightarrow F$ ayrık kesin singüler, regüler s -homojen ortogonal toplamsal bir polinom ve $T : F \rightarrow Z$ regüler sınırlı bir operatör ise TQ bir ayrık kesin singüler, regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomdur.

Kanıt. Teorem 2.6' dan, $S := E_{(s)} \rightarrow F$ regüler bir operatör olmak üzere, $Q = S o_{J_s}$ olacak şekilde tek türlü temsil edilir. Ayrıca Önerme 3.2' den, E p -konveks bir Banach örgüsü olduğundan, $E_{(s)}$ ' de bir Banach örgüsüdür. Bununla beraber Lemma 7.4' den, Q polinomu bir ayrık kesin singüler polinom olduğundan, S operatörü de bir ayrık kesin singüler operatördür. Dolayısıyla [23, Proposition 3]' den, TS regüler operatörü de bir ayrık kesin singüler operatördür. O halde Lemma 7.4' den, $(TS) o_{J_s} = T(S o_{J_s}) = TQ$ regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomu bir ayrık kesin singüler polinomdur.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Pozitif operatörler için dominasyon problemleri uzun yıllardır üzerinde çalışılan popüler konulardan biridir. Bununla beraber pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için dominasyon problemleri üzerine yapılmış tek bir çalışma mevcuttur [30]. Kusraeva [30] bu çalışmasında, kompakt ve zayıf kompakt pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için dominasyon problemlerini incelemiştir. Bu tez çalışması ise, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomların çeşitli dominasyon problemleri üzerine yapılmış olan ikinci bir çalışma niteliğindedir.

Bu çalışma yapılırken, pozitif operatörler için yapılmış olan dominasyon problemlerinden ilham alınmış ve regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için Kusraeva'nın [30] vermiş olduğu temsil kullanılmıştır. Bununla beraber yapılan bu tez çalışmasında, pozitif operatörlerin dominasyon problemleriyle ilgili verilen bazı sonuçların, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için olan karşılığı verilmiştir. Buna göre tezin üçüncü bölümünde, pozitif s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için, Banach-Saks dominasyon problemi, tezin beşinci bölümünde Dunford-Pettis dominasyon problemi, tezin altıncı bölümünde zayıf-Dunford Pettis dominasyon problemi ve son olarak tezin yedinci bölümünde ayırık kesin singüler dominasyon problemleri çözülmüş ve elde edilen çeşitli yeni sonuçlara yer verilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde ise, regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için modül tanımı verilerek, bununla ilgili elde edilen yeni sonuçlar verilmiştir. Ayrıca bölüm sonunda ise, (zayıf) kompakt, regüler s -homojen ortogonal toplamsal polinomlar için elde edilen çeşitli yeni sonuçlara yer verilmiştir.

İleriye yönelik olarak, pozitif operatörler için yapılmış olan çeşitli dominasyon problemleri göz önüne alındığı zaman [4, 5, 27, 31, 35] AM-kompakt, Radon-Nikodým, Narrow, Asplund s -homojen polinomu tanımları yapılarak, bunlar için de dominasyon problemleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O.**, 1981. On weakly compact operators on Banach lattices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **83**, No. 3, 573-578.
- [2] **Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O.**, 1982. Dunford-Pettis operators on Banach lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **274**, No. 1, 227-238.
- [3] **Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O.**, 2006. Positive Operators, Springer, The Netherlands.
- [4] **Aqzzouz, B., Nouria, R. and Zraoula, L.**, 2007. Compactness properties for operators dominated by AM-compact operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**, No. 4, 1151-1157.
- [5] **Aqzzouz, B. and Elbour A.**, 2009. Erratum to: Compactness properties for operators dominated by AM-compact operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137**, No. 8, 2813-2815.
- [6] **Beauzamy, B.**, 1979/80. Propriété de Banach-Saks, (French), *Studia Math.*, **66**, No. 3, 227-235.
- [7] **Benyamini, Y., Lassalle, S. and Llavona, J. G.**, 2006. Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices, *Bull. London Math. Soc.*, **38**, No.3, 459-469.
- [8] **Bu, Q., Buskes, G., Popov, A. I., Tcaciuc, A. and Troitsky, V. G.**, 2013. The 2-concavification of a Banach lattice equals the diagonal of the Fremlin tensor square, *Positivity*, **17**, No. 2, 283-298.
- [9] **Buskes, G., de Pagter, B. and van Rooij, A.**, 1991. Functional calculus on Riesz spaces, *Indag. Math. (N.S.)*, **2**, No. 4, 423-436.
- [10] **Carando, D., Lassalle, S. and Zaldueño, I.**, 2006. Orthogonally additive polynomials over $C(K)$ are measures-a short proof, *Integral Equations Operator Theory*, **56**, No. 4, 597-602.

- [11] **Dodds, P. G. and Fremlin, D. H.**, 1979. Compact operators in Banach lattices, *Israel J. Math.*, **34**, No. 4, (1980), 287–320.
- [12] **Erdős, P. and Magidor, M.**, 1976. A note on regular methods of summability and the Banach-Saks property, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **59**, No. 2, 232-234.
- [13] **Dunford, N. and Pettis, B. J.**, 1940. Linear operations on summable functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **47**, 323–392.
- [14] **Flores, J. and Hernández, F. L.**, 2001. Domination by positive disjointly strictly singular operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**, No. 7, 1979-1986.
- [15] **Flores, J. and Hernández, F. L.**, 2002. Domination by positive strictly singular operators, *J. London Math. Soc.*, (2), **66**, No. 2, 433-452.
- [16] **Flores, J.**, 2005. Some remarks on disjointly strictly singular positive operators, *Positivity*, **9**, No. 3, 385-396.
- [17] **Flores, J. and Ruiz, C.**, 2006. Domination by positive Banach-Saks operators, *Studia Math.*, **173**, No. 2, 185-192.
- [18] **Flores, J. and Tradacete, P.**, 2008. Factorization and domination of positive Banach-Saks operators, *Studia Math.*, **189**, No. 1, 91-101.
- [19] **García del Amo, A., Hernández, F. L. and Ruiz, C.**, 1996. Disjointly strictly singular operators and interpolation, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **126**, No. 5, 1011-1026.
- [20] **Grothendieck, A.**, 1953. Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$, (French), *Canadian J. Math.*, **5**, 129–173.
- [21] **Haid, W.**, 1982. Sätze von Radon-Nikodym-type für operators auf Banach verbanden, *Dissertation Stuttgart*.
- [22] **Hernández, Francisco L. and Rodríguez-Salinas, B.**, 1989. On l^p -complemented copies in Orlicz spaces. II., *Israel J. Math.*, **68**, No. 1, 27-55.
- [23] **Hernández, F. L.**, 1990. Disjointly strictly-singular operators in Banach lattices, *18th. Winter School on Abstract Analysis (Srni). Acta Univ. Carolin. Math. Phys.*, **31**, No. 2, 35-40.

- [24] **Ibort, A., Linares, P. and Llavona, José. G.**, 2009. On the representation of orthogonally additive polynomials in l_p , *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **45**, No. 2, 519–524.
- [25] **Ibort, A., Linares, P. and Llavona, J. G.**, 2012. A representation theorem for orthogonally additive polynomials on Riesz spaces, *Rev. Mat. Complut.*, **25**, No. 1, 21-30.
- [26] **Kalton, N. J. and Saab, P.**, 1985. Ideal properties of regular operators between Banach lattices, *Illinois J. Math.*, **29**, No.3, 382-400.
- [27] **Kusraev, A. G.**, 2012. A direct proof of the domination theorem for Radon–Nikodým operators, *Math. Proc. R. Ir. Acad.*, **112A**, No.1, 15–19.
- [28] **Kusraeva, Z. A.**, 2011. On the representation of orthogonally additive polynomials, (Russian), *Sibirsk. Mat. Zh.*, **52**, No.2, 315-325; translation in *Sib. Math. J.*, **52**, No.2, 248-255.
- [29] **Kusraeva, Z. A.**, 2012. Homogeneous orthogonally additive polynomials on vector lattices, Translation of Mat. Zametki, **91**, No.5, 704-710. *Math. Notes*, **91**, No.5-6, 657-662.
- [30] **Kusraeva, Z. A.**, 2016. On compact majorization of homogeneous orthogonally additive polynomials, (Russian), *Sibirsk. Mat. Zh.*, **57**, No. 3, 658-665; translation in *Sib. Math. J.*, **57**, No. 3, 519-524.
- [31] **Labuschagne, Coenraad C. A.**, 2006. A Dodds–Fremlin property for Asplund and Radon–Nikodým operators, *Positivity*, **10**, No. 2, 391–407.
- [32] **Lin, Pei-Kee**, 2004. Köthe-Bochner function spaces, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.
- [33] **Linares P.**, 2009. Orthogonally additive polynomials and applications, *PhD. Thesis*, Universidad Complutense de Madrid.
- [34] **Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L.**, 1979. Classical Banach Spaces. II. Function Spaces, Springer-Verlag, Berlin-New York.
- [35] **Maslyuchenko, O. V., Mikhaylyuk, V. V. and Popov, M. M.**, 2009. A lattice approach to narrow operators, *Positivity*, **13**, No. 3, 459–495.
- [36] **Meyer-Nieberg, P.**, 1991. Banach Lattices, Universitext, Springer-Verlag, Berlin.

- [37] **Pérez-García, D. and Villanueva, I.**, 2005. Orthogonally additive polynomials on spaces of continuous functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **306**, No. 1, 97-105.
- [38] **Pérez, P. T.**, 2010. Factorization and domination properties of operators on Banach lattices, *PhD. Thesis*, Universidad Complutense de Madrid.
- [39] **Sundaresan, K.**, 1991. Geometry of spaces of homogeneous polynomials on Banach lattices, *in: Applied Geometry and Discrete Mathematics. DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., Amer. Math. Soc., Providence, RI*, **4**, 571–586.
- [40] **Szlenk, W.**, 1965. Sur les suites faiblement convergentes dans l'espace L , (French), *Studia Math.*, **25**, 337-341.
- [41] **Toumi M. A.**, 2010. Orthogonally additive polynomials on Dedekind σ -complete vector lattices, *Math. Proc. R. Ir. Acad.*, **110A**, No. 1, 83-94.
- [42] **Wickstead, A. W.**, 1981. Extremal structure of cones of operators, *Quart. J. Math. Oxford Ser., (2)*, **32**, No. 126, 239–253.
- [43] **Wickstead, A. W.**, 1996. Converses for the Dodds–Fremlin and Kalton–Saab theorems, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **120**, No. 1, 175-179.
- [44] **Wnuk, W.**, 1989. Some characterizations of Banach lattices with Schur property, *Congress on Functional Analysis (Madrid, 1988)*, *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, **2**, suppl., 217-224.

ÖZGEÇMİŞ

Tuğçen Selmanoğulları 30 Mart 1982 yılında Lefkoşa'da doğdu. İlkokul, ortaokul ve lise eğitimini Lefkoşa'da tamamladı. Ardından Mimar Sinan Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 2003 yılında mezun olduktan sonra, 2005 yılında Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisansını tamamladı. 2006 yılında aynı üniversitede Matematik Bölümü'nde doktora eğitimine ve 2007 yılında ise araştırma görevlisi olarak burada çalışmaya başladı. Halen bu bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaya devam etmektedir.