

**T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÖZ-ETKİLEŞİMLİ ASTROFİZİKSEL NÖTRİNOLARIN ÇEŞNİ
EVİRİMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İsmail Taygun BULMUŞ

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yamaç PEHLİVAN

TEMMUZ 2015

**T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÖZ-ETKİLEŞİMLİ ASTROFİZİKSEL NÖTRİNOLARIN ÇEŞNİ
EVİRİMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İsmail Taygun BULMUŞ

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yamaç PEHLİVAN

TEMMUZ 2015

İsmail Taygun Bulmuş tarafından hazırlanan **ÖZ-ETKİLEŞİMLİ**
ASTROFİZİKSEL NÖTRİNOLARIN ÇEŞNİ EVRİMLERİ adlı bu tezin Yüksek
Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Yamaç Pehlivan

Tez Yöneticisi



Bu çalışma, jürimiz tarafından Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak
kabul edilmiştir.

Başkan: : Doç. Dr. Yamaç Pehlivan



Üye : Prof. Dr. Ömer Faruk Dayı



Üye : Doç. Dr. Vedat Nefer Şenoğuz



Bu tez, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım
kurallarına uygundur.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her noktasında emeği geçen, umutsuz kaldığım dönemlerde bana her konuda destek veren ve en önemlisi bana bilim insanı olmayı öğreten değerli hocam Doç. Dr. Yamaç Pehlivan'a sonsuz teşekkür ederim.

Bütün hayatım boyunca verdiğim kararlara destek olan, beni mutlu eden ve hayatımın her noktasında fikirlerine güvendiğim anneme ve babama, bana hep örnek olacak hayatımdaki en değer verdiğim insanlar abime ve yengeme, sayısal analizleri yaparken bana teknik destek veren Burak Atakanı'ya, tezi son haline getirmemde yardımcı olan dostum İlter Coşkun'a, beni tez yazmaya yüreklendiren ve hayatımı kolaylaştıran Melisa Yılmaz'a, bölümümüzde güzel bir çalışma ortamı yaratan ve bizi soru sormaya teşvik edip kapılarını her daim açık tutan değerli MSGSÜ fizik bölümü öğretim elemanlarına ve birbirimize destek olduğumuz bütün bölüm arkadaşlarıma, özellikle Mehmet Helva'ya teşekkür ederim.

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) 112T952 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

28.07.2015

İsmail Taygun Bulmuş

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
1 GİRİŞ	1
2 KUANTUM ALAN TEORİSİ	7
2.1 DIRAC DENKLEMİ VE ÇÖZÜMLERİ	7
2.2 DIRAC LAGRANJİYEN'İ VE DIRAC HAMILTONYEN'İ	11
3 NÖTRİNO FİZİĞİ	16
3.1 TARİHÇE	16
3.2 BOŞLUK SALINIMLARI KUANTUM MEKANİKSEL ÇIKARIMI .	17
3.3 İKİ ÇEŞNİLİ NÖTRİNOLAR	23
3.3.1 NÖTRİNO İZOSPIN OPERATÖRLERİ	24
3.3.2 ÇOK PARÇACIK SALINIM HAMILTONYEN'İ	25
3.3.3 ÇOK PARÇACIK ÖZ-ETKİLEŞİM HAMILTONYEN'İ	27
3.3.4 ORTALAMA ALAN YAKLAŞIMI (OAY)	29
3.4 ÜÇ ÇEŞNİLİ NÖTRİNOLAR	32
3.4.1 YOĞUNLUK MATRİSİ	32
3.4.2 ÇOK PARÇACIK SALINIM HAMILTONYEN'İ	33
3.4.3 ÇOK PARÇACIK ÖZ-ETKİLEŞİM HAMILTONYEN'İ	35
3.4.4 HAREKET DENKLEMİ	36
3.5 ASTROFİZİKTE UYGULAMASI	37
3.5.1 ÇEKİRDEK ÇÖKMELİ SÜPERNOVALARDA NÖTRİNOLAR	38
3.5.2 NÖTRİNO HAREKET DENKLEMLERİ	39
4 SONUÇLAR	43
5 KAYNAKLAR	51
Ek A BİRİMLER	54
Ek B KLEIN-GORDON DENKLEMİ	55
Ek C DIRAC DENKLEMİ	57

ŞEKİL LİSTESİ

1.1	Öz-Etkileşimli Nötrinoların Feynman Diyagramları.	2
1.2	Ortalama Alan Yaklaşımı.	2
1.3	SN 1987A Süpernovası Deney Verileri.	3
1.4	Süpernova Modellerine Göre T_{ν_e} ve $T_{\bar{\nu}_e}$ Karşılaştırılması.	4
1.5	Süpernova Modellerine Göre T_{ν_x} Ve $T_{\bar{\nu}_e}$ Karşılaştırılması.	5
1.6	Spektral Ayrışma.	6
3.1	Kütle Hiyerarşisi.	22
3.2	Baz Değişimi.	23
3.3	Nokta Öz-Etkileşim Feynman Diyagramları.	28
3.4	Çekirdek Çökmeli Süpernovada Katmanlar Ve Nötrinolar	38
3.5	Sistemin Geometrisi	39
4.1	İki Çeşni, Fermi-Dirac Benzeri Dağılımlı, Ters Hiyerarşi İçin Enerji Dağılımı	44
4.2	İki Çeşni, Fermi-Dirac Benzeri Dağılımlı, Normal Hiyerarşi İçin Enerji Dağılımı	45
4.3	İki Çeşni, Fermi-Dirac Dağılımlı, Ters Hiyerarşi İçin Enerji Dağılımı	45
4.4	İki Çeşni, Fermi-Dirac Dağılımlı, Normal Hiyerarşi İçin Enerji Dağılımı	46
4.5	Üç Çeşni, Efektif İki Açılı, Fermi-Dirac Benzeri Dağılımlı, Ters Hiyerarşi ve Farklı Sıcaklıklar İçin Enerji Dağılımı	47
4.6	Üç Çeşni, Efektif İki Açılı, Fermi-Dirac Benzeri Dağılımlı, Normal Hiyerarşi Ve Farklı Sıcaklıklar İçin Enerji Dağılımı	48
4.7	Üç Çeşni, Efektif İki Açılı, Fermi-Dirac Benzeri Dağılımlı, Ters Hiyerarşi İçin Enerji Dağılımı	49

SEMBOL LİSTESİ

∇	: Nabla operatörü
∂	: Kısmi Türev Operatörü
$\square$	: d'Alembert Operatörü
$g^{\mu\nu}$	: Metrik Tensörü
γ^μ	: Gamma Matrisleri
$\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$	: Feynman Kesme Notasyonu
σ^i	: Pauli Spin Matrisleri
$\delta(a - b)$	: Dirac Delta Fonksiyonu
h	: Plank Sabiti
$\hbar$	: Plank Sabitinin 2π 'ye Bölümü
c	: Işık Hızı
k_B	: Stefan-Boltzmann Sabiti
G_F	: Fermi Sabiti
s	: Saniye
T	: Sıcaklık
L	: Parlaklık
m	: Kütle
E	: Enerji
ρ	: Yoğunluk Matrisi
$\langle $	: Bra
$ \rangle$	: Ket
eV	: Elektron Volt
MeV	: Mega Elektron Volt

ÖZ-ETKİLEŞİMLİ ASTROFİZİKSEL NÖTRİNOLARIN ÇEŞNİ

EVİRİMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

İsmail Taygun BULMUŞ

MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2015

ÖZET

Çekirdek çökmeli süpernovalarda açığa çıkan nötrinolar, patlama sonrasında merkezde bulunan proto-nötron yıldızının (PNY) soğuma mekanizmasında önemli bir yer tutar. Fotonlar, nötrinolarla kıyasla daha çok etkileşime girdiği için süpernovanın patlama enerjisini uzay boşluğuna çıkarmada yetersiz kalır. Nötrinolar ise PNY'den ayrıldıktan sonra patlama enerjisini, neredeyse ışık hızında süpernovadan dışarıya doğru taşıyabilir. Bu patlamayla açığa çıkan nötrinoların parlaklıklarının 10^{53} erg/s büyüklüğünde olduğu düşünülmektedir. Nötrinoların madde ile etkileşim tesir kesiti görece çok küçük olmasına rağmen bu kadar yoğun bir ortam, onların öz-etkileşime girmelerine olanak sağlamaktadır. Nötrinolar öz-etkileşime girdiği gibi süpernovadan çıkan elektron ve baryonlarla da etkileşime girer. Ancak bu çalışmada nötrino-elektron veya nötrino-baryon etkileşimleri, hesaplamalara dolaylı olarak eklenmiştir. Nötrino-nötrino etkileşimi iki çeşit saçılma diyagramı ile betimlenir. Bunlardan biri momentum değişimi olmayan ileri saçılma diyagramı, diğeri ise momentumların değiş-tokuş olduğu saçılma diyagramıdır. Öz-etkileşimli nötrinolar, süpernovadan ayrılıp yaklaşık 200-300 km mesafe katettikten sonra, enerji spektrumlarında spektral ayrılma meydana gelir. Bu spektral ayrılmayı, nötrinoların istatistiksel dağılımında gerçekleşen çeşni yer değişimleri olarak düşünebiliriz. Sıcaklık ve enerji aralığı ile çeşitli dağılımlar gibi başlangıç koşullarına bağlı olan bu spektral ayrılma, yakın gelecekte gözlemlemeyi beklediğimiz bir süpernova patlamasının nötrino sinyalini değerlendirmek ya da anlamlandırmak için bize önemli ipuçları verecektir. Bu çalışmada, literatürdeki süpernova modellerinin kullandığı çeşitli enerji spektrumları, karışma açıları ve sıcaklıklar için spektral ayrılmalar elde edilmiştir. Böylelikle süpernova patlamasından geldiği düşünülen nötrinoların çeşni spektrumlarına bakılarak, hangi süpernova modelinin daha gerçekçi ve deneysel verilere daha uygun olduğu anlaşılabilir.

ASTROPHYSICAL NEUTRINOS FLAVOR EVOLUTION WITH SELF INTERACTION

(M.Sc. Thesis)

İsmail Taygun BULMUŞ

**MIMAR SINAN FINE ARTS UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

July 2015

SUMMARY

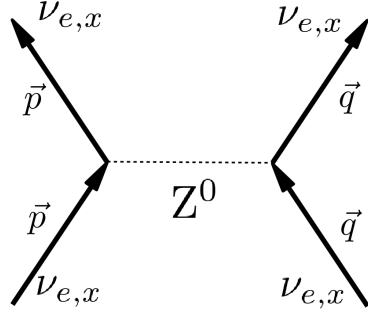
The neutrinos that emerge in the core collapse supernovas play an important role in the cooling mechanism of the proto-neutron star (PNS) that is located in the centre of the supernova. Photons, since they engage in interactions more than the neutrinos, are incapable of transmitting the explosion energy of the supernova into the interstellar medium. Neutrinos, on the other hand, after having decoupled from the PNS, can carry the explosion energy nearly at the speed of light. The luminosity of the neutrinos that emerge in the explosion is estimated to be 10^{53} erg/s. Although the neutrinos' interaction cross-section with matter is relatively very small, such a dense medium makes it possible for the neutrinos to engage in self-interaction. In addition to self-interaction, neutrinos interact with electrons and baryons that are emitted from the supernova as well. However in this study interactions of neutrino-electron and neutrino-baryon are added to the calculations indirectly. Neutrino-neutrino interactions are described by two kinds of scattering diagrams: the forward scattering diagram in which there is no momentum transfer and the scattering diagram with exchanged momentum. When the self-interacting neutrinos are emitted from the PNS and traverse approximately 300km of range, they undergo a spectral split in their energy spectrums. We can think of this spectral split as an exchange of flavour that occurs in the statistical distribution of neutrinos. The spectral split which is dependent on the initial conditions such as the variety of distributions, temperature and energy interval is important for us because it can give us important clues in evaluating or interpreting a neutrino signal of a supernova explosion that is anticipated to be observed in the near future. In this study, spectral splits for various energy spectrums, mixing angles and temperatures that are employed in the supernova models in the literature are obtained. Thus when the neutrinos, which are assessed to be coming from a supernova explosion, are detected, we can understand that which supernova model is more realistic and compatible with the experimental data.

1 GİRİŞ

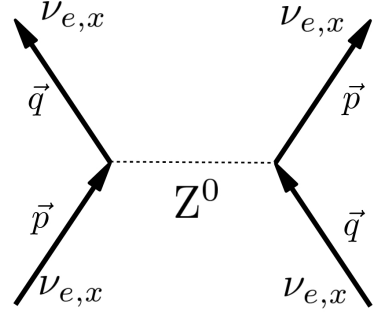
Nötrino fiziği ilgili yayınlanan makalelerin sayısı gün geçtikçe artmaktadır. Özellikle astrofiziksel olaylarda nötrinoların baskın rol oynaması, bu popülerliğin en önemli sebeplerinden biridir.

Günümüzde yapılan deneylerden biliyoruz ki nötrinoların kütlesi sıfırdan farklı olmalıdır. Kütle ve çeşni tabanının çakışmaması, nötrinoların çeşnileri arasında bir salınıma sebep olmaktadır. Nötrino çeşni salınımları, deneysel olarak Güneş, atmosfer ve reaktör kaynaklarından çıkan nötrino analizleri sonucu birçok kez ispatlanmış ve salınım parametreleri de ölçülmüştür [1]. Bu salınımlar birçok kökleşmiş düşüncemizi değiştirmemize sebep olmaktadır. Örneğin, beta bozunumunun sonucunda ortaya çıkan elektron nötrinosunun çeşnisi belli olmasına rağmen, kütlesi üç farklı kütle öz durumunun bir süperpozisyonu olur. Salınımlar, ilk bakışta enerji momentum korunumuna karşı gibi gözüксе de aslında "elektron nötrinosunun kütlesi" olarak adlandıracağımız kesin bir değerin olmadığı anlamına gelir. Bu sebepten dolayı beta bozunumunda ortaya çıkan elektron nötrinosu, enerji momentum korunumunu ilkesini bozmadan müon nötrinosuna geçiş yapabilir. İşte bu özellik daha önceden kuarklar için bilinen bir özelliğin benzerinin nötrinolarda karşılık bulunduğu haldir [2].

Nötrinoların etkileşim tesir kesitlerinin çok küçük olduğunu bilinmektedir. Ancak yüksek nötrino yoğunluğu olan çekirdek çökmeli süpernova patlamaları gibi uç durumlarda, nötrino-nötrino etkileşimleri önem kazanır. Çok yüksek nötrino yoğunluklu astrofiziksel ortamlarda, nötrino öz-etkileşimini göz önüne almamız gerekmektedir [3]. Bu etkileşim terimi Hamiltonyen'e diyagonal olmayan bir katkı getirdiği için nötrinoların çeşnilerinde değişikliğe sebep olmaktadır. Böylelikle süpernova dinamikleri veya patlama sonrası ağır maddelerin oluşumu gibi konularda belirleyici etkide bulunurlar. Nötrino öz-etkileşimi, şekil 1.1 görüldüğü üzere, iki nötrinonun birbirleriyle saçılmasıyla olur. Bu saçılma, temel olarak iki farklı Feynman diyagramı ile tasvir edilebilir [4]. Bu diyagramlardan biri momentumlarının değişmediği ileri saçılma diyagramıdır. Diğeri ise gelen nötrinoların momentumlarının yer değiştirdiği, değiş-tokuş diyagramıdır.



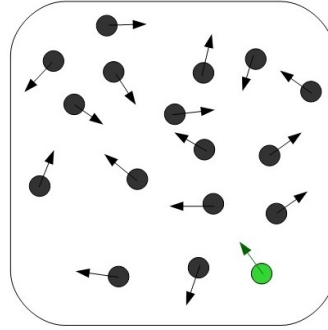
(a) Nötrino Öz-Etkileşimi, İleri Saçılma Diyagramı.



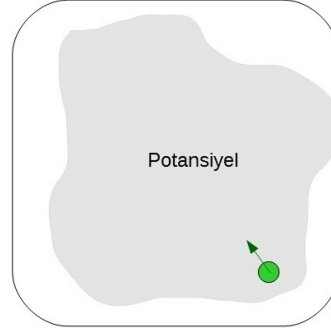
(b) Nötrino Öz-Etkileşimi, Değiş-Tokuş Diyagramı.

Şekil 1.1: (a) diyagramında, gelen nötrinolar momentumunu değiştirmeden saçılmışlardır. (b) diyagramında ise gelen nötrinolar momentumlarını değiş-tokuş ederek saçılmışlardır. Parçacıklar özdeş oldukları için (b) diyagramını da göz önüne almamız gerekmektedir.

Yoğun nötrino gazı için, hareket denklemlerini çözmek çok zordur. Çünkü nötrino öz-etkileşim terimi, bütün nötrinoların davranışlarının toplamı ile orantılıdır. Bunun gibi çok parçacıklı sistemleri çözebilmek için çeşitli yaklaşımlar kullanılır. Bu tez çalışmasında kullanılacak yöntem, ortalama alan yaklaşımıdır (OAY.) Bu yaklaşıklık sayesinde, birbirleri ile etkileşen çok parçacıklı sistemi, her bir parçacığı, diğerlerinin oluşturduğu ortalama bir potansiyel ile etkileştirerek çözüm elde edebiliriz, şekil 1.2. Çözümü aranan denklemler bu yaklaşıklığı yapmaya uygun denklemlerdir.



(a) Çok Parçacıklı Sistem

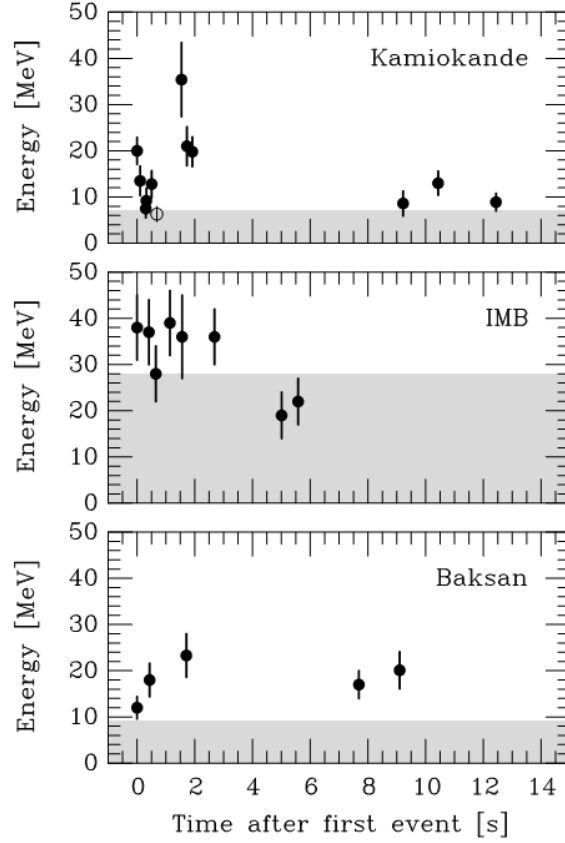


(b) OAY Yapılan Sistem

Şekil 1.2: Şekil (a)'da çok parçacıklı sistem kabaca resmedilmiştir. Burada yeşil parçacık bütün parçacıklarla ayrı ayrı etkileşmektedir. Aynı zamanda her parçacık da diğerleriyle etkileşmektedir. Şekil (b)'de ise yeşil parçacık, diğer parçacıkların oluşturduğu zamanla değişen ortalama bir potansiyel ile etkileşmektedir.

Etrafımızdaki nötrinoların birçoğu Büyük Patlamadan çok kısa bir süre sonra uzaya yayılan nötrinolar, bir diğer deyişle kozmik nötrino arka planı oluşturan nötrinolardır. Aynı zamanda çekirdek çökmeli süpernovalarda ve karadelik birikme (accretion) disklerinde önemli miktarda nötrino çıktığı düşünülmektedir [5]. 1987 yılında Büyük Macellan bulutunun içinde bir süpernova patlaması gerçekleşmişti. Proton bozunma deneylerini sürdüren ve patlamadan iki ay önce nötrino yakalama moduna geçen Kamiokande deneyinde, nötrino arka planında beklenmedik bir artış gözlemlenmişti [6].

Kamiokande deney verileri, IMB ve Baksan deneyleri ile de desteklenmiştir. İşte bu süpernova patlaması, uzaydan gelen nötrinoların özellikleri hakkında merak uyandırmıştır ve aktif olarak çalışmaya başlanmıştır. SN 1987A adlı bu süpernovadan gelen nötrinoların sayısı, istatistiksel veri bakımından çok düşüktür.



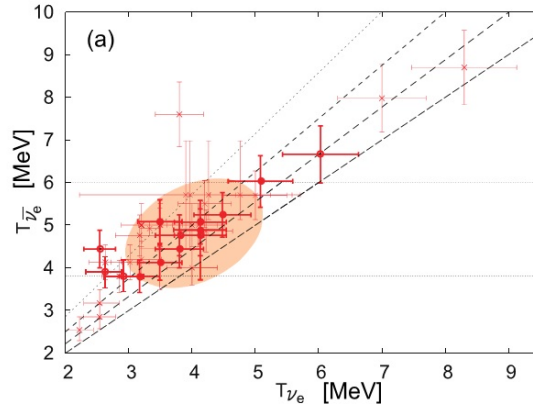
Şekil 1.3: SN 1987A süpernovasından çıkan nötrinoların enerji-zaman grafikleri. Başlangıç zamanı ilk alınan olaya sabitlenmiştir. Burada gri olarak görülen kısım, tetikleme veriminin (trigger efficiency) %30'dan düşük olan kısımdır. [7].

Süpernova patlamalarından önce, çok yüksek iç enerjileri ve basınçlarından dolayı yıldız bileşenleri füzyon tepkimesine uğrar. Bu füzyon enerjisini dengede tutan mekanizma da kütle çekim alanıdır. Füzyon tepkimesi hidrojenден sırasıyla, helyum, karbon, neon, oksijen ve silisyum oluşturur. Genç yıldızlarda hidrojen bolluğu vardır ve yaşamının ilerleyen zamanlarında hidrojenin büyük bir çoğunluğu helyuma dönüşür ve füzyon tepkimesi bu şekilde devam eder. Hayatlarının sonlarına doğru hidrojen miktarı azalır, görece ağır metallerin miktarları artar ve bu zincirleme tepkime demirde sonlanır. Demire kadar olan süreçte tepkimeler kendiliğinden olurken, demirin füzyon tepkimesi sonucunda açığa çıkan enerji, zincirleme tepkime için yeterli değildir. Bir diğer değişle demiri oluşturan füzyon tepkimesi sonucunda açığa çıkan enerji, demir çekirdeğinin bağlanma enerjisinden düşüktür. Demir, yıldızda en ağır element olduğu için çekirdeğe doğru gider. Çekirdeğin etrafında ise silikon tabaka füzyon tepkimesine devam edip demir oluşturmaya devam ederek çekirdeği büyütür. Çekirdek ise Chandrasekhar kütle limitine ($1.44 M_{\odot}$) ulaştığında elektron dejenere basıncı, kütle çekime karşı dayanamaz ve patlama gerçekleşir. Bu patlama ile merkezde proto-nötron yıldızı

(PNY) kalır ve etrafındaki bütün madde uzaya çok hızlı bir şekilde yayılır. Patlama çok kısa süre aralığında gerçekleşir ve açığa çıkan enerjiyle, ağır elementlerin (kütle numarası demirden büyük olan elementler) oluştuğu düşünülmektedir.

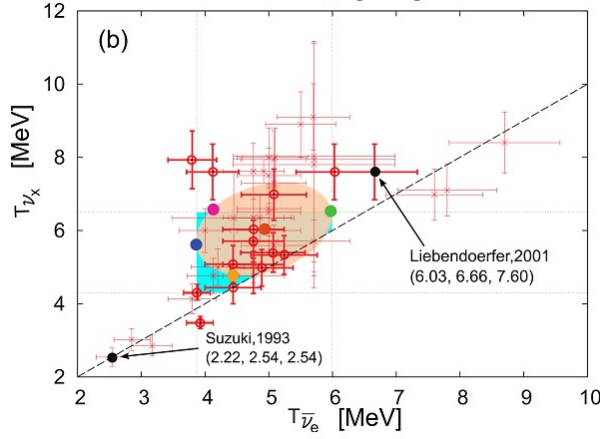
Süpernova patlamasından bir süre önce, merkezdeki PNY'nin yoğunluğu neredeyse nükleer yoğunluk (10^{12} g/cm³) kadar olur [8]. PNY'nin içinde bulunan her madde gibi nötrinolar da burada tuzaklanır ve termal dengeye gelir. Termal dengedeki nötrinolar patlama anında dışarı salınır ve nötrino parlaklıklarının 10^{53} erg/s mertebesinde olduğu tahmin edilmektedir [8]. İşte bu patlamalardan çıkan nötrinoların sıcaklıkları veya bir diğer değişle ortalama kinetik enerjileri de kullanılan modele bağlıdır. Aynı zamanda bu sıcaklıklar, nötrinoların termal dengeden çıktığı yere de bağlıdır. Protonötron yıldızının içerisinde (anti)nötrinolar çeşnilerine göre farklı noktalarda ayrışır (decouple). Bu da (anti)nötrinoların PNY'den çıktığındaki sıcaklıklarında önemli bir farklılık yaratır. Kısaca özetlemek gerekirse elektron nötrinosu ve anti-nötrinosu PNY'nin içinde hem yüklü akım hem de yüksüz akım etkileşimine girerler. Bunun yanında müon ve tau nötrino ve anti-nötrinoları sadece yüksüz akım etkileşimine girerler [9]. Böylelikle elektron (anti)nötrinoları daha geç ayrışır ve sıcaklıkları veya bir diğer değişle ortalama kinetik enerjileri daha düşük olur. Elektron anti-nötrinosunun tesir kesiti elektron nötrinosundan küçük olduğu için elektron anti-nötrinoları da görece olarak biraz daha sıcak kalabilir. Çekirdekte çıkan nötrinoların başlangıç sıcaklıklarını $\langle E_{\nu_e} \rangle < \langle E_{\bar{\nu}_e} \rangle < \langle E_{\nu_x} \rangle = \langle E_{\bar{\nu}_x} \rangle$ şeklinde sıralayabiliriz.

Süpernova modellerindeki $T_{\nu_e}, T_{\bar{\nu}_e}, T_{\nu_x}$ karşılaştırmaları (x burada müon veya tau olabilir) [10] referansında ayrıntılı olarak verilmiştir.



Şekil 1.4: Çeşitli süpernova modellerinde alınan T_{ν_e} Ve $T_{\bar{\nu}_e}$ sıcaklıklar görülmektedir. Yatay kesikli çizgiler $T_{\bar{\nu}_e}$ sıcaklığının üst ve alt limitini göstermektedir. Ortadaki düz kesikli çizgiler $T_{\bar{\nu}_e}/T_{\nu_e} = 1/1.0, 1/0.9, 1/0.8, 1/0.7$ oranlarını veren çizgilerdir. Hata barlar, ortalama $\pm\%10$ olarak verilmiştir. Bu şekil [10] makalesinden alınmıştır.

Şekil 1.4 ve şekil 1.5 grafiklerinden göreceğimiz üzere, simülasyon modellerine göre sıcaklıklar farklı olabilmektedir. Bu grafiklerde her bir nokta, ayrı bir simülasyonda kullanılan sıcaklık değerlerini göstermektedir. Her iki grafikte de yavruağzı renginde olan kısım $\pm 1 \sigma$ belirsizliğe sahip sıcaklıkları göstermektedir. Hata barları ise nötrinoların, patlama sırasında geçen süredeki sıcaklıklarının belirsizliğini göstermektedir. 1.4 numaralı şekilden anlayacağımız üzere $T_{\bar{\nu}_e}, T_{\nu_e}$ sıcaklığından biraz fazladır. Bu da



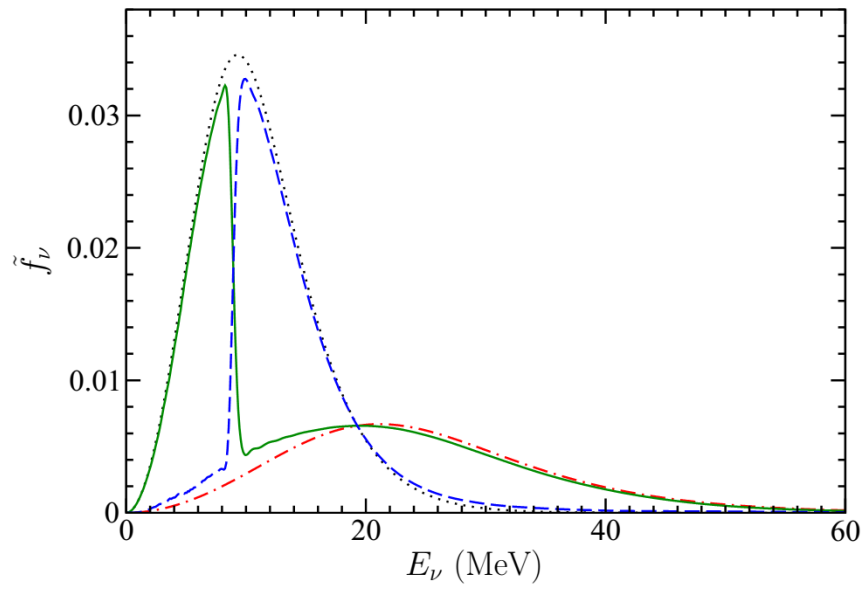
Şekil 1.5: Çeşitli süpernova modellerinde alınan T_{ν_x} ve $T_{\bar{\nu}_e}$ sıcaklıkları görülmektedir. Dikey kesikli çizgiler $T_{\bar{\nu}_e}$ sıcaklığının üst ve alt limitini göstermektedir. Ortadaki düz kesikli çizgi $T_{\nu_x}/T_{\bar{\nu}_e} = 1$ oranını veren çizgidir. Hata barlar, ortalama $\pm\%10$ olarak verilmiştir. Bu şekil [10] makalesinden alınmıştır.

yukarıda açıkladığım sebepten dolayıdır. Şekil 1.5 grafiğine baktığımızda ise ortalama olarak T_{ν_x} sıcaklığının $T_{\bar{\nu}_e}$ sıcaklığından yüksek alındıklarını görebiliyoruz. Kesin değerler ve daha ayrıntılı inceleme için [10] kaynağındaki Tablo 1, Tablo 2 ve Tablo 3'e bakınız.

Çekirdekten çıkan nötrinolar yaklaşık 200 km boyunca kendileriyle etkileşmeye devam ederler, ancak geometrik olarak, PNY'den uzaklaştıkça yoğunluk düşer ve nötrinoların öz-etkileşimi azalır. Bu mesafeyi kat eden nötrinoların akı - enerji grafiğini sayısal analiz ile elde ettiğimizde spektrumda bir değişim görürüz. Duan ve diğerleri, [11] makalesinde ilk defa sayısal modelleme ile nötrinoların spektrumlarında şekil 1.6 gibi bir ayrılma elde etmişlerdir. Birçok model ile yapılan nötrino öz-etkileşim simülasyonlarında, nötrino ve anti-nötrinoların enerji dağılımında spektral ayrılma (literatürde "spectral split" veya "spectral swap" ismiyle geçer) meydana gelmektedir, [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19].

Bu tezin konusu değişik başlangıç koşulları için (sıcaklık, akı, istatistiksel dağılım, hiyerarşi ve salınım açıları) farklı yapıda ve enerjilerde spektral ayrışmaları incelemektir.

Tez temel olarak 4 kısıma ayrılmıştır. İlk bölüm giriş kısmıdır. İkinci bölüm ise kuantum alan teorisinin temellerinden oluşur. Üçüncü bölümde ise nötrino fiziğinin kısa bir tarihi verildikten sonra, nötrinoların boşluk salınımlarından bahsedilmiştir. Ardından daha kolay ve sade olan iki çeşnili nötrinolardan bahsedilmiştir. Burada polarizasyon vektörü ve çok-parçacık denklem çözme yöntemi olan ortalama alan yaklaşımı işlenmiştir. Sonrasında üç çeşnili nötrinoların uyduğu denklemler, yoğunluk matrisi formalizmi ile yazılmıştır. Denklemlerin çözümü ile elde edilen grafikler ve yorumları da sonuçlar bölümünde verilmiştir.



Şekil 1.6: Grafikte dikey eksen akıyı gösterirken yatay eksen enerjiyi göstermektedir. Grafikte noktalı (siyah) ve nokta kesikli çizgiler (kırmızı) elektron ve tau nötrinolarının başlangıçtaki dağılımlarını vermektedir. Sürekli (yeşil) ve kesikli (mavi) çizgiler ise nötrinoların 250 km mesafe katettikten sonraki spektral çizgileridir. Yaklaşık 9MeV civarında spektrumda bir ayrışma meydana gelmiş ve çeşniler arasında bir geçiş olmuştur [11].

2 KUANTUM ALAN TEORİSİ

2.1 DIRAC DENKLEMİ VE ÇÖZÜMLERİ

Dirac denklemini yazalım.

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

Dirac denkleminin çıkartılmasını ekler bölümünde bulabilirsiniz. Denklemi, soldan $(-i\cancel{\partial} - m)$ ile çarpalım.

$$(\cancel{\partial}\cancel{\partial} + im\cancel{\partial} - im\cancel{\partial} + m^2)\psi(x) = 0 \quad (2.2)$$

$\cancel{\partial}\cancel{\partial} = \gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \square$ şeklinde alalım.

$$(\square + m^2)\psi(x) = 0 \quad (2.3)$$

Dirac denkleminin çözümleri aynı zamanda zamanda Klein-Gordon denkleminin de çözümüdür. O halde boşluk çözümlerini düzlem dalgalar şeklinde ikiye ayırabiliriz.

$$\psi^+(x) = u(p)e^{-ip \cdot x} \quad (2.4)$$

$$\psi^-(x) = v(p)e^{ip \cdot x} \quad (2.5)$$

$\psi^+(x)$ pozitif enerji $p^0 > 0$ çözümleridir. $\psi^-(x)$ negatif enerji $p^0 < 0$ çözümleridir. Dirac denkleminde bu ifadeleri yerine koyarsak, momentum uzayında şöyle yazılır.

$$(\cancel{p} - m)u(p) = 0 \quad (2.6)$$

$$(\cancel{p} + m)v(p) = 0 \quad (2.7)$$

Serbest parçacık denklemini çözerken durağan gözlem çerçevesine (frame) geçebiliriz. Böylelikle momentum vektörünü $\vec{p} = \vec{0}$ şeklinde alabiliriz. 4-momentum durağan gözlem çerçevesinde şöyle yazılır.

$$P^\mu = (m, \vec{0}) \equiv P_{dur} \quad (2.8)$$

(2.6) ve (2.7) denklemlerini durağan gözlem çerçevesinde yazalım.

$$(m\gamma^0 - m\mathbb{1})u(P_{dur}) = 0 \quad (2.9)$$

$$(m\gamma^0 + m\mathbb{1})v(P_{dur}) = 0 \quad (2.10)$$

Gamma matrislerinin herhangi bir temsilini kullanarak çözüm bulmak mümkün. Bu çalışmada kiral temsiller kullanılacaktır [20]. Bu kiral temsiller şu şekildedir.

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Önce u spinörünün çözümlerine bakalım. (2.9) denkleminin matris temsilini yazalım.

$$m \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} u(P_{dur}) = 0 \quad (2.13)$$

$u(P_{dur})$ spinörünün çözümlerini bulabiliriz.

$$u(P_{dur}) = \sqrt{m} \begin{bmatrix} \zeta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Burada $\sqrt{m}$ katsayısı bir normalizasyon seçimidir [20]. Bu ileride normalizasyon koşulunu değiştirecektir. Eğer ζ spinörlerini $\zeta^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\zeta^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bazında seçersek 2 tane lineer bağımsız çözüm elde edilir.

$$u^\alpha(P_{dur}) = \begin{bmatrix} \zeta^\alpha \\ \zeta^\alpha \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Burada $\alpha = 1, 2$ değerlerini alabilir. Durağan gözlem çerçevesinden, laboratuvar gözlem çerçevesine geçmek için u^α spinörünü "boost" etmemiz gerekir (boost kelimesinin Türkçe karşılığı itelemek, arttırmak şeklindedir ancak bu kelimeler kafa karışıklığına yol açar.) Herhangi bir momentuma sahip $u(\vec{p})$ spinörünü elde etmek için durağan gözlem çerçevesindeki çözümü konum-zaman düzleminde "döndürelim".

$$u^\alpha(p) = \exp\{-iS^{0i}w_{0i}\}u^\alpha(P_{dur}) \quad (2.16)$$

Burada $S^{\mu\nu}$ dönme ve boost üretici ve $w_{\mu\nu}$ Lorentz dönüşüm parametresidir. P momentumunun Lorentz boost dönüşümü aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} E \\ P^3 \end{bmatrix} = P'^\mu = \Lambda'^\mu{}_\nu (P_{dur})^\nu \quad (2.17)$$

$$(P_{dur})^\nu = \begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Lorentz dönüşüm matrisini $t-z$ düzleminde seçelim. O halde Lorentz dönüşüm matrisi şöyle olur.

$$\Lambda'^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \cosh \eta & 0 & 0 & \sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \eta & 0 & 0 & \cosh \eta \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Bu matris $t-z$ düzleminde zamansal dönmeye (boost) karşılık gelir. η çabukluk (rapidity) parametresidir. Dönüşüm matrisini (2.17) denkleminde yerine koyalım.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E \\ P^3 \end{bmatrix} &= \left(\cosh \eta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sinh \eta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m \cosh \eta \\ m \sinh \eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

"z" yönünü seçtiğimiz için S^{0i} matrisi S^{03} şeklini alır.

$$S^{03} = -\frac{i}{2} \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

O halde $u(\vec{p})$ spinörünün çözümünü elde edebiliriz. (2.16) denkleminde (2.1) ve (2.21) bağıntılarını yerine koyalım.

$$u^\alpha(p) = \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{bmatrix} \eta \right) \right\} u^\alpha(P_{dur}) \quad (2.22)$$

Bu denklemi Taylor serisine açıp, (2.20) bağıntısında yerine koyalım.

$$u^\alpha(p) = \begin{bmatrix} \zeta^\alpha \sqrt{\sigma \cdot P} \\ \zeta^\alpha \sqrt{\bar{\sigma} \cdot P} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Benzer olarak $v^\alpha(P)$ denklemi de şu şekilde olur.

$$v^\alpha(\vec{p}) = \begin{bmatrix} \eta^\alpha \sqrt{\sigma \cdot P} \\ -\eta^\alpha \sqrt{\bar{\sigma} \cdot P} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Burada Peskin - Schroeder'in [20] kitabındaki notasyon kullanılmıştır. σ ve $\bar{\sigma}$ ifadeleri 4 bileşenlidir ve $\sigma \equiv (\mathbb{1}, \sigma^i)$ ve $\bar{\sigma} \equiv (\mathbb{1}, -\sigma^i)$ şeklinde tanımlıdır. Aynı zamanda η^α ise $v^\alpha(P)$ spinörünü açtığımız bazdır ve benzer olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\eta^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \eta^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Matrislerin karekökü ($\sqrt{\sigma \cdot P}$) ise $\sigma \cdot P$ matrislerinin çarpımından oluşan matrisin öz-değerlerinin kökü demektir. Sadece $u^\alpha(P)$ spinörünü açıkça yazalım.

$$u^\alpha(p) = \begin{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{E - P_3} & 0 \\ 0 & \sqrt{E + P_3} \end{pmatrix} \zeta^\alpha \right) \\ \left(\begin{pmatrix} \sqrt{E + P_3} & 0 \\ 0 & \sqrt{E - P_3} \end{pmatrix} \zeta^\alpha \right) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Son olarak normalizasyon koşulunu da yazalım. Biliyoruz ki $u^\dagger u$ bağıntısı Lorentz değişmezi (invariant) değildir.

$$\bar{u}^\alpha(p) u^\beta(p) = 2m \delta^{\alpha\beta} \quad (2.27)$$

$$\bar{v}^\alpha(p) v^\beta(p) = -2m \delta^{\alpha\beta} \quad (2.28)$$

Daha önce bahsettiğim (2.14) bağıntısındaki kütle terimi, normalizasyonda kendisini göstermiştir.

2.2 DIRAC LAGRANJİYEN'İ VE DIRAC HAMILTONYEN'İ

Dirac denklemini veren Lagranjiyen yoğunluğu şu şekildedir.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi \quad (2.29)$$

Görelî Euler-Lagrange Hareket denklemlerinde (2.29) ifadesini koyalım.

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \quad (2.30)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \quad (2.31)$$

(2.31) denklemi bize Dirac denklemini (C.6) verir. (2.30) denklemini kullanalım.

$$(i\partial + m)\bar{\psi} = 0 \quad (2.32)$$

Bu denklem anti-fermiyonların uyduğu denklemdir.

Bazı kitaplarda [21], Dirac Lagranjiyen yoğunluğu $\bar{\psi}(i\overleftrightarrow{\partial} - m)\psi$ şeklinde yazılır. Burada $\overleftrightarrow{\partial} \equiv \frac{\vec{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu}{2}$ şeklinde tanımlanır ve buradan da aynı hareket denklemlerini elde etmek mümkündür. Anti-fermiyonların uyduğu denklem, Dirac denkleminin sanal eşleniği (complex conjugate) alınarak da bulunur. Yani bu iki denklem bağımsız değildir. Eğer bağımsız almak istersek $\overleftrightarrow{\partial}$ notasyonda yazmak daha doğru olur.

Konjuge momentumları tanımlayalım.

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0 \quad (2.33)$$

$$\bar{\Pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0 \quad (2.34)$$

Legendre dönüşümünü kullanıp Lagranjiyen'den Hamiltonyen formalizmine geçelim.

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\psi} + \bar{\Pi}\dot{\bar{\psi}} - \mathcal{L} \quad (2.35)$$

$$= -i\bar{\psi}\gamma^i\partial_i\psi + m\bar{\psi}\psi \quad (2.36)$$

Öyle ki $i = 1, 2, 3$ değerlerini alabilir. Hamiltonyen yoğunluğu $\mathcal{H}$ 'yi, alanlar cinsinden

bulduktan sonra Hamiltonyen'i elde edelim.

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \quad (2.37)$$

$$= \int d^3x \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i \psi + m) \psi \quad (2.38)$$

$$= \int d^3x \psi^\dagger \gamma^0 (-i\gamma^i \partial_i \psi + m) \psi \quad (2.39)$$

Şimdi fermiyonik kuantizasyon yapalım. Çözümleri düzlem dalgalar cinsinden açalım.

$$\psi(x) = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\alpha=1}^2 (a_{\vec{p}}^\alpha u^\alpha(p) e^{ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} v^\alpha(p) e^{-ip \cdot x}) \quad (2.40)$$

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\alpha=1}^2 (a_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} u^{\alpha\dagger}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^\alpha v^{\alpha\dagger}(p) e^{ip \cdot x}) \quad (2.41)$$

Çözümlere ek olarak $\gamma^0 \psi^\dagger \equiv \bar{\psi}$ bağıntısını da bulalım.

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\alpha=1}^2 (a_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} \bar{u}^\alpha(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^\alpha \bar{v}^\alpha(\vec{p}) e^{ip \cdot x}) \quad (2.42)$$

Burada $a^\dagger, b^\dagger$ ve a, b operatörleri sırasıyla parçacık yaratma ve parçacık yok etme operatörleridir. $u(p)$ ve $v(p)$ spinörleri ise daha önce bulduğumuz Dirac denklemlerinin çözümleridir. Yaratma, yok etme operatörleri için anti-komütatör bağıntısı yazılır.

$$\{a_{\vec{p}}^\alpha, a_{\vec{q}}^{\beta\dagger}\} = \delta_{\vec{p}\vec{q}} \delta^{\alpha\beta} \quad (2.43)$$

$$\{b_{\vec{p}}^\alpha, b_{\vec{q}}^{\beta\dagger}\} = \delta_{\vec{p}\vec{q}} \delta^{\alpha\beta} \quad (2.44)$$

Yukarıda yazılan bağıntılar dışındaki diğer kombinasyonlar sıfır değerini alır. Fermiyonik alanlar ise aşağıdaki anti-komütatör bağıntılarını sağlarlar.

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta^\dagger(\vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta} \quad (2.45)$$

$$\{\psi_\alpha^\dagger(\vec{x}), \psi_\beta^\dagger(\vec{y})\} = 0 \quad (2.46)$$

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta(\vec{y})\} = 0 \quad (2.47)$$

ψ ve $\bar{\psi}$ alanlarının momentum uzayında yazdığımız (2.40) ve (2.42) ifadelerini kulla-

nalım.

$$(-i\gamma^i\partial_i + m)\psi(x) = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\alpha=1}^2 \left[a_{\vec{p}}^{\alpha}(m - \gamma^i p_i)u^{\alpha}(p)e^{ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{\alpha\dagger}(m + \gamma^i p_i)v^{\alpha}(p)e^{-ip \cdot x} \right] \quad (2.48)$$

Yukarıdaki fazlardan negatiflik, Minkowski metriğin uzay kısmını negatif almamızdan kaynaklanır ($\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$). Yani $\vec{p} \cdot \vec{x} = \sum_i p^i x^i = -x^i p_i$ şeklinde gelir. Ayrıca bu ifadede $(m - \gamma^i p_i)u^{\alpha}(p)$ ve $(m + \gamma^i p_i)v^{\alpha}(p)$ kısımları Dirac denkleminin çözümleridir.

$$(\gamma^{\mu}p_{\mu} - m)u(p) = 0 \quad (2.49)$$

$$(\gamma^{\mu}p_{\mu} + m)v(p) = 0 \quad (2.50)$$

Bu denklemleri açıkça yazalım.

$$(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - m)u(p) = 0 \quad (2.51)$$

$$(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i + m)v(p) = 0 \quad (2.52)$$

O halde aradığımız kısımlar şu şekilde yazılır.

$$\gamma^0 p_0 u(p) = (m - \gamma^i p_i)u(p) \quad (2.53)$$

$$-\gamma^0 p_0 u(p) = (m + \gamma^i p_i)v(p) \quad (2.54)$$

Şimdi (2.48) denkleminde bulduğumuz ifadeleri yerine koyalım. ($p_0 \equiv E_p$)

$$(-i\gamma^i\partial_i + m)\psi(x) = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{E_p}{2}} \sum_{\alpha=1}^2 \gamma^0 [a_{\vec{p}}^{\alpha}u^{\alpha}(p)e^{ip \cdot x} - b_{\vec{p}}^{\alpha\dagger}v^{\alpha}(p)e^{-ip \cdot x}] \quad (2.55)$$

Hamiltonyen yoğunluğu $\mathcal{H} = \bar{\psi}(-i\gamma^i\partial_i + m)\psi$ şeklinde yazabiliriz. (2.55) denkle-

mine $\bar{\psi}$ alanını da ekleyip uzay üzerinden integral alalım.

$$H = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{q}} \int d^3x \sqrt{\frac{E_p}{4E_q}} \sum_{\alpha, \beta} [a_{\vec{q}}^{\beta\dagger} u^{\beta\dagger}(q) e^{-iq \cdot x} + b_{\vec{q}}^{\beta} v^{\beta\dagger}(q) e^{iq \cdot x}] \times$$

$$[a_{\vec{p}}^{\alpha} u^{\alpha}(p) e^{ip \cdot x} - b_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} v^{\alpha}(p) e^{-ip \cdot x}] \quad (2.56)$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{q}} \int d^3x \sqrt{\frac{E_p}{4E_q}} \sum_{\alpha, \beta} \left[a_{\vec{q}}^{\beta\dagger} a_{\vec{p}}^{\alpha} [u^{\beta\dagger}(q) \cdot u^{\alpha}(p)] e^{-ix \cdot (q-p)} \right.$$

$$- a_{\vec{q}}^{\beta\dagger} b_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} [u^{\beta\dagger}(q) \cdot v^{\alpha}(p)] e^{-ix \cdot (q+p)}$$

$$+ b_{\vec{q}}^{\beta} a_{\vec{p}}^{\alpha} [v^{\beta\dagger}(q) \cdot u^{\alpha}(p)] e^{ix \cdot (q+p)}$$

$$\left. - b_{\vec{q}}^{\beta} b_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} [v^{\beta\dagger}(q) \cdot v^{\alpha}(p)] e^{ix \cdot (q-p)} \right] \quad (2.57)$$

Hamiltonyen'deki integralleri almamız gerekmektedir. Bu integraller ve bazı kullanışlı özellikler şunlardır:

$$\int_V d^3x e^{i\vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{q})} = V \delta_{\vec{p}, \vec{q}} \quad (2.58)$$

$$\delta_{\vec{p}, \vec{q}} = \delta_{\vec{q}, \vec{p}} \quad (2.59)$$

O halde (2.57) denklemi şu hale gelir.

$$H = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left[a_{\vec{p}}^{\beta\dagger} a_{\vec{p}}^{\alpha} [u^{\beta\dagger}(p) \cdot u^{\alpha}(p)] \right.$$

$$- a_{\vec{p}}^{\beta\dagger} b_{-\vec{p}}^{\alpha\dagger} [u^{\beta\dagger}(p) \cdot v^{\alpha}(-p)]$$

$$+ b_{\vec{p}}^{\beta} a_{-\vec{p}}^{\alpha} [v^{\beta\dagger}(p) \cdot u^{\alpha}(-p)]$$

$$\left. - b_{\vec{p}}^{\beta} b_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} [v^{\beta\dagger}(p) \cdot v^{\alpha}(p)] \right] \quad (2.60)$$

Bazı terimlere, " p " yerine " $-p$ " gelmesinin sebebi, Dirac delta fonksiyonun $\delta(p + q)$ şeklinde gelmesidir. Son olarak aşağıdaki özellikleri (normalizasyon ve diklik koşul-

ları) kullanacağız.

$$\begin{aligned}
u^{\alpha\dagger}(p) \cdot u^{\beta}(p) &= \begin{pmatrix} \zeta^{\alpha\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} & \zeta^{\alpha\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \zeta^{\beta} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \zeta^{\beta} \end{pmatrix} \\
&= \zeta^{\alpha\dagger} (p \cdot \sigma^{\beta}) + \zeta^{\alpha\dagger} p \cdot \bar{\sigma} \zeta^{\beta} = 2\zeta^{\alpha\dagger} p_0 \zeta^{\beta} \\
u^{\alpha\dagger}(p) \cdot u^{\beta}(p) &= 2p_0 \delta^{\alpha\beta} \tag{2.61}
\end{aligned}$$

$$v^{\alpha\dagger}(p) \cdot v^{\beta}(p) = 2p_0 \delta^{\alpha\beta} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}
u^{\alpha\dagger} \cdot v^{\beta}(-p) &= \begin{pmatrix} \zeta^{\alpha\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma} & \zeta^{\alpha\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^{\beta} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^{\beta} \end{pmatrix} \\
&= \zeta^{\alpha\dagger} \sqrt{(p \cdot \sigma)(p \cdot \sigma)} \eta^{\beta} - \zeta^{\alpha\dagger} \sqrt{(p \cdot \bar{\sigma})(p \cdot \bar{\sigma})} \eta^{\beta} \\
u^{\alpha\dagger}(p) \cdot v^{\beta}(-p) &= 0 \tag{2.63}
\end{aligned}$$

$$v^{\alpha\dagger}(p) \cdot u^{\beta}(-p) = 0 \tag{2.64}$$

Yukarıdaki denklemlerde $(p \cdot \sigma)(p \cdot \sigma) = (p_0 + p_i \sigma^i)(p_0 + p_i \sigma^i) = p_0^2 + \vec{p}^2$ şeklinde yazabiliriz. Bulduğumuz sonuçları (2.60) denkleminde yerine koyalım.

$$H = \sum_{\vec{p}} E_p \sum_{\alpha} \left(a_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} a_{\vec{p}}^{\alpha} - b_{\vec{p}}^{\alpha} b_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} \right) \tag{2.65}$$

$$= \sum_{\vec{p}} E_p \sum_{\alpha} \left(a_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} a_{\vec{p}}^{\alpha} + b_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} b_{\vec{p}}^{\alpha} + (2\pi)^3 \delta(0) \right) \tag{2.66}$$

Sonsuz boşluk enerjisini $\delta(0)$ ihmal edersek Dirac Hamiltonyen'i şöyle yazılır.

$$H = \sum_{\vec{p}} E_p \sum_{\alpha} \left(a_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} a_{\vec{p}}^{\alpha} + b_{\vec{p}}^{\alpha\dagger} b_{\vec{p}}^{\alpha} \right) \tag{2.67}$$

3 NÖTRİNO FİZİĞİ

3.1 TARİHÇE

Rutherford, 1899 yılında iki çeşit radyasyon olduğunu gösterdi. Bunlardan biri alfa diğeri ise beta radyasyonları idi. Daha sonradan Curie, beta bozunumunun çekirdeğin elektron yayması olduğunu keşfetti.

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- \quad (3.1)$$

Ancak daha sonradan yapılan deneylerde, beta bozunumu sonucunda çıkan elektronun enerji spektrumu sürekli dağılım gösterdiği ölçülüyordu. Bunun olmaması gerekmekeydi. Çünkü o yıllarda da çekirdeğin enerji seviyelerinin olduğu ve bunlar arasındaki geçişlerde enerjinin kesikli değerler alması gerektiği düşünülüyordu. Bohr, nükleer bozunmalarda enerji ve momentum korunumunun ancak istatistiksel olarak geçerli olabileceği yorumunu yaptı. Elektronun sürekli enerji dağılımı o zamanların en önemli sorunu haline geldi.

Bu soruna 1930 yılında, Wolfgang Pauli katılamadığı bir konferansa gönderdiği mektup ile çözüm getirdi [23]. Pauli'ye göre beta bozunumunun ürün parçacıklarında bir parçacık daha olmalıydı. Bu parçacığın spini $\frac{1}{2}$ ve elektriksel yük olarak da nötr olması gerekiyordu. Bu parçacık sayesinde, beta bozunumunun sürekli enerji dağılımını açıklanabiliyordu. Ancak Pauli'nin önerdiği bu parçacık, deneylerde doğrudan gözlemlenmiyordu. Bu yüzden madde ile etkileşim tesir kesiti çok düşük olmalıydı.

Bu savın ortaya atılmasından 3 yıl sonra, Solvay Konferansında bu parçacığa Nötrino ismi verilmişti. Bu "fazladan" parçacık hipotezi, gözlemsel sonuç alınmamasına rağmen araştırılmaya devam edildi. O sıralarda Enrico Fermi beta bozunumu için bir teori geliştirdi [24].

1956 yılında Fred Reines, Cleyde Cowan ve ekibi ilk kez nötrino gözlemi yaptıklarını duyurdular [25]. Çok yüksek miktarda radyoaktifliğin olduğu (Nükleer santrallerin yakını gibi) yerlerde ters beta bozunmasını kullanarak pozitron yakalamışlardı. Yani

$$\nu + p \rightarrow n + e^+ \quad (3.2)$$

tepkimesini gözlemlediklerini düşünüyorlardı. Burada (3.2) tepkimesinin de halen tam

olarak doğru bir tepkime olmadığını söyleyebiliriz. Öncelikle o dönemde anti parçacıklar bilinmiyordu. Buna ek olarak, Standart modelin öngördüğü parçacık aileleri bilinmediğinden tek çeşit nötrinolar olduğu varsayılıyordu. Doğru tepkime şu şekildedir.

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ \quad (3.3)$$

Günümüzde ters beta bozunumu (β^+) olarak bilinen bu tepkimenin deneyini yapan Reines ve Cowan'na, makalenin yayınlanmasından 40 sene sonra Nobel ödülü verilmiştir.

Nötrino salınım fikrini ilk ortaya atan kişi, 1957 yılında Pontecorvo'dur [26]. Pontecorvo, salınımları nötrino-antinötrino arasında önermişti ve motivasyonunu kaon-antikaon salınımlarından almıştı. Çeşni salınımlarının da olabileceğini Z. Maki, M. Nakagawa ve S. Sakata [27] 1967 yılında önermiştir.

Bu gelişmelerin akabinde, nötrinoları yakalayabilmek için bir çok deney düzenekleri kuruldu. Bunların bir çoğu, nötrino yakalamak için ters beta bozunumunu (3.3) baz alarak tasarlanmıştır. Deneyler, kabaca (3.3) tepkimesinde verilen bozunumun ürün parçacığı olan leptonun Cherenkov ışınmasını saptamak üzerine kuruludur. Ortaya çıkan leptonun cinsi ise gelen nötrininin çeşnisini belirlemektedir.

3.2 BOŞLUK SALINIMLARI KUANTUM MEKANİKSEL ÇIKARIMI

Nötrinoların kütlelerinin varlığı, çeşniler arasında geçişlere izin verir. Bu salınımlarını daha iyi anlamak için salınım geçiş olasılıklarını incelememiz gerekir. Bunun için α çeşnili bir nötrinoyu betimleyelim.

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (3.4)$$

U matrisi, iki tabanı ilişkilendirdiği için üniter olmalıdır. Yani $U_{k\alpha} U_{\alpha l}^* = \delta_{kl}$ bağıntısı sağlanmalıdır. Burada Yunan harfleri ile etiketli olanlar çeşni bazındaki, Latin harfleri ile etiketli olanlar ise kütle bazındaki öz durumlardır. U matrisi ise $|\nu_k\rangle$ kütle bazı ve $|\nu_\alpha\rangle$ çeşni bazı arasında geçişi veren matristir. U matrisi, bilinen 3 nötrino çeşnisi için boyutu 3x3 bir matris olmalıdır. Eğer üçten fazla çeşni (steril nötrino gibi) var ise, U dönüşüm matrisinin boyutu 3x3'ten büyük olabilir. Eğer doğada steril nötrinolar varsa veya laboratuvar da üretilirse, bildiğimiz standart model etkileşimlerine girmemesi beklenir. Çünkü standart modelde üç çeşit çeşni vardır ve bunların arasındaki etkileşimleri açıklar. Steril nötrinolar, kütle-çekim etkileşimlerine veya egzotik etkileşimlere girebilir.

U matrisinin üniterlik koşulunu şöyle yazabiliriz.

$$\langle \nu_k | \nu_j \rangle = \delta_{kj}, \quad \langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.5)$$

Şimdi nötrinoların zaman içinde evrimine bakalım. Ultra-görelî hızlarda yani $p \gg m$ limitte, Dirac denklemini Schrödinger-tip denklem ile betimleyebiliriz. Bunu göstereyim.

Nötrinolar spin- $\frac{1}{2}$ parçacıklardır ve Dirac denklemine uyarlar. Aynı zamanda Klein-Gordon denkleminin de çözümleridir. Tek bir kütle özdeğerinde bulunan Dirac spinörünün (ν_i), uyduğu denklemi yazabiliriz.

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m_i^2) \nu_i(x^\mu) = 0 \quad (3.6)$$

Yukarıdaki yazılan denklem tek parçacık içindir. Burada i etiketi birden üçe kadar gider. Üç kütle özdeğerleri ile yazdığımızda tek parçacık Klein-Gordon denklemini 3 nötrino için yazalım.

$$(\partial_\mu \partial^\mu - M^2) \Psi(x^\mu) = 0 \quad (3.7)$$

Burada M şöyle yazılır.

$$M^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

(3.7) denklemini kütle bazında yazdığımız gibi çeşni bazında da yazabiliriz. Bunun için kütle bazında yazdığımız spinörü (ν_i), çeşni bazında (ν_α) yazmamız gerekir. Bu dönüşümü (3.4) bağıntısı verir. Bir de kütle matrisinin M çeşni bazında nasıl yazıldığına bakmamız gerekmektedir. Onu ise (3.4) bağıntısında tanımladığımız üniter U matrisi cinsinden yazabiliriz.

$$M_{cesni}^2 = U M^2 U^\dagger \quad (3.9)$$

Şimdi nötrino alanını Ψ , düzlem dalgalar cinsinden açalım.

$$\Psi(x, t) = \Psi_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (3.10)$$

O halde Klein-Gordon denklemini şöyle yazabiliriz.

$$(\partial_t^2 + \vec{k}^2 + M^2) \Psi_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (3.11)$$

Burada önemli bir ayrıntıya değinmek istiyorum. Çeşni bazında olan spinörün zaman

kısmını düzlem dalgalar e^{-iwt} cinsinden açamayız. Çünkü dağılım (dispersion) bağıntıları $w_i^2 = \vec{k}^2 + m_i^2$ şeklinde yazılır. Nötrinoların eş zamanlı olarak sabitlenmiş (fixed) bir enerji ve momentum değeri yoktur.

Şimdi ultra-görelî limit, yani yüksek enerji için bazı yaklaşıklıklar yapacağım. Yüksek enerjilerde nötrinin momentumu, nötrino kütesinden çok çok büyüktür, $\vec{k} = |\vec{k}| \gg m_i$. Diğer yandan (3.11) denkleminin ilk iki terimi şu şekilde yazabiliriz.

$$(\partial_t^2 + \vec{k}^2) \approx (i\partial_t + k)(-i\partial_t + k) \quad (3.12)$$

Kütle bazında baktığımızda, ultra relativistik parçacıklar için $i\partial_t \rightarrow w_i \approx k$ yazabiliriz. O halde (3.11) denkleminin pozitif kısmını alalım.

$$[2k(-i\partial_t + k) + M^2]\Psi_k(t) = 0 \quad (3.13)$$

$$(3.14)$$

Bu bize şu bağıntıyı verir.

$$i\partial_t \Psi_k(t) = \left(k + \frac{M^2}{2k}\right) \Psi_k(t) \quad (3.15)$$

Yukarıda yazdığımız denklemin Schrödinger tipi bir denklem olduğunu, denklemi daha kapalı (compact) halde yazdığımızda görebiliriz.

$$i\partial_t \Psi_k(t) = H_k \Psi_k(t) \quad (3.16)$$

Burada $H_k \equiv \left(k + \frac{M^2}{2k}\right)$ şeklinde tanımlıdır.

Nötrinolar, Schrödinger-tipi bir denkleme uyarlar diyebiliriz. Biz önceki notasyona geri dönerek (3.16)'ı kütle bazında yazalım.

$$i \frac{d}{dt} |\nu_k(t)\rangle = H |\nu_k(t)\rangle \quad (3.17)$$

Kütle bazında yazdığımız öz durumunun zamanda evrimini düzlem dalga cinsinden açalım. Bu aynı zamanda Schrödinger denkleminin de çözümüdür.

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle \quad (3.18)$$

Burada başlangıçtaki nötrinoları $|\nu_k(t=0)\rangle \equiv |\nu_k\rangle$ şeklindedir. Çeşni bazında nötrino öz durumlarını şu şekilde yazabiliriz.

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle \quad (3.19)$$

$|\nu_k\rangle$ için bu bağıntının tersini kullanacağız.

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta} \left(\sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right) |\nu_\beta\rangle \quad (3.20)$$

Bu denklem bize $|\nu_\alpha\rangle \rightarrow |\nu_\beta\rangle$ geçiş olasılık genliğini verir. Nötrinoların salınımlarını veren terim, (3.20) denkleminde de görüleceği üzere U matrisidir. Bu U matrisinin üniter bir matris olduğunu hatırlatmakta fayda var. (3.20) denkleminde, hayatına $\beta = e, \mu, \tau$ çeşnisinde ve E_k enerjisinde başlayan bir nötrinin t süre sonra α çeşnisine geçişini veren öz durumları görünüyor. O halde α nötrinosundan β nötrinosuna geçiş olasılık genliği $A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)$ ve geçiş olasılığı $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)$ şu şekilde yazılır.

$$A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-iE_k t} \quad (3.21)$$

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) \equiv |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)|^2 = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t} \quad (3.22)$$

Nötrinoların tahmin edilen kütlelerinin elektron volt mertebesinde küçük olduğu düşünülmektedir. Ben bu tez çalışmada süpernova nötrinoları ile ilgileneceğim ki onların da enerjisi MeV seviyelerindedir. Nötrino kütlelerinin, momentumunun yanında çok küçük olduğunu varsayacağız. Yani $p \gg m$ limitini alabiliriz.

$$E_k = \sqrt{p^2 + m_k^2} \simeq p + \frac{m_k^2}{2p} \quad (3.23)$$

Nötrino enerjisine gelen katkıda, durgun kütlenin etkisini göz ardı edebiliriz. Yani $E = |\vec{p}|$ şeklinde yazılabilir. O halde enerji ifadesini yazalım.

$$E_k \simeq E + \frac{m_k^2}{2E} \quad (3.24)$$

Geçiş olasılığından da anlayabileceğimiz gibi nötrino salınımları için önemli olan enerji farklarıdır. Enerji farkları ise kütle farkları şeklinde yazılabilir.

$$E_k - E_j \simeq \frac{\delta m_{kj}^2}{2E} \quad (3.25)$$

Buradaki kütle farkları şu şekilde tanımlıdır.

$$m_{kj}^2 \equiv m_k^2 - m_j^2 \quad (3.26)$$

Yukarıdaki yaklaşıklıkları yaptıktan sonra geçiş olasılığını tekrardan yazalım.

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t, E)|^2 = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left\{-i \frac{\delta m_{kj}^2}{2E} t\right\} \quad (3.27)$$

Nötrino deneyleri için salınım frekansının zamana bağlı değil yola bağlı olması daha anlamlıdır. Nötrinolar ultra-görelî hızlarda hareket ettiği için, yani yani $p \gg m$ limitinde, t zaman boyutunu, L konum boyutu gibi düşünebiliriz. Böylelikle (3.27) denklemi şu şekle gelir.

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L) = |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E)|^2 = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left\{-i \frac{\delta m_{kj}^2}{2E} L\right\} \quad (3.28)$$

Yukarıdaki denklem, hayata α çeşni ile başlayan bir nötrinonun L kadar bir mesafe ilerledikten sonra β çeşniye geçiş olasılığını verir. Aynı zamanda α nötrinonun tekrar α nötrinosa dönüşmesi için gereken salınım mesafesi

$$L_{kj}^{sal} = \frac{4\pi E}{\delta m_{kj}^2} \quad (3.29)$$

şeklinde. Salınım için (3.28) denkleminde söyleyebiliriz ki, salınımlar kütle farkına, nötrinonun enerjisine ve geçiş matrislerinin elemanlarına bağlıdır. Aynı zamanda (3.28) denkleminde, nötrinonun saf kütesinin m_k salınım deneylerinden ölçülemeyeceğini de çıkarabiliriz. Saf (absolute) kütle, beta bozunumunun enerji dağılımının uç noktasına gelen küçük katkı ile ölçülebilir. Nötrinonun saf kütesi trityum beta bozunması deneylerinde ölçülmeye çalışılmaktadır [28].

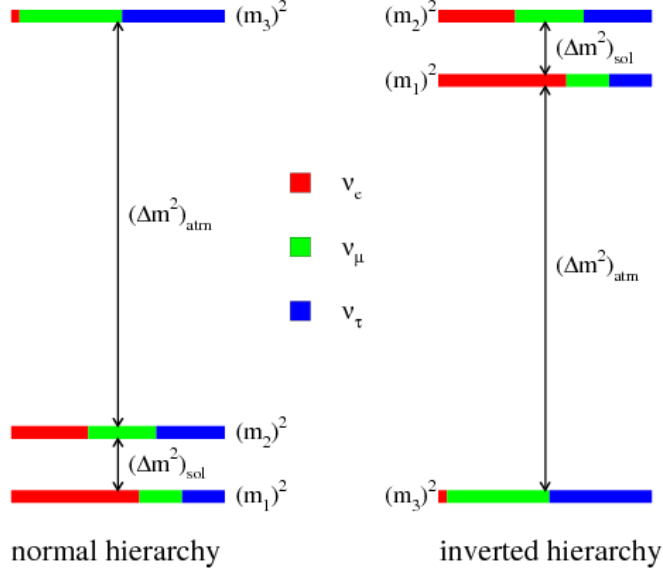
Üç kütle kare, bize iki kütle kare farkı verir. Bu iki kütle kare farkını iki şekilde dizebiliriz. Yapılan deneylerden biliyoruz ki bu iki kütle kare farklarından $\delta m_{12}^2 = 10^{-5} eV^2$ mertebesindeyken $\delta m_{23}^2 = 10^{-3} eV^2$ mertebesinde [1]. Bu fark bize kütle bazının sıralamasında bir serbestlik yaratır. Kütle hiyerarşisi olarak bilinen bu durumu görsel olarak şöyle gösterebiliriz. Bildiğimiz kadarıyla bir adet küçük kütle kare farkı, bir adet de büyük kütle kare farkı olmalıdır, ancak hangi sırayla olacağı belirsizdir. Ben yaptığım sayısal analizlerde iki tip hiyerarşi için de sonuçlar elde ettim.

3.1 numaralı grafikde $(\Delta m^2)_{atm} \equiv \delta m_{23}^2$ ile gösterilen değer, atmosferik kütle farkı değeridir. $(\Delta m^2)_{sol} \equiv \delta m_{21}^2$ kısmı ise solar kütle farkı değeridir. İki farklı hiyerarşi problemi, nötrino fiziğinin halen aydınlanmayan bir sorunudur.

Geçiş olasılığı (3.28) bazı özelliklere sahiptir. Olasılığın korunumundan aşağıdaki bağıntılar sağlanmalıdır.

$$\sum_{\beta} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1 \quad (3.30)$$

$$\sum_{\alpha} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1 \quad (3.31)$$



Şekil 3.1: Nötrinoların iki çeşit hiyerarşisi olabilir. Normal hiyerarşide nötrino kütleleri 3,2,1 şeklinde, ters hiyerarşide 2,1,3 şeklinde sıralıdır. Burada atmosferik kütle kare farkı büyük, solar kütle kare farkı küçük olmak üzere iki farklı değeri sıralama serbestliği vardır. [29]

Üniter U matrisine faz ekleyebiliriz.

$$U_{\alpha k} \rightarrow e^{i\psi_\alpha} U_{\alpha k} e^{i\phi_k} \quad (3.32)$$

Bu fazlara Majorana fazları denir. ψ_α ve ϕ_k fazları salınım geçiş olasılığını yani denklem (3.27)'yi değişmez bırakır. Ayrıca daha sonradan dikkate alacağım nötrino öz-etkileşimlerinde de bu fazların katkısı olmayacaktır. Çalışmanın geri kalanında bu fazları sıfır alacağız.

Geçiş olasılığını sanal ve gerçek kısım olarak ikiye ayırıp tekrar yazalım.

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \text{Re}[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] \sin^2 \left(\frac{\delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) + 2 \sum_{k>j} \text{Im}[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] \sin \left(\frac{\delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) \quad (3.33)$$

Eğer geçiş olasılığı $\alpha = \beta$ durumunda alırsak

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = 1 - 4 \sum_{k>j} |U_{\alpha k}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \sin^2 \left(\frac{\delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) \quad (3.34)$$

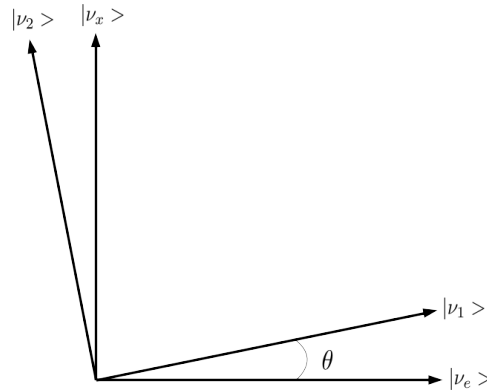
şeklinde olur. $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}$ ifadesine yaşama (survival) olasılığı denir. Yaşama olasılığı, hayata α çeşnisi ile başlamış bir nötrinonun tekrardan α çeşnisine geçiş olasılığını verir.

Bu tezin hesaplarını yaparken, yapılan simülasyonların doğruluğunu test etmek için (3.34) denklemini kullandım. Böylelikle sayısal algoritmanın belirli limitlerini analitik olarak da doğrulama imkanım oldu.

3.3 İKİ ÇEŞNİLİ NÖTRİNOLAR

Kuantum alan teorisi bölümde, Dirac alanını (2.40) kuantize edip, yaratma $a^\dagger, b^\dagger$ ve yok etme a, b operatörleri cinsinden yazmıştık. Bu operatörleri temel olarak iki ayrı bazda yazabiliriz. Bu bazlardan biri kütle bazı iken diğeri çeşni bazıdır. Bazlar arası geçişi U üniter matrisinden yararlanarak yazarız. Bu bölümde, kolaylık olması için sadece iki çeşit çeşni alacağım. Anti-fermiyonlardan ve üç çeşit nötrinolardan bir sonraki bölümde bahsedeceğim.

İki nötrino karışımı söz konusu olduğunda U karışma matrisi de 2x2 bir matrise indirgenir, ki bu matris de tek bir açı ile karakterize edilebilir. Sadece iki çeşnili nötrinin karıştığı durumda Majorana fazı salınımlarda gözlenebilir bir etkiye yol açmayacağı için (bakınız denklem (3.32)'in altındaki paragraf), bu fazı da burada sıfır alabiliriz. Bu durumda baz arasındaki geçiş şu şekildedir.



Şekil 3.2: Kütle bazı ile çeşni bazı arasında θ açısı vardır. Bu açı nötrino çeşnilerinin karışımını belirler. İki bazın birbirine dönüşümü dönme matrisi verir.

Yaratma, yok etme operatörlerinin dönüşümü şu şekilde olur.

$$\begin{aligned} a_e(\vec{p}) &= a_1(\vec{p}) \cos \theta + a_2(\vec{p}) \sin \theta \\ a_x(\vec{p}) &= -a_1(\vec{p}) \sin \theta + a_2(\vec{p}) \cos \theta \\ a_1(\vec{p}) &= a_e(\vec{p}) \cos \theta - a_x(\vec{p}) \sin \theta \\ a_2(\vec{p}) &= a_e(\vec{p}) \sin \theta + a_x(\vec{p}) \cos \theta \end{aligned} \quad (3.35)$$

Buradaki fermiyon operatörleri (2.43) denkleminde verilen anti-komütatör bağıntılarını sağlar. Yukarıda verilen dönüşümlerde rakam ile yazılan $i = 1, 2$ alt etiketler, nötrinin kütle bazındaki temsilleri iken Yunan harfi ile yazılan $\alpha = e, x$ alt etiketler, çeşni bazını temsil etmektedirler. Burada x etiketi müon veya tau nötrinosunu göster-

rebileceği gibi, onları bir süperpozisyonunu olarak da gösterebilir. Esasen x çeşni, müon ve tau çeşnilerinin özel bir kombinasyonu alındığında, iki çeşni karışımı ile elde edilen sonuçlar, üç çeşni sonuçlarına daha yakın çıkabilir. Ancak biz burada iki çeşni karışımını sadece kavramsal açıklık amacıyla kullanacağız ve ilerideki bölümlerde üç çeşni hesapları yapacağımız için, bu teknik noktayı atlıyoruz. θ ise nötrinoların karışma açısıdır. Kütle bazında olan nötrino, çeşni bazında yazılmak istenirse iki farklı çeşnide olan nötrinoların bir süperpozisyonu olarak yazılır.

$$|\nu_e\rangle = |\nu_1\rangle \cos \theta + |\nu_2\rangle \sin \theta \quad (3.36)$$

$$|\nu_x\rangle = -|\nu_1\rangle \sin \theta + |\nu_2\rangle \cos \theta \quad (3.37)$$

Eğer $\theta \rightarrow -\theta$ alırsak ters dönüşüm elde edilir.

3.3.1 NÖTRİNO İZOSPİN OPERATÖRLERİ

İki çeşni ile çalışmak, bize nötrino izospinini tanımlama olanağı verir. Nötrino salınımının standart çıkarımını yaptıktan sonra denklemleri izospin formülasyonunda yazalım. Çeşni izospin operatörlerini yaratma, yok etme operatörleri cinsinden tanımlayalım.

$$\begin{aligned} J_{\vec{p}}^+ &= a_e^\dagger(\vec{p})a_x(\vec{p}), & J_{\vec{p}}^- &= a_x^\dagger(\vec{p})a_e(\vec{p}) \\ J_{\vec{p}}^z &= \frac{1}{2}(a_e^\dagger(\vec{p})a_e(\vec{p}) - a_x^\dagger(\vec{p})a_x(\vec{p})) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Çeşni izospin operatörleri ile SU(2) cebiri oluşturabiliriz. Burada $J_{\vec{p}}^+ = J_{\vec{p}}^x + iJ_{\vec{p}}^y$ ve $J_{\vec{p}}^- = J_{\vec{p}}^x - iJ_{\vec{p}}^y$ şeklinde tanımlıdır. Yer değiştirme (komütatör) bağıntılarını, (2.43) bağıntısından yararlanarak yazacağım.

$$\left[J_{\vec{p}}^+, J_{\vec{q}}^- \right] = 2\delta_{\vec{p}\vec{q}}J_{\vec{p}}^z, \quad \left[J_{\vec{p}}^z, J_{\vec{q}}^\pm \right] = \pm 2\delta_{\vec{p}\vec{q}}J_{\vec{p}}^\pm \quad (3.39)$$

Benzer şekilde kütle izospin operatörlerinin tanımlayıp ve oluşturdukları cebri (3.35) dönüşümlerini kullanarak elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\vec{p}}^+ &= a_1^\dagger(\vec{p})a_2(\vec{p}), & \mathcal{J}_{\vec{p}}^- &= a_2^\dagger(\vec{p})a_1(\vec{p}), \\ \mathcal{J}_{\vec{p}}^z &= \frac{1}{2}(a_1^\dagger(\vec{p})a_1(\vec{p}) - a_2^\dagger(\vec{p})a_2(\vec{p})) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Kütle bazında da aynı cebir oluşur.

$$\left[\mathcal{J}_{\vec{p}}^+, \mathcal{J}_{\vec{q}}^- \right] = 2\delta_{\vec{p}\vec{q}}\mathcal{J}_{\vec{p}}^z, \quad \left[\mathcal{J}_{\vec{p}}^z, \mathcal{J}_{\vec{q}}^\pm \right] = \pm 2\delta_{\vec{p}\vec{q}}\mathcal{J}_{\vec{p}}^\pm \quad (3.41)$$

Yeni bir notasyonu şimdiden yazmakta fayda var. Herhangi bir A operatörünün momentumları üzerinden toplamı ve boşluk salınım frekansları ($\omega = \frac{\delta m^2}{2p}$) üzerinden toplamını şöyle tanımlayalım [12].

$$A_\omega \equiv \sum_{|\vec{p}|=p} A_{\vec{p}}, \quad A \equiv \sum_{\omega} A_\omega \quad (3.42)$$

Buradaki $\sum_{|\vec{p}|=p}$ toplamı, momentum vektörünün büyüklüğü aynı olan nötrinolar üzerindendir. Bir diğer deyişle, J_ω operatörü, ω frekansına sahip olan çeşni izospin operatörlerinin toplamına karşılık gelmektedir. J operatörü ise, farklı ω frekansındaki izospin operatörlerinin hepsinin toplamına karşılık gelmektedir.

Tanımladığım izospin operatörleri ile salınım ve öz-etkileşim Hamiltonyen'lerini yazacağız.

3.3.2 ÇOK PARÇACIK SALINIM HAMILTONYEN'İ

Bir önceki bölümün sonunda Dirac Hamiltonyen'ini (2.67) yazmıştık. Bu bağıntı etkileşime girmeyen tüm görelî fermiyonlar için kullanılabilir. İki çeşni için (2.67) denklemi şu şekilde yazılır.

$$H_\nu = \sum_{\vec{p}} \left(E_1(\vec{p}) a_1^\dagger(\vec{p}) a_1(\vec{p}) + E_2(\vec{p}) a_2^\dagger(\vec{p}) a_2(\vec{p}) \right) \quad (3.43)$$

Burada antinötrinoları ($b, b^\dagger$) şimdilik göz önünde bulundurmuyacağım. Ultra-görelî hızlardaki enerjiyi yaklaşık olarak veren (3.23) bağıntısını kullanalım.

$$H_\nu = \sum_{\vec{p}} \left[\left(p + \frac{m_1^2}{2p} \right) a_1^\dagger(\vec{p}) a_1(\vec{p}) + \left(p + \frac{m_2^2}{2p} \right) a_2^\dagger(\vec{p}) a_2(\vec{p}) \right] \quad (3.44)$$

Hamiltonyen'in aşağıdaki ifadesini ayıralım.

$$\sum_{\vec{p}} p \left[a_1^\dagger(\vec{p}) a_1(\vec{p}) + a_2^\dagger(\vec{p}) a_2(\vec{p}) \right] = \sum_{\vec{p}} p n(\vec{p}) \quad (3.45)$$

Burada $n(\vec{p})$ sayı operatörüdür. Denklem (3.45), Hamiltonyen'in matris temsili için, birim matris ile momentumun büyüklüğünün çarpımına denk gelecektir. Bir diğer deyişle nötrino salınımları parçacık sayısını değiştirmez. Hareket denklemlerini Heisenberg resminde çözerken (3.45) terimi, değişimine bakılan niceliğe sadece öteleme getirecektir ($\frac{d}{dt} A = i[H, A] = 0$.) Bu sebepten dolayı bu terimleri ihmal edip, diğer

terimleri göz önünde tutacağım.

$$H_\nu = \sum_{\vec{p}} \left(\frac{m_1^2}{2p} a_1^\dagger(\vec{p}) a_1(\vec{p}) + \frac{m_2^2}{2p} a_2^\dagger(\vec{p}) a_2(\vec{p}) \right) \quad (3.46)$$

şeklinde olur.

Hamiltonyen'i farklı bir şekilde tekrar yazalım.

$$H_\nu = \sum_{\vec{p}} \left(\frac{m_1^2 + m_2^2}{4p} \left(a_1^\dagger(\vec{p}) a_1(\vec{p}) + a_2^\dagger(\vec{p}) a_2(\vec{p}) \right) - \left(\frac{m_2^2 - m_1^2}{4p} \left(a_1^\dagger(\vec{p}) a_1(\vec{p}) - a_2^\dagger(\vec{p}) a_2(\vec{p}) \right) \right) \right) \quad (3.47)$$

Hamiltonyen'in

$$\sum_{\vec{p}} \left(\frac{m_1^2 + m_2^2}{4p} \left(a_1^\dagger(\vec{p}) a_1(\vec{p}) + a_2^\dagger(\vec{p}) a_2(\vec{p}) \right) \right) \quad (3.48)$$

kısmını yukarıda bahsettiğim sebepten dolayı atabiliriz. O halde çok parçacıklı Hamiltonyen şu şekle gelir.

$$H_\nu = - \sum_{\vec{p}} \frac{m_2^2 - m_1^2}{4p} \left(a_1^\dagger(\vec{p}) a_1(\vec{p}) - a_2^\dagger(\vec{p}) a_2(\vec{p}) \right) \quad (3.49)$$

Burada (3.49) bağıntısı kütle bazında yazılmıştır. Kütle bazından çeşni bazına geçmek için yaratma, yok etme operatörlerini (3.35) dönüşümlerini kullanarak yazabiliriz. Çeşni bazında yazdığımız Hamiltonyen köşegen olmaz.

$$H_\nu = - \sum_{\vec{p}} \left(\frac{m_2^2 - m_1^2}{4p} \right) \left[\cos 2\theta (a_e^\dagger(\vec{p}) a_e(\vec{p}) - a_x^\dagger(\vec{p}) a_x(\vec{p})) - \sin 2\theta (a_e^\dagger(\vec{p}) a_x(\vec{p}) + (a_x^\dagger(\vec{p}) a_e(\vec{p}))) \right] \quad (3.50)$$

İzospin operatörlerinin tanımını da kullanarak, Hamiltonyen'i tekrar yazalım.

$$H_\nu = \sum_{\vec{p}} \frac{\delta m^2}{2p} (-\mathcal{J}_p^z) \quad (3.51)$$

$$= \sum_{\vec{p}} \frac{\delta m^2}{2p} (\sin 2\theta J^x - \cos 2\theta J^z) \quad (3.52)$$

Yukarıda iki farklı Hamiltonyen varmış gibi gözüксе de iki bağıntı, aynı Hamilton-

yen'in iki farklı bazda yazılışlarını verir. Daha toplu bir şekilde de yazabiliriz.

$$H_\nu = \sum_\omega \omega (\vec{B} \cdot \vec{J}_\omega) \quad (3.53)$$

Burada tanımlanan $\vec{B}$ vektörü, çeşni ve kütle bazında farklı değerler almaktadır.

$$\begin{aligned} \vec{B} &= (0, 0, -1)_{küt\le} \\ &= (\sin 2\theta, 0, -\cos 2\theta)_{cesni} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Böylelikle 2 çeşni varlığında nötrinoların boşluk salınımlarının Hamiltonyen'ini izospin operatörleri cinsinden yazmış bulunmaktayız.

3.3.3 ÇOK PARÇACIK ÖZ-ETKİLEŞİM HAMILTONYEN'İ

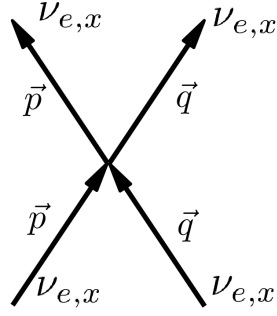
Nötrinoların standart model parçacıkları ile çok zayıf bir şekilde etkileşime girdiği bilinmektedir. Örnek vermek gerekirse MeV enerjilerinde, nötrino-çekirdek etkileşmelerinin tesir kesiti $\sigma = 10^{-41} - 10^{-44} \text{ cm}^2$ mertebesinde [1] [30] [21]. Bilindiği kadarıyla nötrinolar sadece zayıf etkileşimlere girmektedir. Bu etkileşimler yüklü akım (Charged Current CC) ve yüksüz akım (Neutral current NC) olarak ikiye ayrılır. Bunları sırası ile YIA ve YsA olarak kısaltacağız.

Ben çalışmamda nötrino etkileşimlerinden sadece nötrino-nötrino etkileşimlerini ele alacağım. Bunun anlamı, ortamda nötrinolardan başka net parçacık yoğunluğu olmadığını varsaydığımızdır. Bu etkileşimler yüksüz akımlarla yapılmaktadır. Hareket denklemleri çözmek için Hamilton formalizmini kullanacağım.

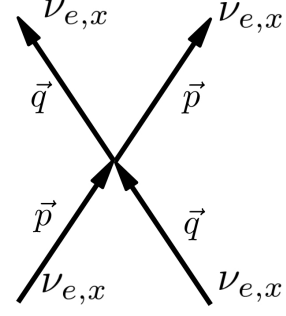
Çalışmada sadece iki farklı diyagramı göz önünde bulunduracağım. Bunlardan biri ileri saçılma diyagram (forward scattering), diğeri ise momentumları değiş-tokuş olduğu diyagramdır. Sırasıyla şekil (1.1a) ve şekil (1.1b) Feynman diyagramlarını görebiliriz. Bu iki diyagram da eş evrelidir (coherent.) Çok-parçacık Hamiltonyen'ini bu iki farklı Feynman diyagramı için yazalım [12], [31]. Kolaylık olması için nokta etkileşimi (şekil (3.3)) göz önüne alacağım. Bu demek oluyor ki Z^0 bozonunun kütlesi, nötrininin enerjisinden çok çok büyük olduğu için propagatörün katkısını almayacağım. Ayrıntılı hesap [32] kaynağında yapılmıştır.

Bu iki durum için nötrino-nötrino saçılmasının Hamiltonyen'i şu şekilde verilir [12].

$$\begin{aligned} H_{\nu\nu} = \frac{G_F}{V\sqrt{2}} \sum_{\vec{p}, \vec{q}} (1 - \cos \phi_{\vec{p}\vec{q}}) & [a_e^\dagger(\vec{p})a_e(\vec{p})a_e^\dagger(\vec{q})a_e(\vec{q}) \\ & + a_x^\dagger(\vec{p})a_x(\vec{p})a_x^\dagger(\vec{q})a_x(\vec{q}) \\ & + a_e^\dagger(\vec{p})a_x(\vec{p})a_x^\dagger(\vec{q})a_e(\vec{q}) \\ & + a_x^\dagger(\vec{p})a_e(\vec{p})a_e^\dagger(\vec{q})a_x(\vec{q})] \end{aligned} \quad (3.55)$$



(a) Momentum Değişimlerinin Olmadığı Diyagram.



(b) Momentum Değişimlerinin Olduğu Diyagram.

Şekil 3.3: Z^0 propagatörünün kütlesi nötrino kütlesinden çok büyük olduğu için propagatörün katkısını göz ardı edilebilir. Bu da demek oluyor ki Feynman diyagramını nokta etkileşim olarak düşünebiliriz.

Denklem 3.55, iki çeşni için yazılmıştır. Burada G_F Fermi Sabiti, V ise normalizasyondan gelen hacimdir. $\phi_{\vec{p}\vec{q}}$ terimi ise momentumlarının arasındaki açıdır. $(1 - \cos\phi_{\vec{p}\vec{q}})$ terimi relativistik etkilerden gelir. Zira birbirine paralel ilerleyen iki nötrino, birbirini göremez. Hamiltonyen'in ilk iki terimi ileri saçılma diyagramından gelir, yani elektron veya x çeşnili nötrinoların saçıldıktan sonra aynı momentumda kaldığı açıkça görülmektedir. Üçüncü ve dördüncü terimler ise momentumun değiştiği durumu gösterir. Öz-etkileşim Hamiltonyen'ini, (3.38) izospin tanımlarını kullanarak da yazabiliriz. Denklemleri yazarken, önceden açıkladığım gibi birim matris ile orantılı olan terimleri atacağım

$$H_{\nu\nu} = \frac{G_F\sqrt{2}}{V} \sum_{\vec{p},\vec{q}} (1 - \cos\phi_{\vec{p}\vec{q}}) \vec{J}_{\vec{p}} \cdot \vec{J}_{\vec{q}} \quad (3.56)$$

Bu Hamiltonyeni kütle bazında yazarsak izospinlerin iç (skaler) çarpımından dolayı aynı kalacaktır.

$$H_{\nu\nu} = \frac{G_F\sqrt{2}}{V} \sum_{\vec{p},\vec{q}} (1 - \cos\phi_{\vec{p}\vec{q}}) \vec{J}_{\vec{p}} \cdot \vec{J}_{\vec{q}} \quad (3.57)$$

Böylelikle izospin vektörleri cinsinden öz-etkileşim Hamiltonyen'i yazmış bulunuyoruz. Salınım Hamiltonyen'i, (3.53) ve kendisiyle etkileşim Hamiltonyen'ini, (3.56) birleştirerek her iki tabanda yazalım.

$$H = \sum_{\omega} \omega \vec{B} \cdot \vec{J}_{\omega} + \mu \sum_{\vec{p},\vec{q}} (1 - \cos\phi_{\vec{p}\vec{q}}) \vec{J}_{\vec{p}} \cdot \vec{J}_{\vec{q}} \quad (3.58)$$

$$= \sum_{\omega} \omega \vec{B} \cdot \vec{J}_{\omega} + \mu \sum_{\vec{p},\vec{q}} (1 - \cos\phi_{\vec{p}\vec{q}}) \vec{J}_{\vec{p}} \cdot \vec{J}_{\vec{q}} \quad (3.59)$$

Burada $\mu = \frac{\sqrt{2}G_F}{V}$ olarak tanımlıdır. μ terimini, simülasyonlarda etkileşim terimini büyütmek veya küçültmek için kullanabiliriz. Bu da seçtiğimiz kuantizasyon hacminin büyüklüğünü istediğimiz boyutta seçebiliriz anlamına gelir. Ayrıca ben çalışmamda tek açı yaklaşıklığı kullandım ve $\cos\phi_{\vec{p}\vec{q}} = 0$ seçtim. Çok açı yaklaşımı (Multi-angle approximation) ile yapılan çalışmalar da literatürde vardır [13], [11]. O halde Hamiltonyen'in tüm terimlerini salınım frekansları cinsinden tekrar yazalım. Bunun için kesikli limitte bakıp, (3.42) bağıntılarını kullanalım.

$$H = \sum_{\omega} \omega \vec{B} \cdot \vec{J}_{\omega} + \mu \vec{J} \cdot \vec{J} \quad (3.60)$$

$$= \sum_{\omega} \omega \vec{B} \cdot \vec{J}_{\omega} + \mu \vec{J} \cdot \vec{J} \quad (3.61)$$

Bu Hamiltonyen için hareket sabiti tanımlayabiliriz. Frekansa bağlı olarak değişmezi şu şekilde tanımlarız [12].

$$h_{\omega} \equiv \vec{B} \cdot \vec{J}_{\omega} + 2\mu \sum_{\omega' (\neq \omega)} \frac{\vec{J}_{\omega} \cdot \vec{J}_{\omega'}}{\omega - \omega'} \quad (3.62)$$

Bu büyüklüklerin

$$[h_{\omega}, h_{\omega'}] = 0 \quad (3.63)$$

$$[H, h_{\omega}] = 0 \quad (3.64)$$

bağıntılarını sağladıkları kolayca gösterilebilir. Bir diğer deyişle bunlar, öz-etkileşim nötrino Hamiltonyen'inin hareket sabitleridir. Değişmezler, (3.62) denklemindeki μ parametresinin sabit olduğu durumlarda aynı kalır.

Yaptığım simülasyonlarda, değişmezler bir kontrol mekanizması görevi görürler. Çünkü değişmezlerin zamana (konuma) göre değişmemesini bekliyorum ve simülasyonda bu değişmezler zaman (yol) boyunca değişirlerse, yaptığım simülasyonda hata olduğu anlamına gelir.

3.3.4 ORTALAMA ALAN YAKLAŞIMI (OAY)

Önceki bölümlerde bahsedilen tüm Hamiltonyenler, çok parçacıklı sistem Hamiltonyenleridir. (3.61) bağıntısında verilen denklem sistemlerinin çözülebilmesi için bir çok yöntem vardır ve ortalama alan yaklaşımı (mean field approximation) bunlardan biridir. Bu yöntem sade bir mantık ile çalışır.

Sistemde çok sayıda parçacık olsun. Bu parçacıklar her biride, birbirleri ile etkileşsin. Bütün parçacıkları tek tek ele alalım ve her parçacık diğer parçacıkların ortalama

bir etkileşim potansiyelinden etkilensin. Yani bütün parçacıkların, teker teker seçtiğimiz parçacığa etkisini almak yerine, bütün parçacıklar ortalama bir arka plan potansiyeli yaratsın ve seçtiğimiz parçacık bu potansiyelden etkilensin. Böylelikle N-parçacık denklemi çözmek yerine, zamanla değişen bir potansiyel altında etkileşen bir parçacık denklemi çözebiliriz.

OAY metodu ile Hamiltonyen'e yaklaşıklık uygulayacağız. Bu yaklaşıklığı iki farklı operatör için yapalım.

$$\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \sim \langle \psi | \mathcal{O}_1 | \psi \rangle \mathcal{O}_2 + \mathcal{O}_1 \langle \psi | \mathcal{O}_2 | \psi \rangle - \langle \psi | \mathcal{O}_1 | \psi \rangle \langle \psi | \mathcal{O}_2 | \psi \rangle \quad (3.65)$$

Burada ψ , denklemlerin çözümüdür. (3.65) bağıntısının her iki tarafının beklenen değerini alalım.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \rangle &= \langle \langle \mathcal{O}_1 \rangle \mathcal{O}_2 \rangle + \langle \mathcal{O}_1 \rangle \langle \mathcal{O}_2 \rangle - \langle \mathcal{O}_1 \rangle \langle \mathcal{O}_2 \rangle \\ &= \langle \mathcal{O}_1 \rangle \langle \mathcal{O}_2 \rangle \end{aligned} \quad (3.66)$$

Yukarıdaki bağıntı da doğal olarak sağlanır.

Bu yaklaşıklığı (3.61) denkleminde kullanalım.

$$H \sim H^{OAY} = \sum_{\omega} \omega \vec{B} \cdot \vec{J}_{\omega} + \mu \vec{P} \cdot \vec{J} \quad (3.67)$$

Burada $\vec{P}$ vektörü polarizasyon vektörüdür ve şöyle tanımlıdır.

$$\vec{P}_{\vec{p}} \equiv 2 \langle \vec{J}_{\vec{p}} \rangle \quad (3.68)$$

Yukarıdaki tanımlamada 2 katsayısı (3.67) denkleminde katsayı gelmemesi için tanımın içine atılmıştır. Polarizasyon vektörünü $|\psi\rangle$ durumları cinsinden yazmaya çalışalım. Farz edelim ki $|\Psi\rangle$ farklı momentum durumlarının tensör çarpımı olsun. N parçacık için bu durum

$$|\Psi\rangle = |\psi(\vec{p}_1)\rangle \otimes |\psi(\vec{p}_2)\rangle \otimes \dots \otimes |\psi(\vec{p}_N)\rangle \quad (3.69)$$

şeklinde. Burada $|\psi(\vec{p})\rangle$ durumunu elektron nötrinosu ve diğer nötrinoların bir süperpozisyonu olarak yazabiliriz.

$$|\psi(\vec{p})\rangle = \psi_e(\vec{p}) |\nu_e\rangle + \psi_x(\vec{p}) |\nu_x\rangle \quad (3.70)$$

O halde polarizasyon vektörünün (3.68)'de verilen tanımını kullanarak yazabilirim.

Sadece polarizasyon vektörünün z bileşeni için yapalım.

$$\begin{aligned}
P_{\vec{p}}^z &= 2 \langle J_{\vec{p}}^z \rangle \\
&= 2(\langle \psi_e | \psi_e^*(\vec{p}) + \langle \psi_x | \psi_x^*(\vec{p}) \rangle \frac{1}{2} (a_e^\dagger a_e - a_x^\dagger a_x) (\psi_e(\vec{p}) | \psi_e \rangle + \psi_x(\vec{p}) | \psi_x \rangle)) \\
&= \psi_e^*(\vec{p}) \psi_e(\vec{p}) - \psi_x^*(\vec{p}) \psi_x(\vec{p}) \\
&= |\psi_e(\vec{p})|^2 - |\psi_x(\vec{p})|^2
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Diğer bileşenleri de benzer olarak yapılabilir. O halde polarizasyon vektörü şu şekilde elde etmiş olduk.

$$\vec{P}_{\vec{p}} = \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re} [\psi_e^*(\vec{p}) \psi_x(\vec{p})] \\ 2 \operatorname{Im} [\psi_e^*(\vec{p}) \psi_x(\vec{p})] \\ |\psi_e(\vec{p})|^2 - |\psi_x(\vec{p})|^2 \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

Polarizasyon vektörü formalizmini kurduktan sonra hareket denklemlerine geçebiliriz. Hareket denklemlerini Heisenberg resminde çözelim. İzospin operatörünün $\vec{J}_\omega$ zamanla evrimini veren denklem şu şekildedir.

$$\frac{d}{dt} \vec{J}_\omega = -i [\vec{J}_\omega, H^{OAY}] = (\omega \vec{B} + \mu \vec{P}) \times \vec{J}_\omega \tag{3.73}$$

Buradaki $\vec{P}$ vektörü, bütün salınım frekanslarının toplamı olduğunu unutmamak gerekir. Yani alt etiketsiz olanlar (3.42)'deki tanımlamaya göre frekansların toplamıdır. (3.73) denkleminin her iki tarafının da beklenen değerini alırsak polarizasyon vektörünün zamanla evrimini bulabiliriz.

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_\omega = (\omega \vec{B} + \mu \vec{P}) \times \vec{P}_\omega \tag{3.74}$$

Nötrinoların öz-etkileşime girdiğindeki hareket denklemini bulmuş olduk. Polarizasyon vektörü tanımlayarak çok parçacıklı sistemler için parçacıkların hareketlerini belirleyebiliriz. (3.74) denklemini her frekans ω modu için çözmek gerekir. Aynı zamanda her frekanstaki davranış, diğer frekanstaki durumlara da bağlıdır, çünkü (3.74) denkleminin içinde $\vec{P}$ terimi, frekansların toplamı anlamına gelmektedir. Aynı zamanda nötrino enerjilerinin, durgun enerjilerinden çok büyük alırsak zaman boyutunun neredeyse konum boyutuna eşdeğer olduğunu söyleyebiliriz. Doğal birimlerde çalıştığımız için bu sorun teşkil etmeyecektir. O halde 3.74 denklemini yazalım.

$$\frac{d}{dr} \vec{P}_\omega = (\omega \vec{B} + \mu \vec{P}) \times \vec{P}_\omega \tag{3.75}$$

Böylelikle simülasyonlarda nötrinoların gittiği yol boyunca çeşnisi hakkında yorum yapabiliriz.

Peki, değişmezler (3.62) hakkında ne söyleyebiliriz? Tanımladığımız değişmez h_ω ,

Hamiltonyen ile yer değiştirilebilir olması gerekir. Kolayca görülebilir ki (3.67) yaklaşıklıkındaki H^{OAY} ifadesi, (3.62) terimi ile yer değiştirmez. Bunun yerine h_ω 'nın beklenen değerini alabiliriz. Yeni tanımladığımız değişmez

$$I_\omega = 2 \langle h_\omega \rangle = \vec{B} \cdot \vec{P}_\omega + \mu \sum_{\omega' (\neq \omega)} \frac{\vec{P}_\omega \cdot \vec{P}_{\omega'}}{\omega - \omega'} \quad (3.76)$$

şeklini alır. Bu yeni tanımladığımız I_ω bağıntısının zamanla değişmediği de kolayca gösterilebilir. Yani $\frac{d}{dr} I_\omega = 0$ bağıntısı, μ =sabit olduğunda sağlanır.

3.4 ÜÇ ÇEŞNİLİ NÖTRİNOLAR

Bir önceki bölümde kolaylık olsun diye denklemleri iki nötrino çeşnisi için yazdık. Ancak bildiğimiz kadarıyla standart model teorisinde üç çeşit aile vardır. Bunların lepton ayağındaki aileler elektron e^- , müon μ^- ve tau τ^- olarak üçe ayrılır. Bu tezde ilgileneceğim süpernovalarda nötrinoları, ağırlıklı olarak çift oluşumu, nötrino bremsstrahlung veya plazmon bozunumundan gelir. O nedenle üç çeşni de üretilir. Çekirdek çökmeli süpernovalardan çıkan nötrinoların enerjileri aşağı yukarı milyon elektron volt, MeV seviyesindedir.

Üç nötrino çeşnisi ile polarizasyon "vektörü" oluşturmak pratik değildir. Bu modeli kurmak için SU(3) cebiri kullanılmalı ve 2 farklı dönüşüm açısı kullanılmalıdır. Bu formülasyonu kullanmak yerine yoğunluk matrisi formülasyonunu kullanmak daha uygundur.

3.4.1 YOĞUNLUK MATRİSİ

Yoğunluk matrisinin tanımından önce çok parçacıklı sistemlerin bazı özelliklerinden bahsetmek gerekir. Eğer bir topluluğun içindeki bütün parçacıklar aynı kuantum durumunda bulunuyorlarsa bu topluluğa *saf topluluk* (pure ensemble) denir. Eğer topluluktaki parçacıklar, farklı kuantum durumlarında olabilirlerse bu topluluğa *karışık topluluk* adı verilir. Kabaca konuşursak karışık topluluklar, saf toplulukların belli bir ağırlıkta karışımıdır. Böyle durumlar da matematiksel olarak *yoğunluk matrisi* ile tanımlanır. Bazı kaynaklar, temsili yoğunluk matrisi olan operatörü *yoğunluk operatörü*, *istatistiksel operator* veya *durum operatörü* olarak da tanımlar [33], [34], [35].

Yoğunluk matrisinin matematiksel tanımını yapmadan önce, izdüşüm operatörünün, A gibi bir gözlemlenebilir üzerindeki etkisine bakalım. $|\varphi\rangle$ durumuna izdüşüm operatörü

$$\mathcal{P}_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi| \quad (3.77)$$

şeklinde olur. Hilbert uzayının $\mathcal{H}$, iki ortonormal bazını $|n\rangle$ ve $|m\rangle$ ile gösterelim. O

halde A gözlemlenebilirin beklenen değerini yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle &= \langle \varphi | A | \varphi \rangle = \sum_{n,m} \langle \varphi | n \rangle \langle n | A | m \rangle \langle m | \varphi \rangle \\
&= \sum_{n,m} \langle m | \varphi \rangle \langle \varphi | n \rangle \langle n | A | m \rangle \\
&= \sum_m \langle m | \mathcal{P}_\varphi A | m \rangle = \text{Tr}(\mathcal{P}_\varphi A)
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Yukarıdakiler saf topluluklar için geçerlidir. Şimdi bu beklenen değeri karışık topluluklar için genellelim. Karışık durumlar için sistemin kuantum durumu başka durumların süperpozisyonu şeklinde yazılır. α durumlarındaki parçacıkların tüm parçacıklara oranını p_α olarak gösterilir. Bu duruma karşılık gelen $|\varphi_\alpha\rangle$ durumu da normalize ($\langle \varphi_\alpha | \varphi_\alpha \rangle = 1$) olsun. O halde *yoğunluk matrisi* ρ , şöyle tanımlanır:

$$\rho = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\varphi_{\alpha}\rangle \langle \varphi_{\alpha}| = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \mathcal{P}_{\varphi_{\alpha}} \tag{3.79}$$

Gözlemlenebilirin beklenen değeri

$$\langle A \rangle_{\alpha} = \langle \varphi_{\alpha} | A | \varphi_{\alpha} \rangle \tag{3.80}$$

şeklinde gösterilir. O halde karışık topluluk olan bir sistemde, A gözlemlenebilirin beklenen değerini yazalım.

$$\langle A \rangle = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle A \rangle_{\alpha} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle \varphi_{\alpha} | A | \varphi_{\alpha} \rangle = \text{Tr}(\rho A) \tag{3.81}$$

Yoğunluk matrisinin çok önemli özellikleri vardır. Bunlar:

- Hermityenlik (Hermitian) $\rho = \rho^{\dagger}$,
- İzi (trace) birim olmalı. $\text{Tr}(\rho) = 1$,
- Saf topluluklar için: $\rho^2 = \rho$ olmalı,
- Saf ve karışık topluluklar için $\text{Tr}(\rho^2) \leq 1$ olmalı. Eşitlik saf topluluklar için geçerlidir.

Artık üç nötrino çeşni için hareket denklemlerini oluşturabiliriz.

3.4.2 ÇOK PARÇACIK SALINIM HAMILTONYEN'İ

Çok parçacık salınım Hamiltonyen'ini iki çeşit nötrino için (3.46) bağıntısında yazmıştık. Şimdi bunu üç nötrino için genelleştireceğiz. Bunun için yeni bir SU(3) cebirine ait

bir operatör ile tanımlayalım. Artık anti-nötrinoları da hesaba katacağım. Yani artık anti-nötrinoların yaratma, yoketme operatörlerinin $b^\dagger, b$, bağıntılarını da yazmam gerekmektedir.

$$T_{ij}(\vec{p}, t) = a_i^\dagger(\vec{p}, t) a_j(\vec{p}, t) \quad (3.82)$$

$$\bar{T}_{ij}(\vec{p}, t) = b_j^\dagger(\vec{p}, t) b_i(\vec{p}, t) \quad (3.83)$$

Yukarıdaki i, j etiketleri e, μ ve τ çeşnilerine aittir. Anti-nötrinolar için yaratma, yok etme operatörleri nötrinolarla göre ters tanımlanmıştır. SU(3) cebri de aşağıdaki gibi oluşturulur [36].

$$[T_{ij}(\vec{p}), T_{kl}(\vec{q})] = \delta(\vec{p} - \vec{q})(\delta_{kj} T_{il}(\vec{p}) - \delta_{il} T_{kj}(\vec{p})) \quad (3.84)$$

$$[\bar{T}_{ij}(\vec{p}), \bar{T}_{kl}(\vec{q})] = -\delta(\vec{p} - \vec{q})(\delta_{kj} \bar{T}_{il}(\vec{p}) - \delta_{il} \bar{T}_{kj}(\vec{p})) \quad (3.85)$$

$$[T_{ij}(\vec{p}), \bar{T}_{kl}(\vec{q})] = 0 \quad (3.86)$$

Cebri oluştururken (2.43) ve (2.44) bağıntılarından yararlanılır. Yoğunluk matrisleri ise SU(3) cebrinin üreteçlerinin (generators) beklenen değerleri olarak tanımlanır. [37]

$$\rho_{ij}(\vec{p}) = \langle T_{ij}(\vec{p}) \rangle, \quad \bar{\rho}_{ij}(\vec{p}) = \langle \bar{T}_{ij}(\vec{p}) \rangle \quad (3.87)$$

Artık salınım Hamiltonyenini yazabiliriz [36].

$$H_\nu = \sum_{i,j} \sum_{\vec{p}} [T_{ij}(\vec{p}) + \bar{T}_{ij}(\vec{p})] \gamma_{ij}(p) \quad (3.88)$$

Burada kuantizasyon hacmi neden koymadığımı daha önceden açıklamıştım. γ_{ij} şöyle tanımlıdır:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{3} U_{23} U_{13} U_{12} \begin{pmatrix} \frac{-\delta m_{21}^2 - \delta m_{31}^2}{2p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta m_{21}^2 - \delta m_{32}^2}{2p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta m_{31}^2 + \delta m_{32}^2}{2p} \end{pmatrix} U_{12}^\dagger U_{13}^\dagger U_{23}^\dagger \quad (3.89)$$

Buradaki U_{ij} matrisleri de nötrino salınımlarında bahsettiğimiz dönüşüm matrisleridir ve şu şekilde tanımlıdır:

$$U_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \quad U_{13} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix}$$

$$U_{12} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

Eğer CP (Charge Conjugate - Parity) ihlalini de hesaplarımıza katmak istersek U_{13} matrisinin sin terimlerinin yanına bir faz gelecektir. Bu Dirac fazıdır. Daha önce Majorana fazlarını, salınımlara etkisi olmayacağı için hesaba katmayacağımı söylemiştim. Dirac fazının etkisi olabilir. Ama ben bunu da sıfır alıyorum.

Herhangi bir olaydan ortaya çıkan nötrinoların boşluktaki salınımını veren Hamiltonyen (3.88) bağıntısı ile verilir. Bu salınım Hamiltonyen'i, herhangi bir etkileşim olmadan nötrinoların çeşni değiştirmesine olanak kılar. Bu da demek oluyor ki, başlangıçta α çeşnisi ile açığa çıkan nötrino, belli bir mesafe gittikten sonra β çeşnisine geçişi olanaklıdır.

İki çeşnili nötrinolar için sadece bir adet kütle kare farkına ihtiyaç varken üç çeşnili nötrinolar da iki farklı kütle kare farkına ihtiyaç duyulmuştur. Bunun sonucunda da matris notasyonuna geçmek daha uygun olmuştur. Aynı zamanda (3.88) denklemi γ_{ij} matrisinin tanımından dolayı çeşni bazında yazılmıştır. Bu Hamiltonyen'i dönüşümlerle çeşni bazında da yazmak mümkündür. U üniter dönüşüm matrisleri de dönme matrisleridir. Böylelikle kütle ve çeşni bazlarının geçişleri tasvir etmek daha kolay olabilmektedir.

3.4.3 ÇOK PARÇACIK ÖZ-ETKİLEŞİM HAMILTONYEN'İ

Bir önceki bölümde iki nötrino için etkileşim Hamiltonyen'i yazmıştık. Bu Hamiltonyen'i genelleştirirsek

$$H_{\nu\nu} = \frac{G_F}{V\sqrt{2}} \sum_{\vec{p}, \vec{q}} (1 - \cos \phi_{pq}) \sum_{i,j} (T_{ij}(p) - \bar{T}_{ij}(p))(T_{ji}(q) - \bar{T}_{ji}(q)) \quad (3.91)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada bir adet eksik olan kuantizasyon hacminin neden yazılmadığı daha önceden açıklanmıştı. Şimdi OAY methodunu kullanacağım. Bu Hamiltonyen'i OAY altında şöyle yazabiliriz (Momentumdan enerjiye geçelim. Bu geçişi relativistik parçacıklar ve momentumuna kıyasla düşük kütleli parçacıklar için varsayabiliriz $E^2 = m^2 + p^2 \approx p^2$.)

$$H_{\nu\nu} = \frac{\sqrt{2}G_F}{V} \sum_E G^\dagger(\rho(E) - \rho(E)^{c*})G \quad (3.92)$$

Burada yoğunluk matrisi ρ ve ρ^c matrisleri nötrinoları ve anti-nötrinoları da içerir ve 6x6 matrislerdir.

$$\rho(E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \rho_{ee} & \rho_{e\mu} & \rho_{e\tau} & & & \\ \rho_{\mu e} & \rho_{\mu\mu} & \rho_{\mu\tau} & & & \\ \rho_{\tau e} & \rho_{\tau\mu} & \rho_{\tau\tau} & & & \\ \hline & & & \mathbf{0} & & \\ & & & \rho_{\bar{e}\bar{e}} & \rho_{\bar{e}\bar{\mu}} & \rho_{\bar{e}\bar{\tau}} \\ & & & \rho_{\bar{\mu}\bar{e}} & \rho_{\bar{\mu}\bar{\mu}} & \rho_{\bar{\mu}\bar{\tau}} \\ & & & \rho_{\bar{\tau}\bar{e}} & \rho_{\bar{\tau}\bar{\mu}} & \rho_{\bar{\tau}\bar{\tau}} \end{array} \right) \quad (3.93)$$

$$\rho(E)^c = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \rho_{\bar{e}\bar{e}} & \rho_{\bar{e}\bar{\mu}} & \rho_{\bar{e}\bar{\tau}} & & & \\ \rho_{\bar{\mu}\bar{e}} & \rho_{\bar{\mu}\bar{\mu}} & \rho_{\bar{\mu}\bar{\tau}} & & & \\ \rho_{\bar{\tau}\bar{e}} & \rho_{\bar{\tau}\bar{\mu}} & \rho_{\bar{\tau}\bar{\tau}} & & & \\ \hline & & & \mathbf{0} & & \\ & & & \rho_{ee} & \rho_{e\mu} & \rho_{e\tau} \\ & & & \rho_{\mu e} & \rho_{\mu\mu} & \rho_{\mu\tau} \\ & & & \rho_{\tau e} & \rho_{\tau\mu} & \rho_{\tau\tau} \end{array} \right) \quad (3.94)$$

Böyle yazmak daha toplu (compact) bir kullanımdır. Burada G matrisi şöyle tanımlıdır:

$$G = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad (3.95)$$

3.4.4 HAREKET DENKLEMİ

Daha önceden yaptığımız gibi Hamiltonyenleri oluşturduktan sonra hareket denklemini yazabiliriz. Önceki bölümlerde polarizasyon vektörünün zamanla nasıl değiştiğini ele almıştım. Burada ise yoğunluk matrisinin zamanla nasıl değiştiğini bulacağım.

Belli bir enerjideki nötrinoların uyduğu hareket denklemi şu şekildedir.

$$\frac{d}{dr}\rho(E, r) = -i [H(E), \rho(E, r)] \quad (3.96)$$

Burada $H(E)$ Hamiltonyen'ini (3.92) ve (3.88) denklemlerini kullanarak yazabiliriz.

Bu denklemlerde bazı değişiklikler yapacağım. Bu değişiklikler momentum uzayında yazılmış bir Hamiltonyen'i enerji cinsinden yazmak olacak. Sadece belli bir enerjideki nötrinolar için yazalım.

$$H(E) = \Gamma(E) + \left[\frac{\sqrt{2}G_f}{V} \sum_E G^\dagger (\rho(E) - \rho(E)^{c*}) G \right] \quad (3.97)$$

Bunun için Γ matrisini (3.89) ifadesini kullanarak şöyle oluştururuz.

$$\Gamma(E) = \begin{pmatrix} \gamma_{ij} & 0 \\ 0 & \gamma_{ij}^T \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

Burada 3 çeşnili nötrinolar için $i, j = 1, 2, 3$ olmalıdır.

Daha önceden iki çeşni için bulduğumuz etkileşim Hamiltonyen'ini de üç çeşniye genelleştirmiş bulunmaktayız. İleri saçılmalara ek olarak momentumun değiş-tokuş olduğu saçılma diyagramlarını da ele alınmıştır. Momentumun değiş-tokuş olduğu saçılma diyagram, sistem Hamiltonyen'ninin diyagonal olmayan terimlerine katkılar getirecektir. Aynı zamanda herhangi bir nötrinin hareket denklemini, diğer tüm nötrinoların hareketi de etkileyeceğini (3.97) bağıntısından görebiliriz. Bu da çözeceğimiz hareket denklemlerinin birbirlerine bağlı denklemler olduğunu göstermektedir. Sayısal analizlerde yüksek sayıda nötrino almak da, bu denklem sistemini daha da büyütecektir. Yaptığım analizler, bilgisayarın işlemcilerini (CPU) fazlaca zorlamıştır ve yüksek miktarda hafıza kapasitesine (RAM) ihtiyaç duyulmuştur.

Elde ettiğimiz toplam Hamiltonyen, istenilen sisteme uyarlanabilir. Bu çalışmada, parçacık fizikinden elde edilen denklemler, astrofiziksel olaylara entegre edilmiştir. Öz-etkileşim Hamiltonyen'inin, salınım Hamiltonyen'ine oranla etkili olabilmesi için çok yüksek yoğunluklu bir nötrino ortamına gerek duyulmaktadır. Bu yüksek yoğunluklu ortam, evrenin başlangıcındaki ortam olabilir veya süpernova patlaması sonrasındaki ortam olabilir. Bu çalışmada, süpernova patlamasından çıkan nötrinolar incelenecektir. Sistemin Hamiltonyen'i süpernova geometrisine uygun şekilde yazılmalı ve başlangıç koşulları da çeşitli süpernova patlama modellerindeki nötrinoların spekturumu kullanılmalıdır.

3.5 ASTROFİZİKTE UYGULAMASI

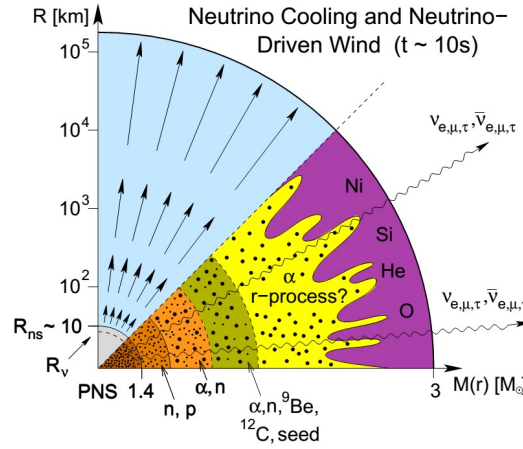
Nötrino astrofiziği, 1987 yılında SN 1987A süpernovasının patlamasıyla başladı diyebiliriz. Daha önceden Dünya'daki nükleer santrallerde oluşan nötrinoları, Güneş nötrinolarını ve atmosferden gelen nötrinoları gözlemlerken bir anda Güneş sistemimizin dışındaki bir kaynaktan gelen nötrinoları gözlemledik. O sırada protonun bozunumu gibi konularda deneyler yürüten Kamiokande, IMB ve Baksan deneyleri, süpernovadan gelen nötrinoları da gözlemlemiştir. Bu üç deney farklı eşik (threshold) değerlerine sahip olsa dahi, aynı zaman aralığında beklenenden fazla nötrino sayımı yapmışlar-

dır. [7] İşte bu "şans eseri" nötrino gözlemleri astroparçacık fiziğinde önemli bir adım sayılır.

3.5.1 ÇEKİRDEK ÇÖKMELİ SÜPERNOVALARDA NÖTRİNO-LAR

Süpernova patlamalarının simülasyonunu yapmak oldukça zordur. Bunun en önemli sebebi neredeyse dört kuvvetin de etkili olması ve termodinamik denklemlerinin de oldukça karmaşık olmasıdır. Her bakımdan ekstrem bir olay olan çekirdek çökmeli süpernovalar, nötrinolar için de çok önemlidir. Çünkü yapılan simülasyonlardan anlaşıyor ki nötrino parlaklığının değeri (luminosity) $L_\nu = 10^{52}$ erg/s civarında olursa süpernovalar soğuyabilir [8]. Bu nötrinoların kendileriyle öz-etkileşmesine yetecek kadar büyük bir parlaklıktır.

Nötrinolar, fotonlardan daha az etkileşime girdiği için süpernova patlamalarında kilitlet rol oynar. Fotonların ortalama serbest yolu (mean free path), süpernovaların patladıktan sonraki soğumaları için çok kısadır. Fotonların yerine nötrinolar, proto-nötron yıldızından (PNY) çıktıktan sonra patlamanın büyük bir enerjisini uzaya taşır.



Şekil 3.4: Proto-nötron yıldızının çapı 10 km olduğu düşünülmektedir. Patlamanın ardından PNY'nin etrafındaki katmanlar şekilde açıkça gösterilmiştir. Çekirdekte oluşan nötrinolar ve anti-nötrinolar madde ile etkileşimleri düşük olduğu için patlama enerjisinin büyük bir kısmını uzaya taşırlar. R-process kısmı ise ağır elementlerin oluştuğu kısım olarak düşünülmektedir [8].

3.4 numaralı şekilde PNY'nin yarı çapının aşağı yukarı 10 km olduğunu da görebiliyoruz. Merkezde bulunan yapı, elektronlarından ayrılmış bir proto-nötron yıldızdır. PNY'nin yapısı, yıldızın çökmeden önceki kütlesiyle orantılıdır. Benim inceleyeceğim, gelecekte nötron yıldızı olacak olan proto-nötron çekirdeklerinden çıkan nötrinolardır.

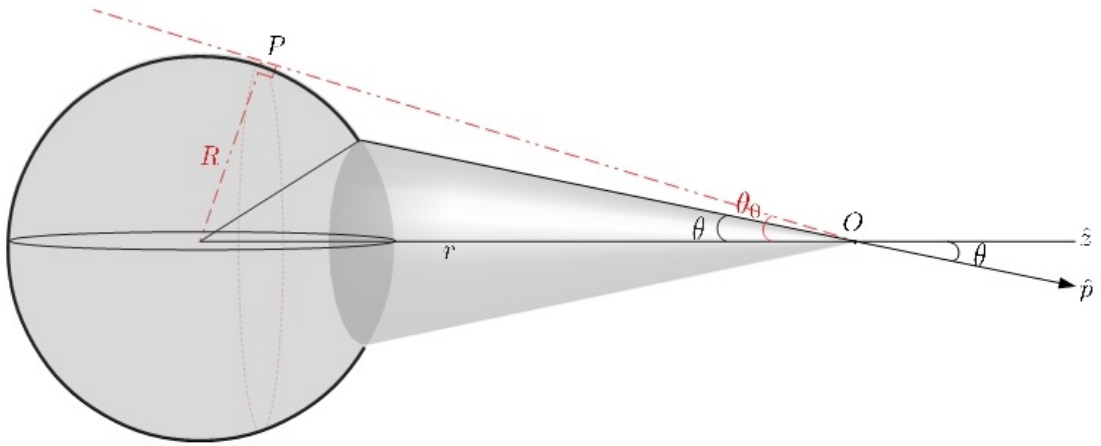
Süpernova patlamalarında nötrinolar, β bozunumları ve elektron yakalama tepkimelerinde görev alır. Bu da sistemdeki proton/nötron oranını etkiler. Şok dalgası dina-

mikleri ise sistemin entropisine ve baryon başına düşen lepton sayısına çok hassas bağlıdır [8].

3.5.2 NÖTRİNO HAREKET DENKLEMLERİ

Çekirdek çökmeli süpernovalarından çıkan nötrinoların parlaklıklarının çok yüksek olduğundan bahsetmiştik. Bu parlaklıklar çeşitli süpernova modellerine göre değişiklik göstermektedir. Birçok kaynaktan, ortalama nötrinoların parlaklıklarının $L = 10^{53}$ erg/s ile $L = 10^{52}$ erg/s arasında olduğunu çıkarabiliriz [38]. Ortalama değerlerin bu kadar yüksek değerlerde olması, süpernova patlamalarının enerjisinin büyük bir kısmının nötrinolar tarafından taşındığı anlamına gelir. Ayrıca bazı modellerde nötrinoların çeşnisine göre de parlaklıkların değiştiğini söyleyebiliriz [11], [39]. Yapılan modeller, başlangıçta alınan yıldızın kütesine ve yapısal farklılıklara göre farklı parlaklıklar değerleri alabilir. Ancak genel kabul gören parlaklık değerlerinin 10^{53} erg/s değerinde olduğunu söyleyebiliriz.

Süpernova modellerine göre istatistiksel dağılımlar da farklılık gösterebilir. Şimdi Fermi-Dirac istatistiği için nötrino yoğunluğunu elde edelim. Akıyı, birim zamanda, birim alandan geçen parçacık yoğunluğu olarak tanımlayabiliriz. Ayrıca sistemin geometrisi de hareket denklemlerini etkilemektedir. Bunun için süpernovadan çıkan $\vec{p}$ momentumlu nötrino yoğunluğunun O noktasına θ açısıyla geldiğini düşüneceğiz. O noktasına ulaşabilen en uç nokta, P noktası olup gelme açısı ise θ_0 olur. Şimdi diferansiyel akıyı yazalım.



Şekil 3.5: Küresel simetrik proto-nötron çekirdekten çıkan nötrinolar küresel olarak yayıldığı düşünülmektedir. Sadece O noktasına gelenleri ele alınırsa, açı bileşeni sıfırdan θ_0 'a kadar taranması gerekir.

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_\nu}{dp d\Omega} dp d\Omega &= c \frac{1}{h^3} \frac{p^2 dp d\Omega}{1 + e^{E/kT}} \\ \frac{d\phi_\nu}{dp d\theta} dp d\theta &= \frac{2\pi c}{h^3} \frac{p^2 dp d\theta}{1 + e^{E/kT}} \sin \theta\end{aligned}\quad (3.99)$$

Burada doğal birimleri kullanmadım, çünkü doğal birimlerde Plank sabiti h değil, $\hbar$ bire eşittir.

Denklem (3.99)'deki açı integralini hesaplamamız gerekir. Burada $r \gg R$ yaklaşıklığını kullanacağım.

$$\begin{aligned}\int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta &= -\cos \theta \Big|_0^{\theta_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}} \cong 1 - \left(1 - \frac{R^2}{2r^2}\right) \\ &\cong \frac{R^2}{2r^2}\end{aligned}\quad (3.100)$$

Buradaki θ açı integralinin sonucunu (3.99) denkleminde yerine koyalım.

$$\frac{d\phi_\nu}{dp} dp = \frac{2\pi c}{h^3} \frac{R^2}{2r} \frac{p^2 dp}{1 + e^{E/kT}} \quad (3.101)$$

Yüksek enerjilerde $p^2 dp \approx \frac{1}{c^3} E^2 dE$ ve $p = \frac{E}{c}$ yaklaşıklığını alacağız.

$$\frac{d\phi_\nu}{dE} = \frac{1}{8\pi} \frac{c}{(\hbar c)^3} \frac{R^2}{r^2} \frac{E^2}{1 + e^{E/kT}} \quad (3.102)$$

Yukarıdaki denklemle, O noktasında, birim zamanda, birim alandan geçen E enerjili nötrino sayısını bulmuş olduk. Bir diğer değişle diferansiyel nötrino akısını bulduk.

Şimdi de parlaklığı elde edelim. Parlaklık, izotropik varsayımla, birim zamanda, bütün yüzeydeki salınan enerji olarak tanımlanır.

$$L = 4\pi r^2 \int E \frac{d\phi_\nu}{dE} dE \quad (3.103)$$

$$= \frac{R^2 c}{2\pi (\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{E^3 dE}{1 + e^{E/kT}} \quad (3.104)$$

$$= \frac{R^2 c}{2\pi (\hbar c)^3} (kT)^4 \int_0^\infty \frac{(E/kT)^3 dE/kT}{1 + e^{E/kT}} \quad (3.105)$$

$$= \frac{R^2 c}{2\pi (\hbar c)^3} (kT)^4 F_4(0) \quad (3.106)$$

Burada $F_4(0) = \frac{7\pi^4}{120}$ Fermi-Dirac integralidir. Son olarak $\frac{c}{(\hbar c)^3} = \frac{2\pi L}{(kT)^4 F_4(0)}$ şeklinde

alıp (3.102) denkleminde yerine koyalım.

$$\frac{d\phi_\nu}{dE} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{L}{(kT)^4 F_4(0)} \frac{E^2}{1 + e^{E/kT}} \quad (3.107)$$

Böylelikle Fermi-Dirac istatistiği ile akıyı yazmış bulunuyoruz.

Normalize edilmiş Fermi-Dirac benzeri bir dağılımı benzer olarak şöyle yazabiliriz [14].

$$f_{\nu_\alpha}(E) = \frac{\beta^\beta}{\Gamma(\beta)} \frac{E^{\beta-1}}{\langle E_{\nu_\alpha} \rangle^\beta} e^{-\beta E / \langle E_{\nu_\alpha} \rangle} \quad (3.108)$$

Burada β spektral parametre olup, $\Gamma(\beta)$ Euler gamma fonksiyonudur. Burada alınan değerler de seçilen modele bağlıdır ve $\beta = 4$ kabul edilir bir dağılım verir [14]. Bu dağılım, Monte Carlo simülasyonları ile yapılan proto-nötron yıldızı modellerinin sonucu elde edilmiş bir dağılımdır. Bu dağılım elde edilirken proto-nötron çekirdeğinin içinde oluşan nötrinoların nötrino-çekirdek saçılması, nötrinoların elektron ve elektron nötrinosu saçılmaları gibi etkileşimler göz önüne alınmıştır [40].

Nötrinolar ayrıştıktan sonra PNY'den ışık hızına yakın hızlarda, yani yüksek enerjilerde ayrılacaklardır. Çekirdeğe yakın yerlerde nötrino yoğunluğu çok büyük olacaktır. Bu alanda nötrino öz-etkileşim terimi, nötrino salınım terimine baskın gelecektir. Ancak bir süre (mesafe) sonra geometrik katkıdan dolayı salınım teriminin, öz-etkileşim terimine baskın gelmesini beklenir. Çünkü küresel simetrik bir kaynaktan yayılan nötrinoların yoğunluğu mesafe arttıkça azalacaktır. İşte bu geometrik etkiyi hesaba katabilmek için öz-etkileşim Hamiltonyen'i (3.92) ifadesinin başına bir katsayı eklememiz gerekmektedir. Bu geometrik faktörü hesaplayalım.

$$\begin{aligned} D(r) &= \int d\Omega (1 - \hat{p} \cdot \hat{z}) = 2\pi \int_0^{\theta_0} (1 - \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ &= 2\pi \left(-\cos \theta + \frac{\cos^2 \theta}{2} \right) \Big|_0^{\theta_0} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Burada θ_0 açısı geometrik olarak şöyle verilir.

$$\cos \theta_0 = \sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}} \quad (3.110)$$

Bu geometrik faktörü şöyle buluruz.

$$D(r) = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}} \right]^2 \quad (3.111)$$

Bu etkiyle beraber (3.92) denklemi Şu hale gelir.

$$H_{\nu\nu} = D(r) \frac{\sqrt{2}G_F}{V} \sum_E G^\dagger (\rho(E) - \rho(E)^{c*}) G \quad (3.112)$$

4 SONUÇLAR

Denklem (3.96), lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemi çözmek için sayısal yöntemler kullanılmalıdır. Birinci dereceden diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözümünü en sık kullanılan yöntem Runge-Kutta yöntemleridir. Runge-Kutta yöntemi temelinde Euler yönteminin üst dereceden açılımlarını kapsar. Ben de (3.96) denklemini çözerken Runge–Kutta–Fehlberg yöntemini (RK45) kullandım.

Sayısal olarak diferansiyel denklemleri çözerken başlangıç koşullarını yazmamız gerekir. RK45 yöntemi başlangıç noktasından başlayarak, adım adım bir sonraki çözümü bulur. Bizim problemimiz için başlangıç koşulları şunlardır; Sıcaklık $T_{\nu\alpha}$ [MeV], enerji dağılımı E [MeV], parçacık sayısı N , süpernova yarıçapı R [km], parlaklık L [MeV/km], kütle farkları δm_{ij}^2 [MeV²] ve karışma açıları θ_{ij} . Karışma açılarından iki tanesini sıfır alarak efektif iki çeşni sonuçları elde ettim. Ayrıca başlangıçtaki yoğunluk dağılımını Fermi-Dirac veya Fermi-Dirac benzeri dağılımı olarak iki farklı şekilde ele aldım. Bunun yanında hiyerarşiyi de normal ve ters hiyerarşi olarak ayrı ayrı aldım. Bu tezde kullanılan Fermi-Dirac dağılımı şu şekildedir.

$$\rho(E) = \frac{1}{T_{\nu\alpha}^4} \frac{1}{F_4(0)} \frac{E^2}{1 + e^{E/kT}} \quad (4.1)$$

Bir diğer Fermi-Dirac benzeri dağılımı ise şu şekildedir.

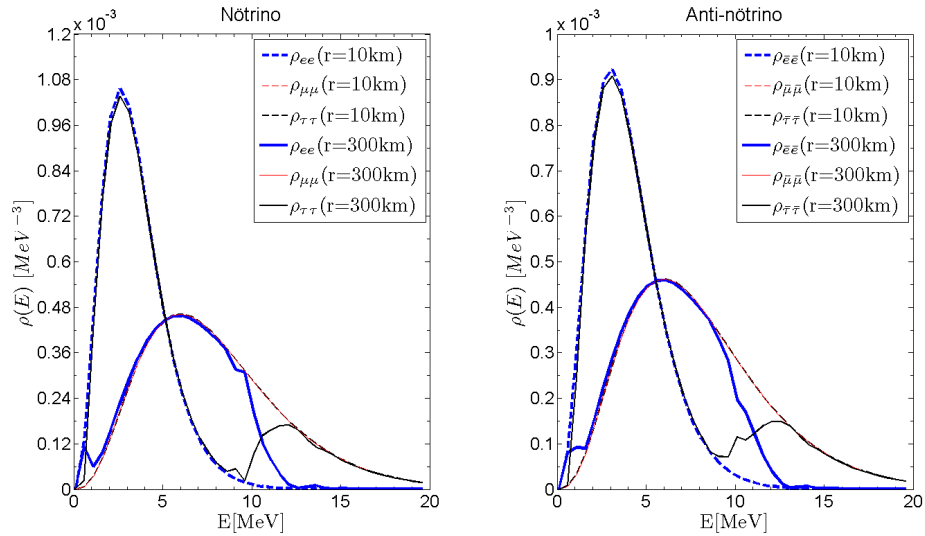
$$\rho(E) = \frac{1}{F_4(0)} \frac{E^3}{T_{\nu\alpha}^4} e^{-4E/T_{\nu\alpha}} \quad (4.2)$$

Yukarıda yazılan denklem (4.1) ve denklem (4.2), daha önceden bulduğumuz denklem (3.107) ve denklem (3.108) bağıntılarından farklıdır. Bunun sebebi kullanılan denklemlerde parlaklık, bazı katsayılar ve enerjinin karesi olan ifadeler etkileşim Hamiltonyen'inin içine konmuştur. Ayrıca sayısal hesap yapmak için de kesikli limite gitmemiz gerekecektir.

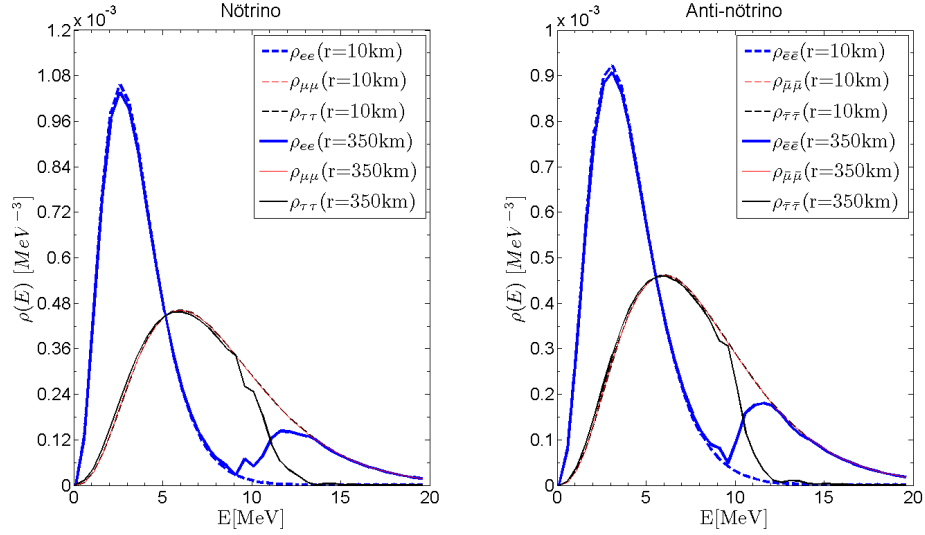
Başlangıç koşullarında daha önceden de bahsettiğim sıcaklık değerlerini aldım. Parlaklık değeri ise 10^{51} erg/s mertebesinde. Mesafe olarak da 300 km ise yeterli bir uzaklıktır. Çünkü yaklaşık 200 km'den sonra enerji dağılımında dramatik bir değişim gerçekleşmemektedir. Bunun sebebi, salınım Hamiltonyen'inin merteye olarak uzaklıkla azalan öz-etkileşim Hamiltonyen'ine baskın gelmesidir. Kütle değerleri de [41] referansından alınmıştır. Bu çalışmada nötrino-lepton veya nötrino-baryon etki-

leşimleri Hamiltonyen'e eklenmemiştir. Bunun yerine kütle kare farkları ve karışım açılarının efektif değerleri alınmıştır. Bu kütle kare farkı değerlerinden solar olanı, $\delta\tilde{m}_{12}^2 = 0.4 \times \delta m_{12}^2$ şeklinde alınması gerekir. Diğer kütle kare farklarında bir değişiklik meydana gelmez. Bunun yanında $\theta_{12} = \theta_{13} = 10^{-3}$ değerinde alınmalıdır [14]. Bu yaklaşıklık uygundur, çünkü madde yoğunluğu nötrinoların salınım dalga boylarını kısaltması beklenir, dolayısıyla karışma açılarını da küçültür. Bunlara ek olarak grafiklerin hepsinde, başlangıç durumu için çizilen eğrilerin altında kalan alan ile son durum için çizilen eğrilerin altında kalan alan her zaman eşit olmalıdır. Bu da toplam parçacık sayısının korunduğu anlamına gelir. Bunun yanında $\theta_{23} = 0$ almamızın nedeni temelde basitlik içindir ve bunu almamız, yapılan fiziği etkilememektedir. [42] [43] Bu olayı anlayabilmek için nötrino-elektron etkileşiminin ayrıntılarına bakmak gerekmektedir ancak nötrino-elektron etkileşimi bu tezde incelenmemiştir. Ana hatlarıyla söylemek gerekirse Hamiltonyen'e gelen etkileşim potansiyeli sadece Hamiltonyen matrisin (1,1) ve (4,4) terimlerine katkı getirmektedir. Öyleyse kolaylık olması için $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)^T = R^\dagger(\theta_{23}) (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)^T$ şeklinde başka bir baza geçebiliriz. Bu geçiş, efektif olarak $\theta_{23} = 0$ almak ile eşdeğerdir [14].

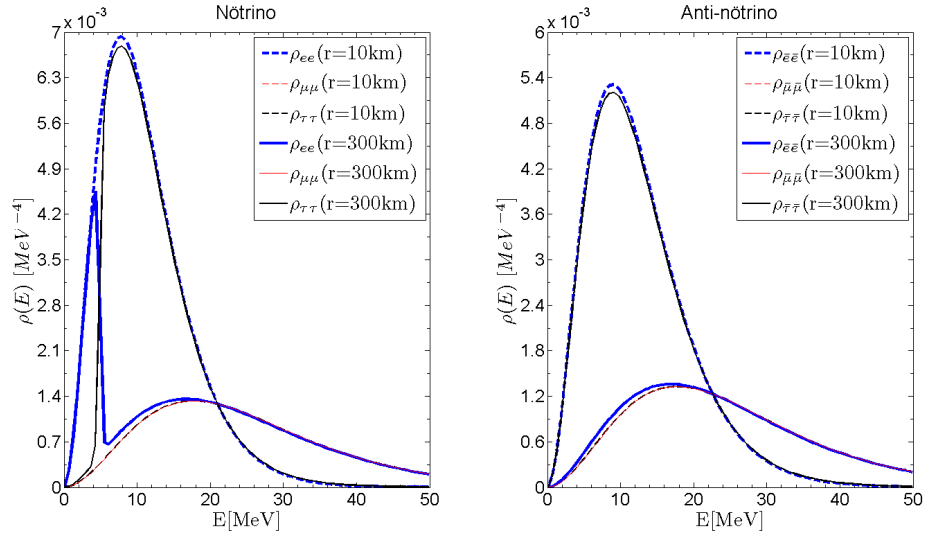
Bu çalışmada başlangıç değerlerini değiştirerek, farklı modeller için spektral ayrılma grafiklerini elde ettim. Bütün sonuçlarda parlaklık $L = 2.08194 \times 10^{51}$ MeV/km alınmıştır. Ayrıca ters hiyerarşi için kütle kare farklarının değerleri şu şekildedir: $\delta m_{21}^2 = 3.16 \times 10^{-5}$ [eV]², $\delta m_{31}^2 = -2.4 \times 10^{-3}$ [eV]² ve $\delta m_{32}^2 = -2.4316 \times 10^{-3}$ [eV]² şeklinde. Normal hiyerarşi için ise $\delta m_{32}^2 = 3.16 \times 10^{-5}$ [eV]², $\delta m_{31}^2 = 2.4 \times 10^{-3}$ [eV]² ve $\delta m_{32}^2 = 2.3684 \times 10^{-3}$ [eV]² şeklinde.



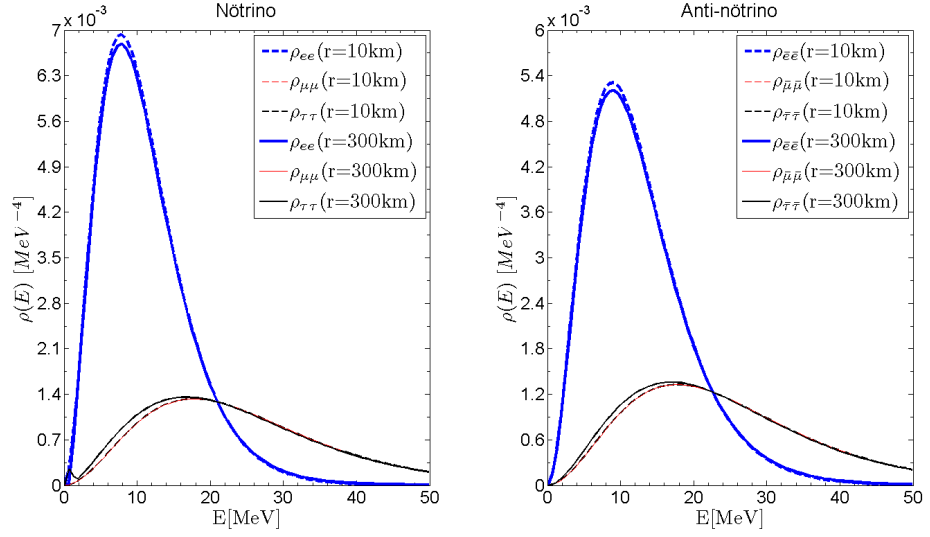
şekil 4.1: Enerji dağılım grafiklerinde kesik çizgili olanlar başlangıç durumdaki enerji dağılımları, sürekli çizgili olanlar ise son durumdaki enerji dağılımlarıdır. Hesaplar ters hiyerarşi kütle değerleri için yapılmıştır. Nötrinolar (4.2) denkleminde verilen dağılıma sahiptirler. Enerjileri 0 – 50 MeV arasındadır. Sıcaklık değerleri $T_{\nu_e} = 3.5$ MeV, $T_{\bar{\nu}_e} = 4.0$ MeV, $T_{\nu_\mu} = T_{\bar{\nu}_\mu} = T_{\nu_\tau} = T_{\bar{\nu}_\tau} = 8.0$ MeV şeklinde. Salınım açıları $\theta_{13} = 0.1541$, $\theta_{12} = \theta_{23} = 0$ şeklinde. Nötrinolarda yaklaşık 1 MeV ve 12 MeV civarında bir ayrışma olduğu gözükmemektedir. Beklenildiği gibi sadece $\theta_{13} \neq 0$ olduğu için müon nötrinosunda bir değişiklik meydana gelmemiştir. Benzer olarak anti-nötrinolarda da aynı spektral ayrılma görölmüştür.



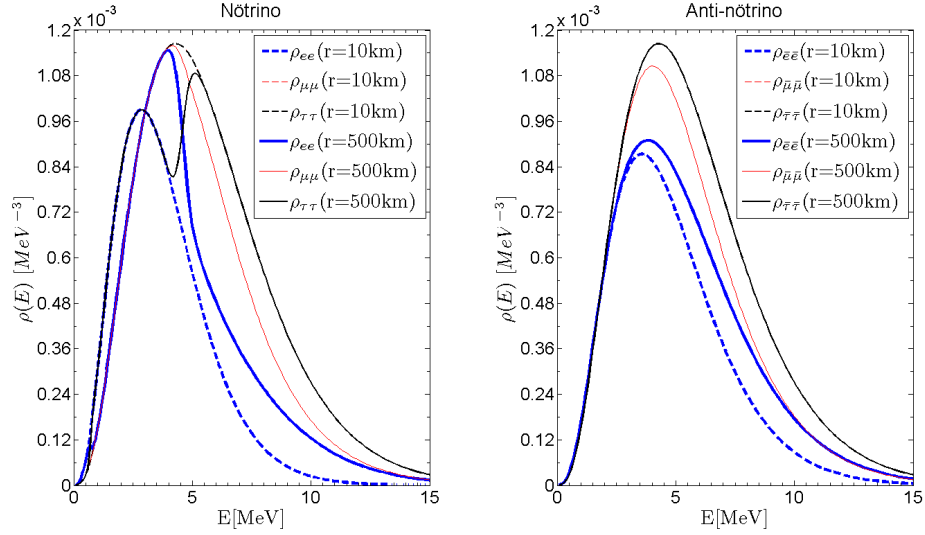
Şekil 4.2: Enerji dağılım grafiklerinde kesik çizgili olanlar başlangıç durumdaki enerji dağılımları, sürekli çizgili olanlar ise son durumdaki enerji dağılımlarıdır. Hesaplar normal hiyerarşi kütle değerleri için yapılmıştır. Nötrinolar (4.2) denkleminde verilen dağılıma sahiptirler. Enerjileri 0 – 50 MeV arasındadır. Sıcaklık değerleri $T_{\nu_e} = 3.5$ MeV, $T_{\bar{\nu}_e} = 4.0$ MeV, $T_{\nu_\mu} = T_{\bar{\nu}_\mu} = T_{\nu_\tau} = T_{\bar{\nu}_\tau} = 8.0$ MeV şeklindedir. Salınım açıları $\theta_{13} = 0.1541$, $\theta_{12} = \theta_{23} = 0$ şeklindedir. Her iki grafikte de spektral ayrışma gözükmemektedir. (4.1) numaralı şekilden tek farkı hiyerarşidir. Hiyerarşi değiştiğinde ikinci ayrışma yok olmuştur.



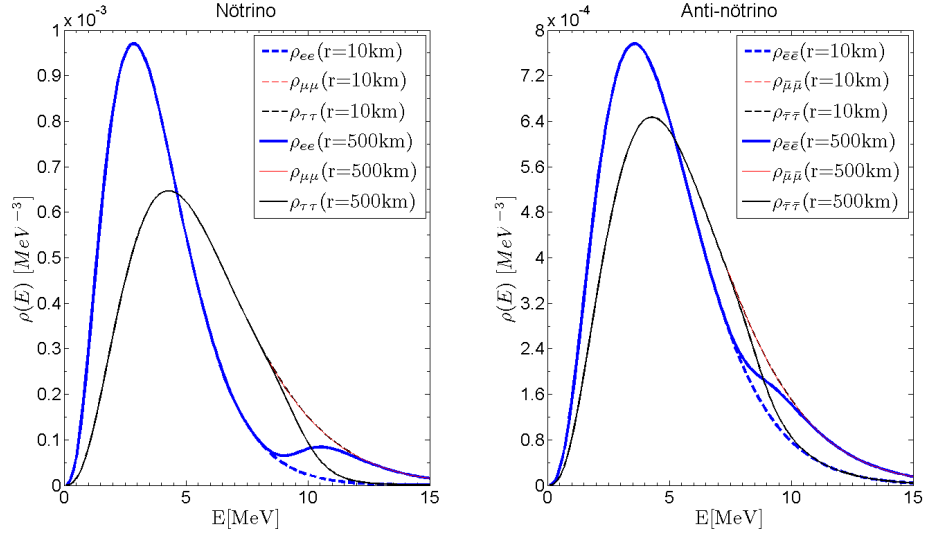
Şekil 4.3: Enerji dağılım grafiklerinde kesik çizgili olanlar başlangıç durumdaki enerji dağılımları, sürekli çizgili olanlar ise son durumdaki enerji dağılımlarıdır. Hesaplar ters hiyerarşi kütle değerleri için yapılmıştır. Nötrinolar (4.1) denkleminde verilen dağılıma sahiptirler. Enerjileri 0 – 50 MeV arasındadır. Sıcaklık değerleri $T_{\nu_e} = 3.5$ MeV, $T_{\bar{\nu}_e} = 4.0$ MeV, $T_{\nu_\mu} = T_{\bar{\nu}_\mu} = T_{\nu_\tau} = T_{\bar{\nu}_\tau} = 8.0$ MeV şeklindedir. Salınım açıları $\theta_{13} = 0.1541$, $\theta_{12} = \theta_{23} = 0$ şeklindedir. İki çeşni için Fermi-Dirac dağılımı aldığımızda, nötrinolar için yaklaşık 7 MeV civarında çok keskin bir spektral ayrışma gözükmemektedir. Anti-nötrinolarda ise çok düşük enerjilerde spektral ayrışma oluşmuştur.



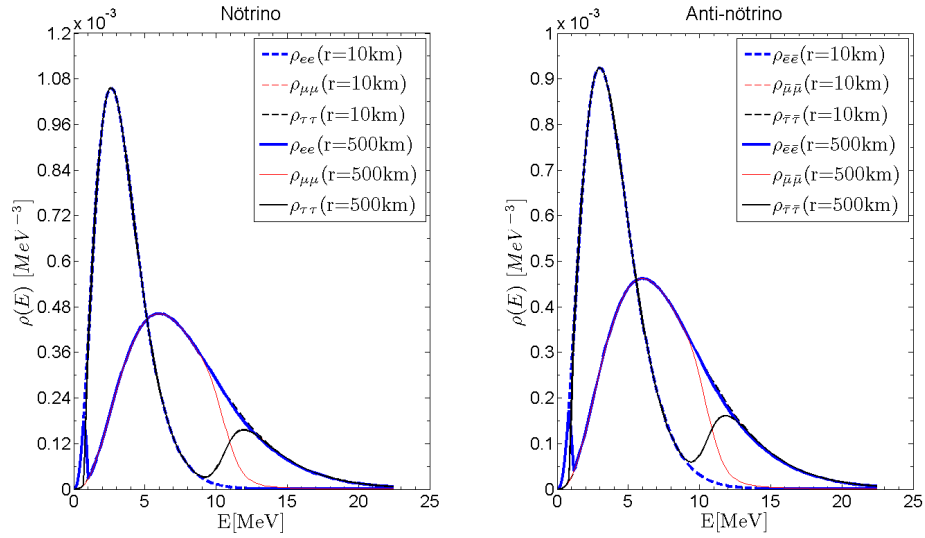
Şekil 4.4: Enerji dağılım grafiklerinde kesik çizgili olanlar başlangıç durumdaki enerji dağılımları, sürekli çizgili olanlar ise son durumdaki enerji dağılımlarıdır. Hesaplar normal hiyerarşi kütle değerleri için yapılmıştır. Nötrinolar (4.1) denkleminde verilen dağılıma sahiptirler. Enerjileri 0 – 50 MeV arasındadır. Sıcaklık değerleri $T_{\nu_e} = 3.5$ MeV, $T_{\bar{\nu}_e} = 4.0$ MeV, $T_{\nu_\mu} = T_{\bar{\nu}_\mu} = T_{\nu_\tau} = T_{\bar{\nu}_\tau} = 8.0$ MeV şeklindedir. Salınım açıları $\theta_{13} = 0.1541$, $\theta_{12} = \theta_{23} = 0$ şeklindedir. Normal dağılımda nötrinolar için 0.5 MeV civarında ufak bir değişim olmuş ancak tam anlamıyla çeşniler arası değiş-tokuş (swap) olmamıştır. Anti-nötrinolarda ise herhangi bir değişim gözükmemektedir.



Şekil 4.5: Enerji dağılım grafiklerinde kesik çizgili olanlar başlangıç durumdaki enerji dağılımları, sürekli çizgili olanlar ise son durumdaki enerji dağılımlarıdır. Hesaplar ters hiyerarşi kütle değerleri için yapılmıştır. Nötrinolar (4.2) denkleminde verilen dağılıma sahiptirler. Enerjileri 0 – 30 MeV arasındadır. Sıcaklık değerleri $T_{\nu_e} = 3.8$ MeV, $T_{\bar{\nu}_e} = 7.8$ MeV, $T_{\nu_\mu} = T_{\bar{\nu}_\mu} = T_{\nu_\tau} = T_{\bar{\nu}_\tau} = 5.7$ MeV şeklindedir. Salınım açıları $\theta_{13} = 1 \times 10^{-3}$, $\theta_{12} = \theta_{13} = 1 \times 10^{-3}$ ve $\theta_{23} = 0$ şeklindedir. Buradaki sıcaklık değerleri, [14] makalesinden alınmıştır ve ortalama kinetik enerjiden sıcaklığa dönüştürülmüştür. Makalede bahsedildiği gibi bu katsayılar, nötrinoların çeşnilerine göre parlaklıkları farklı olabilir. Bu farklılıklar da simülasyona, başlangıç yoğunluklarını uygun terimlerle çarparak eklenmiştir. Şekil 4.5 farklı bir yapıdadır. Nötrinolar için ayrışmanın öncelikle 2 MeV civarında oluştuğunu görebiliriz. Ardından bir sonraki geçiş benzeri durum yaklaşık 4 MeV civarında gerçekleşiyor ancak bu geçişin yapısı biraz farklı. Üç çeşni için yapılan bu simülasyonda yaklaşık 5 MeV civarında tau nötrinosu, elektron nötrinosu dağılımının başlangıç eğrisine otururken, elektron nötrinosu tau nötrinosunun başlangıç eğrisinin üzerine oturamıyor. Bu da spektral ayrışmanın kısmi olabileceğini göstermektedir. Bu şekiller [14] makalesinde elde edilen kısmi değiş-tokuş ile çok benzerlik göstermektedir. Anti-nötrinolar için de müon anti-nötrinosu ile elektron anti-nötrinosu arasında kısmi bir geçiş gerçekleşmiştir.



Şekil 4.6: Enerji dağılım grafiklerinde kesik çizgili olanlar başlangıç durumdaki enerji dağılımları, sürekli çizgili olanlar ise son durumdaki enerji dağılımlarıdır. Hesaplar normal hiyerarşi kütle değerleri için yapılmıştır. Nötrinolar (4.2) denkleminde verilen dağılıma sahiptirler. Enerjileri 0 – 30 MeV arasındadır. Sıcaklık değerleri $T_{\nu_e} = 3.8$ MeV, $T_{\bar{\nu}_e} = 7.8$ MeV, $T_{\nu_\mu} = T_{\bar{\nu}_\mu} = T_{\nu_\tau} = T_{\bar{\nu}_\tau} = 5.7$ MeV şeklindedir. Salınım açıları $\theta_{13} = 1 \times 10^{-3}$, $\theta_{12} = \theta_{13} = 1 \times 10^{-3}$ ve $\theta_{23} = 0$ şeklindedir. Yukarıda çizilen şekilde de farklı parlaklıklar kullanılmıştır. Nötrinolar için yaklaşık 11 MeV civarında bir geçiş bulunmaktadır. Ancak bu geçiş ters hiyerarşideki nötrinolardan (Şekil 4.5) farklı olarak elektron ve tau nötrinoları arasındadır. Benzer şekilde anti-nötrinolar için yaklaşık 8 MeV civarında elektron ve müon anti-nötrinoları arasında bir geçiş vardır.



Şekil 4.7: Enerji dağılım grafiklerinde kesik çizgili olanlar başlangıç durumdaki enerji dağılımları, sürekli çizgili olanlar ise son durumdaki enerji dağılımlarıdır. Hesaplar ters hiyerarşi kütle değerleri için yapılmıştır. Nötrinolar (4.2) denkleminde verilen dağılıma sahiptirler. Enerjileri 0 – 50 MeV arasındadır. Sıcaklık değerleri $T_{\nu_e} = 3.5$ MeV, $T_{\bar{\nu}_e} = 4.0$ MeV, $T_{\nu_\mu} = T_{\bar{\nu}_\mu} = T_{\nu_\tau} = T_{\bar{\nu}_\tau} = 8.0$ MeV şeklindedir. Salınım açıları $\theta_{13} = 1 \times 10^{-3}$, $\theta_{12} = \theta_{13} = 1 \times 10^{-3}$ ve $\theta_{23} = 0$ şeklindedir. Nötrinolar ve anti-nötrinolar için, 1 MeV ve 12 MeV civarlarında 2 ayrışma gözükmemektedir. Bu ayrışmalardan 1 MeV civarında olanlar elektron (anti)nötrinoları ile müon (anti)nötrinoları arasında gözükmemektedir. 12 MeV civarında olanlar ise müon (anti)nötrinoları ile tau (anti)nötrinoları arasında gerçekleşmektedir.

Yapılan simülasyonlarda öncelikle iki nötrino çeşnisi için inceleme yapılmış ve bu simülasyonlarda spektral ayrılma elde edilmiştir. İki nötrino çeşnisi için efektif olarak iki açı sıfır alınmıştır $\theta_{12} = \theta_{23} = 0$. Diğer açı ise boşluk salınım açısı alınmıştır. Böylelikle müon ile tau (anti)nötrinoları arasında ve elektron ile müon (anti)nötrinoları arasında herhangi bir geçişe olanak verilmeden iki çeşnili nötrino için hesap yapılmıştır. İki çeşni için spektral geçiş, şekil 4.4 dışında tüm grafiklerde açıkça gözükmemektedir. Buradaki ilk dört analiz gerçekçi değildir, çünkü bilindiği kadarıyla standart modelde üç çeşni vardır ve süpernova gibi bir ortamda elektron-nötrino etkileşimlerini almamak uygun olmaz. Bu simülasyonlar, spektral ayrılmayı daha iyi anlamak için yapılmıştır.

Üç çeşni ile yapılan simülasyonlarda ise daha gerçekçi gözüken sonuçlar elde edilmiştir. Üç çeşni ile yapılan simülasyonların hepsinde elektron-nötrino etkileşimini, efektif olarak hesaplara katılmış ve (4.2) bağıntısında verilen dağılım kullanılmıştır. Bu grafiklerden kısmi geçişlerin yanı sıra tam geçişler de görülmektedir. Farklı sonuçlara sahip olan bu grafiklerdeki en temel özellik başlangıç sıcaklıklarının ve hiyerarşinin farklı olmasıdır. Buradan da başlangıç koşullarının, spektral ayrılma için çok kritik öneme sahip olduğu sonucuna varabiliriz. Dolayısıyla Dünya'dan yapılacak süpernova nötrino gözlemlerinde, süpernova patlama modellerinin verdiği başlangıç koşullarının kritik öneme sahip olduğu söylenebilir. Spektral ayrılmanın olduğu enerji değerlerini başlangıç koşullarından analitik olarak belirlemek ise üç nötrino için şu an mümkün değildir. İleride yapmayı düşündüğümüz çalışmalarda, spektral ayrılma ile değişmezler arasındaki bağlantılar üzerine çalışmalar yürütülmesi planlanmaktadır.

5 KAYNAKLAR

- [1] K. Olive *et al.*, “Review of particle physics,” *Chin.Phys.*, vol. C38, p. 090001, 2014.
- [2] M. Kobayashi and T. Maskawa, “CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction,” *Prog. Theor. Phys.*, vol. 49, pp. 652–657, 1973.
- [3] G. M. Fuller, R. W. Mayle, J. R. Wilson, and D. N. Schramm, “Resonant neutrino oscillations and stellar collapse,” *Astrophys. J.*, vol. 322, pp. 795–803, 1987.
- [4] J. T. Pantaleone, “Neutrino oscillations at high densities,” *Phys. Lett.*, vol. B287, pp. 128–132, 1992.
- [5] Y. Pehlivan, A. B. Balantekin, and T. Kajino, “Neutrino Magnetic Moment, CP Violation and Flavor Oscillations in Matter,” *Phys. Rev.*, vol. D90, no. 6, p. 065011, 2014.
- [6] K. Hirata *et al.*, “Observation of a Neutrino Burst from the Supernova SN 1987a,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 1490–1493, 1987.
- [7] G. Raffelt, *Stars as laboratories for fundamental physics: The astrophysics of neutrinos, axions, and other weakly interacting particles*. University of Chicago Press, 1996.
- [8] H.-T. Janka, K. Langanke, A. Marek, G. Martinez-Pinedo, and B. Mueller, “Theory of Core-Collapse Supernovae,” *Phys.Rept.*, vol. 442, pp. 38–74, 2007.
- [9] V. Barger, D. Marfatia, and K. Whisnant, *The Physics of Neutrinos*. Princeton University Press, 2012.
- [10] T. Kajino, W. Aoki, M. Cheoun, T. Hayakawa, J. Hidaka, *et al.*, “Supernova neutrinos and explosive nucleosynthesis,” *AIP Conf.Proc.*, vol. 1595, pp. 84–97, 2014.
- [11] H. Duan, G. M. Fuller, J. Carlson, and Y.-Z. Qian, “Simulation of Coherent Non-Linear Neutrino Flavor Transformation in the Supernova Environment. 1. Correlated Neutrino Trajectories,” *Phys.Rev.*, vol. D74, p. 105014, 2006.
- [12] Y. Pehlivan, A. Balantekin, T. Kajino, and T. Yoshida, “Invariants of Collective Neutrino Oscillations,” *Phys.Rev.*, vol. D84, p. 065008, 2011.

- [13] G.-L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, and A. Mirizzi, “Self-induced neutrino transitions in supernovae,” *J.Phys.Conf.Ser.*, vol. 110, p. 082012, 2008.
- [14] B. Dasgupta, A. Mirizzi, I. Tamborra, and R. Tomas, “Neutrino mass hierarchy and three-flavor spectral splits of supernova neutrinos,” *Phys.Rev.*, vol. D81, p. 093008, 2010.
- [15] H. Duan, G. M. Fuller, and Y.-Z. Qian, “Stepwise spectral swapping with three neutrino flavors,” *Phys. Rev.*, vol. D77, p. 085016, 2008.
- [16] G. Sigl, R. Tomas, A. Esteban-Pretel, S. Pastor, A. Mirizzi, G. G. Raffelt, and P. D. Serpico, “Collective flavor transitions of supernova neutrinos,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, vol. 188, pp. 101–106, 2009.
- [17] B. Dasgupta, A. Dighe, G. G. Raffelt, and A. Yu. Smirnov, “Multiple Spectral Splits of Supernova Neutrinos,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 051105, 2009.
- [18] H. Duan, G. M. Fuller, and Y.-Z. Qian, “Collective Neutrino Oscillations,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 60, pp. 569–594, 2010.
- [19] A. Friedland, “Self-refraction of supernova neutrinos: mixed spectra and three-flavor instabilities,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, p. 191102, 2010.
- [20] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [21] C. Giunti and C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2007.
- [22] T. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*. Contemp. Concepts Phys., Harwood Academic, 1981.
- [23] W. Pauli, *Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie*. No. pt. 2 in Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie, F. Vieweg, 1961.
- [24] F. L. Wilson, “Fermi’s Theory of Beta Decay,” *American Journal of Physics*, vol. 36, pp. 1150–1160, 1968.
- [25] C. L. Cowan, F. Reines, F. B. Harrison, H. W. Kruse, and A. D. McGuire, “Detection of the free neutrino: A Confirmation,” *Science*, vol. 124, pp. 103–104, 1956.
- [26] B. Pontecorvo, “Mesonium and antimesonium,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 6, p. 429, 1957.
- [27] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, “Remarks on the unified model of elementary particles,” *Prog. Theor. Phys.*, vol. 28, p. 870, 1962.
- [28] C. Kraus *et al.*, “Final results from phase ii of the mainz neutrino mass search in tritium β decay,” *Eur. Phys. J.*, vol. C40, pp. 447–468, 2005.
- [29] J. Hewett, H. Weerts, R. Brock, J. Butler, B. Casey, *et al.*, “Fundamental Physics at the Intensity Frontier,” *FERMILAB-CONF-12-879-PPD*, 2012.

- [30] J. Formaggio and G. Zeller, “From eV to EeV: Neutrino Cross Sections Across Energy Scales,” *Rev.Mod.Phys.*, vol. 84, p. 1307, 2012.
- [31] R. Sawyer, “Speed-up of neutrino transformations in a supernova environment,” *Phys.Rev.*, vol. D72, p. 045003, 2005.
- [32] M. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Quantum Field Theory and the Standard Model, Cambridge University Press, 2013.
- [33] M. Bellac and P. de Forcrand-Millard, *Quantum Physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [34] J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 2011.
- [35] R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*. Springer US, 2012.
- [36] A. Balantekin and Y. Pehlivan, “Neutrino-Neutrino Interactions and Flavor Mixing in Dense Matter,” *J.Phys.*, vol. G34, pp. 47–66, 2007.
- [37] G. Sigl and G. Raffelt, “General kinetic description of relativistic mixed neutrinos,” *Nucl. Phys.*, vol. B406, pp. 423–451, 1993.
- [38] T. Totani, K. Sato, H. E. Dalhed, and J. R. Wilson, “Future detection of supernova neutrino burst and explosion mechanism,” *Astrophys. J.*, vol. 496, pp. 216–225, 1998.
- [39] T. A. Thompson, A. Burrows, and P. A. Pinto, “Shock breakout in core-collapse supernovae and its neutrino signature,” *Astrophys.J.*, vol. 592, p. 434, 2003.
- [40] M. T. Keil, G. G. Raffelt, and H.-T. Janka, “Monte Carlo study of supernova neutrino spectra formation,” *Astrophys. J.*, vol. 590, pp. 971–991, 2003.
- [41] T. Kajino, W. Aoki, A. Balantekin, M. Cheoun, T. Hayakawa, *et al.*, “Supernova Relic Neutrinos And The Supernova Rate Problem: Analysis Of Uncertainties And Detectability Of Onemg And Failed Supernovae ,” *AIP Conf.Proc.*, vol. 1604, pp. 193–200, 2014.
- [42] B. Dasgupta and A. Dighe, “Collective three-flavor oscillations of supernova neutrinos,” *Phys. Rev.*, vol. D77, p. 113002, 2008.
- [43] A. S. Dighe and A. Yu. Smirnov, “Identifying the neutrino mass spectrum from the neutrino burst from a supernova,” *Phys. Rev.*, vol. D62, p. 033007, 2000.
- [44] P. A. M. Dirac, “The Quantum Theory of the Electron,” *j-PROC-R-SOC-LOND-SER-A-MATH-PHYS-SCI*, vol. 117, no. 778, pp. 610–624, 1928.

A BİRİMLER

Aşağıda, kullanacağım birimler ve birbirlerine dönüşümleri vardır. Doğal birimleri kullandığım için ($\hbar = c = k_B = 1$) simülasyonda bu dönüşümlere ihtiyacım olacaktır. Aşağıda simgeler şunlardır. h =Plank Sabiti, c =Işık Hızı, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, k_B =Stefan-Boltzmann sabiti şeklindedir.

$$h = 6.626069 \times 10^{-34} [joule \times second] \quad (A.1)$$

$$h = 4.135667 \times 10^{-15} [eV \times second] \quad (A.2)$$

$$\hbar = 1.054572 \times 10^{-34} [joule \times second] \quad (A.3)$$

$$\hbar = 6.582119 \times 10^{-16} [eV \times second] \quad (A.4)$$

$$c = 29979246 [meter/second] \quad (A.5)$$

$$\hbar \times c = 1.973270 \times 10^{-7} [eV \times meter] \quad (A.6)$$

$$k_B = 5.670373 \times 10^{-8} [joule/(meter^2 \times second \times Kelvin^4)] \quad (A.7)$$

$$meter = 5.067731 \times 10^{+6} [eV^{-1}] \quad (A.8)$$

$$meter = 3.337653 \times 10^{-9} [second] \quad (A.9)$$

$$(meter)^{-1} = 1.973270 \times 10^{-7} [eV] \quad (A.10)$$

$$eV = 5.067731 \times 10^{+6} [meter^{-1}] \quad (A.11)$$

$$eV = 1.782662 \times 10^{-36} [kilogram] \quad (A.12)$$

$$eV = 1.519268 \times 10^{+15} [second^{-1}] \quad (A.13)$$

$$eV = 1.602177 \times 10^{-12} [erg] \quad (A.14)$$

$$eV = 1.160451 \times 10^{+4} [Kelvin] \quad (A.15)$$

$$(eV)^{-1} = 6.582119 \times 10^{-16} [second] \quad (A.16)$$

$$(eV)^{-1} = 1.973270 \times 10^{-7} [meter] \quad (A.17)$$

$$second = 29979246 [meter] \quad (A.18)$$

$$second = 1.519268 \times 10^{+15} [eV^{-1}] \quad (A.19)$$

$$(second)^{-1} = 6.582119 \times 10^{-16} [eV] \quad (A.20)$$

$$kilogram = 5.609589 \times 10^{+35} [eV] \quad (A.21)$$

$$erg = 6.241509 \times 10^{+11} [eV] \quad (A.22)$$

$$Kelvin = 8.617343 \times 10^{-5} [eV] \quad (A.23)$$

B KLEIN-GORDON DENKLEMİ

Kauntum mekaniğinde görelili olmayan durumların çözümü için Schrödinger denklemi kullanılır. Schrödinger denklemi parçacıkların düşük hızlardaki enerji seviyelerini ve dalga fonksiyonlarının bulunmasını sağlar.

$$\mathcal{H}\psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{-\hbar}{2m} \nabla^2 \psi(x, t) + V(x, t) \psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (\text{B.2})$$

Burada $\mathcal{H}$ Hamiltonyen, $\psi(x, t)$ dalga fonksiyonu, $V(x, t)$ potansiyel kısmıdır.

Yüksek hızlara çıkıldığında artık klasik enerji ifadesinden görelili enerji ifadesine geçilir.

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (\text{B.3})$$

Burada ve bu tez çalışmasının geriye kalan tüm kısımlarında doğal birimler ($c = 1$, $\hbar = 1$) kullanılacaktır ve sonuçlar değerlendirilirken gerekli birim dönüşümleri yapılacaktır. Görelili mekanik 4-vektör notasyonuna geçtiğimizde (B.3) denklemi şu şekilde yazılır.

$$P^\mu P_\mu = m^2 \quad (\text{B.4})$$

Burada P^μ 4-momentum; $P^\mu = (E, P^1, P^2, P^3)$ şeklinde tanımanır. $P^\mu P_\mu$ iç çarpımını tanımlayan metrik $g_{\mu\nu}$ Minkowski metriğidir.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Klasik mekanikten kuantum mekaniğine giderken şu şekilde alınır.

$$P_\mu \rightarrow i\partial_\mu \quad (\text{B.6})$$

Burada ∂_μ ifadesi konum ve zaman türevi olarak şöyle tanımlıdır.

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_i \equiv \vec{\nabla} \quad (\text{B.7})$$

O halde görelelik için yazdığımız denklemlerden kuantum mekaniğine geçelim.

$$P^\mu P_\mu = i\partial_\mu(i\partial^\mu) = m^2 \quad (\text{B.8})$$

$$-\partial_\mu\partial^\mu\psi(x,t) = m^2\psi(x,t) \quad (\text{B.9})$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) + \nabla^2\psi(x,t) - m^2\psi(x,t) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$(\square + m^2)\psi(x,t) = 0 \quad (\text{B.11})$$

Burada (B.9), (B.10), (B.11) denklemlerine Klein-Gordon denklemi denir. Klein-Gordon denklemi zamanın ve konumun ikinci türevlerine bağlı olan bir denklemdir. Bu üç ifade aynı denklemin 3 farklı notasyonda yazılmasıdır. (B.11) denklemindeki $\square$, kutu operatörü veya d'Alembert operatörüdür ve $\square = \partial_\mu\partial^\mu$ olarak tanımlanır.

C DIRAC DENKLEMİ

Klein-Gordon denklemindeki negatif olasılık değerlerini vermeyen ve aynı zamanda fermiyonlar (spin $\frac{1}{2}$) için de geçerli olan bir denklem, 1928 yılında Dirac tarafından yazılmıştır [44]. Bu denklemi çıkarmak için Klein-Gordon denklemini (B.8) köklerine ayırıp herhangi birini seçebiliriz.

$$P^\mu P_\mu - m^2 = (\beta^\nu P_\nu + m)(\gamma^\sigma P_\sigma - m) = 0 \quad (\text{C.1})$$

Elde ettiğimiz ifadenin sağ tarafını açarsak, $\beta^\nu = \gamma^\sigma$ olması gerektiği gözükür. Tekrar yazalım.

$$P^\mu P_\mu - m^2 = \gamma^\nu \gamma^\sigma P_\nu P_\sigma - m^2 = 0 \quad (\text{C.2})$$

Denklem (C.2) açıkça yazılırsa γ^ν 'nin uyması gereken ifadeler çıkar. γ^ν ifadeleri Clifford cebri oluşturur.

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{C.3})$$

Clifford cebri oluşturulan γ^μ ifadelerine gamma matrisleri, $\{\bullet, \bullet\}$ parantezine de anti-komütasyon işlemi denir. Şimdi (C.1) denklemini tekrar yazalım.

$$P^\mu P_\mu - m^2 = (\gamma^\nu P_\nu + m)(\gamma^\sigma P_\sigma - m) = 0 \quad (\text{C.4})$$

Denklemin sağ tarafındaki ifadeden bir tanesi seçilebilir. Yaygın olarak $(\gamma^\sigma P_\sigma - m)$ denklemi seçilir. Bu denklemi (B.6) ifadesini kullanarak konum uzayında yazalım.

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\psi(x) = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$(i\rlap{\not{D}} - m)\psi(x) = 0 \quad (\text{C.6})$$

(C.5) ve (C.6) denklemlerine Dirac denklemi denir ve bu iki ifade de aynı denklemdir. (C.6) denkleminde Feynman kesme (slash) notasyonu kullanılmıştır ve $\gamma^\mu \partial_\mu = \rlap{\not{D}}$ şeklinde tanımlıdır. Genel ifadesi ise herhangi bir a 4-vektörü için $\rlap{\not{a}} = \gamma^\mu a_\mu$ şeklinde tanımlanır. Burada $\psi(x)$ spinörünün, 4 bileşenli sütun matrisi şeklinde temsili vardır ve Dirac spinörü adı verilir. Spinör ismi, Lorentz dönüşümleri altında spinör gibi dönüşmesinden dolayıdır. Ayrıca spinörün argümanı $x \equiv x^\mu$, 4-vektör konum-zamanıdır.