T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NÜMERİK YARIGRUBUN TEĞET KONİSİNİN DEĞİŞMEZLERİ VE DÜZENLİLİK İNDEKSİ

DOKTORA TEZİ

EMRE ÇİFTLİKLİ

Matematik

Tez Danışmanı: PROF. DR. SEFA FEZA ARSLAN

Temmuz-2023

ÖNSÖZ

Tezi hazırlarken problemin belirlenmesinden tezin yazımına kadar olan süreçte bilgilerinden ve tecrübelerinden yararlandığım, çalışmalarımda bakış açısı, sabrı ve hoşgörüsüyle bana rehberlik eden değerli danışman hocam Prof.Dr.Sefa Feza Arslan'a en büyük teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam süresince önemli fikirleriyle ve önerileriyle çalışmalarıma katkıda bulunan Tez İzleme Komitesi üyeleri sayın hocalarım Prof. Dr. Atabey Kaygun ve Dr. Öğr. Üyesi Sevan Bedikyan'a teşekkürü borç bilirim.

Her zaman desteklerini yanımda hissettiğim ve bugünlere gelmemde maddi ve manevi emeği olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca "2211 Yurt İçi Doktora Bursu" ile destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Temmuz, 2023

İçindekiler

SEMBOL LİSTESİ

k^b	:	b-boyutlu afin uzay
$V(f_1, f_2, \ldots, f_s)$	:	$f_1, \ldots, f_s$ polinomlarının oluşturduğu afin varyete
$I(V)$	:	V varyetesinin tanımlayıcı ideali
$k[x_1, x_2, \ldots, x_b]/I(V)$	:	V varyetesinin koordinat halkası
f_*	:	f polinomunun en küçük dereceli homojen bileşeni
I_*	:	I idealinin teğet konisi
$\langle n_1, n_2, \ldots, n_b \rangle$	:	$n_1, n_2, \ldots, n_b$ tarafından üretilmiş yarıgrup
$m(S)$	:	S'nin katlılığı
$F(S)$	:	S'nin Frobenius sayısı
$G(S)$	:	S'nin boşluk noktalarının kümesi
$g(S)$	:	S'nin boşluk noktalarının sayısı
$\mu(I)$	:	I idealinin minimal üreteç kümesinin kardinalitesi
$\mathcal{H}(R, n)$	:	R halkasının Hilbert fonksiyonu
$Hilb_R(t)$	:	R halkasının Hilbert serisi
$Ap(S, n)$	:	S'nin n'ye göre Apery kümesi
$PF(S)$	:	S'nin pseudo-Frobenius elemanları
$T(S)$	:	S'nin torsiyon elemanlarının kümesi
$ord(s)$	:	s'nin mertebesi
$tord(s)$	:	s'nin torsiyon mertebesi
$gr_m(R)$	:	R halkasının ilişkili dereceli halkası
$H_k = \langle \alpha + k \rangle$	:	k ile ötelenmiş yarıgrup
$\{H_k\}_{k \in \mathbb{N}}$	:	H nümerik yarıgrubuna bağlı ötelenmiş aile

NÜMERİK YARIGRUBUN TEĞET KONİSİNİN DEĞİŞMEZLERİ VE DÜZENLİLİK İNDEKSİ

(Doktora Tezi)

Emre Çiftlikli

MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2023

ÖZET

Bu tezde nümerik yarıgrupların düzenlilik indekslerinin nasıl değiştiğini çalıştık. Bir yarıgrubun düzenlilik indeksi, karşılık gelen yerel halkanın Hilbert fonksiyonunun, yarıgrubun katlılığına eşit olmaya başladığı değerdir ve geometrik açıdan önemli bir değişmezdir. Arf kapanışı aynı olan halkaların düzenlilik indekslerine ilişkin Arslan ve Sertöz tarafından öne sürülen bir sanıya karşıt örnek bulduk. $S_1 \subset S_2$ iken çeşitli durumlarda yarıgrupların düzenlilik indeksinin nasıl değiştiğine ilişkin sonuçların yanısıra, ötelenmiş yarıgrup ailelerinde düzenlilik indeksinin nasıl değiştiğine ilişkin sonuçlar da elde ettik.

Bilim Kodu **: 20401**

Anahtar Kelimeler : Tekterimli eğriler, nümerik yarıgruplar, Hilbert Fonksiyonu, Arf yarıgrubu, düzenlilik indeksi, ötelenmiş aile.

Sayfa Adedi **:** 39

Tez Yöneticisi **:** Prof. Dr. Sefa Feza ARSLAN

Invariants of the Tangent Cone of a Numerical Semigroup and Regularity Index

(PhD Thesis)

Emre Çiftlikli

MIMAR SINAN FINE ARTS UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

July 2023

ABSTRACT

In this thesis, we study the how regularity indices of the numerical semigroups change. The regularity index of a numerical semigroup is the point where the Hilbert function of the associated local ring becomes equal to the multiplicity of the semigroup and it is an important geometric invariant. We give a counter example to a conjecture proposed by Arslan and Sertöz, which is related about the regularity indices of the kocal rings having the same Arf closure. We also determined some results concerning how the the regularity indexes of the semigroups satisfying $S_1 \subset S_2$ change under certain conditions. Moreover, we also determined some results concerning how the the regularity indices of the shifted families change.

Science Code **: 20401**

Key Words **:** Monomial Curve, Numerical Semigroup, Hilbert function, Arf semigroup, Regularity index, Shifted Family.

Page Number **:** 39

Supervisor **:** Prof. Dr. Sefa Feza ARSLAN

Bölüm 1

GİRİŞ

Bu tezde çalışacağımız temel nesneler nümerik yarıgruplardır. $n_1, n_2, \ldots, n_b$ aralarında asal olmak üzere,

$$S = \langle n_1, n_2, \ldots, n_b \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{b} a_i n_i, a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

bir nümerik yarıgrup ve

$$k[[S]] = k[[t^s | s \in S]] = k[[t^{n_1}, \cdots, t^{n_b}]] \subseteq k[[t]]$$

ise S nümerik yarıgrubuna karşılık gelen yerel halkadır. Bir (R, m) yerel halkasının Hilbert fonksiyonu, o halkanın ilgili dereceli halkasının, bir başka değişle

$$gr_m(R) = R/m \oplus m/m^2 \oplus m^2/m^3 \oplus ...$$

dereceli halkasının Hilbert fonksiyonudur. Bir yarıgrubun düzenlilik indeksi ile $gr_m(k[[t^{n_1}, t^{n_2}, \cdots, t^{n_b}]])$ halkasının Hilbert fonksiyonunun n_1 değerine eşit olmaya başladığı noktayı kastediyoruz ve $i(S)$ ile gösteriyoruz. Benzer biçimde, bir (R, m) yerel halkasının düzenlilik indeksi ile de $gr_m(R)$ halkasının Hilbert fonksiyonunun halkanın katlılığına eşit olmaya başladığı noktayı tanımlıyoruz ve $i(R)$ ile gösteriyoruz. Dolayısıyla, $S = \langle n_1, n_2, \ldots, n_b \rangle$ yarıgrunun düzenlilik indeksi veya $R = k[[t^{n_1}, \cdots, t^{n_b}]]$ halkasının düzenlilik indeksi aynı değişmezi göstermektedir.

Soru. Arf kapanışı aynı olan halkaların düzenlilik indekslerine ilişkin Arslan ve Sertöz tarafından öne sürülen ve düzenlilik indeksinin tekillliğin bir ölçüsü olarak değerlendirilmesi fikrine dayanan sanıya odaklanıyoruz:

2. bölümde tezde kullanacağımız temel cebirsel altyapıyı vereceğiz. Dereceli halka, Hilbert fonksiyonu, Cohen-Macaulay, Gorenstein ve tam kesişim halkası gibi kullanacağımız temel kavramları tanımlıyoruz.

3. bölümde nümerik yarıgruplar ile ilgili temel tanımları ve literatürü vereceğiz. Apery kümesi, Apery tablosu gibi nümerik grupları çalışmak için gerekli araçlar

yanında, Arf yarıgrubu ve Arf kapanışı kavramlarını da tanımlayacağız.

4. $S_1 \subseteq S_2$ iken çeşitli durumlarda yarıgrupların düzenlilik indeksinin nasıl değiştiğine ilişkin sonuçlar veriyoruz. Arslan ve Sertöz'ün sanısının genelde doğru olmadığını bir karşı örnek ile gösteriyoruz. Ayrıca, ötelenmiş yarıgrup ailelerinde düzenlilik indeksinin nasıl değiştiğine ilişkin önemli bir sonuç sunuyoruz.

Bölüm 2

COHEN-MACAULAY HALKALAR VE HİLBERT FONKSİYONU

Bu bölümde tezde kullanacağımız temel cebirsel tanımları vereceğiz.

2.1 Cohen-Macaulay Halkaları

Tanım 2.1.1 [3] R bir değişmeli halka olsun. $\{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq R$ kümesi şu iki koşulu sağlıyorsa $\{a_1, \cdots, a_n\}$ kümesine düzenli dizi denir:
i) $R \neq \langle a_1, \cdots, a_n \rangle R$
ii) a_1, R'de sıfır bölen değildir ve her $j \in \{2, \cdots n\}$ için a_j, $R/\langle a_1, \cdots a_{j-1} \rangle$'de sıfır bölen değildir.

Tanım 2.1.2 [3] R bir Noetherian halka ve I, R'nin bir ideali olsun. I içindeki herhangi bir maksimal düzenli dizinin uzunluğuna I idealinin derinliği denir.

Tanım 2.1.3 [3] R bir halka ve P, R'nin bir asal ideali olsun. $P_l \subsetneq \cdots \subsetneq P_1 \subsetneq P_0 = P$ kesin artan idealler zincirlerinin l uzunluğunun supremumuna P idealinin yüksekliği denir. Ayrıca R'nin herhangi bir I ideali için I'yı kapsayan asal ideallerin yüksekliklerinin infimumuna I'nın yüksekliği denir.

Not 2.1.4 R bir halka, I R'nin bir ideali ve $\mu(I)$ I'nın minimal üreteç kümesinin eleman sayısı olmak üzere ;

$$\text{derinlik(I)} \leq \text{yükseklik(I)} \leq \mu(I)$$

olur.

Tanım 2.1.5 [3] R Noetherian bir halka olsun. Eğer R'nin her I ideali için

$$\text{derinlik(I)} = \text{yükseklik(I)}$$

oluyorsa R'ye Cohen-Macaulay halkası denir.

Aşağıdaki teorem sayesinde, yukarıdaki eşitliğin sadece maksimal ideallerde sağlandığını kontrol ederek halkanın Cohen-Macaulay olduğunu söyleyebiliriz:

Teorem 2.1.6 [11] R Noetherian bir halka olsun. Aşağıdakiler denktir:
a) R Cohen-Macaulay bir halkadır.
b) R'nin her $\mathfrak{m}$ maksimal ideali için, $derinlik(\mathfrak{m}) = ykseklik(\mathfrak{m})$.
c) R'nin her $\mathfrak{p}$ asal ideali için, $derinlik(\mathfrak{p}) = ykseklik(\mathfrak{p})$.
d) R'nin her I ideali için, $derinlik(I) = ykseklik(I)$.

2.2 Gorenstein Halkalar

Özel Cohen-Macaulay halkalar olan Gorenstein halkaları da bu tezde ilgineceğimiz önemli cebirsel nesnelerdir.

Tanım 2.2.1 [35] $(R, \mathfrak{m})$ d boyutlu bir yerel halka ve I, R'nin bir m-primary ideali olsun. I'nın herhangi bir d elemanlı üreteç kümesine $(R, \mathfrak{m})$'nin parametreler sistemi denir.

Tanım 2.2.2 [3] Bir öz ideal, kendisini kapsayan iki öz idealin kesişimi olarak yazılamıyorsa, o ideale indirgenemez denir.

Tanım 2.2.3 [35] $(R, \mathfrak{m})$ bir yerel halka olsun. Eğer R'nin her parametreler sistemi bir indirgenemez ideal üretiyorsa R'ye Gorenstein denir.

Özel bir Gorenstein halkası olan tam kesişim halkasının tanımını da verelim.

Tanım 2.2.4 [34] Bir $(R, \mathfrak{m})$ yerel halkası, bir düzenli yerel halkanın düzenli dizi ile bölüm halkası olarak verilebiliyorsa, o halkaya tam kesişim halkası denir.

Noetherian yerel halkalar, aşağıdaki kapsama ilişkisine sahiptir:

$$\text{Tam kesişim halkaları} \subset \text{Gorenstein halkaları} \subset \text{Cohen-Macaulay halkaları}$$

2.3 Dereceli Halkalar, Hilbert Fonksiyonu ve Düzenlilik İndeksi

Tanım 2.3.1 [22] R bir halka olsun. Eğer R halkası

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$$

olacak şekilde R_i değişmeli gruplarının direkt toplamı şeklinde yazılabiliyor ve her $i, j \geq 0$ için $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ oluyorsa, R'ye dereceli halka denir. R_i gruplarının elemanlarına R'nin derecesi i olan homojen elemanları denir. Homojen elemanlar tarafından üretilen ideale ise homojen ideal denir.

Her $f \in R$ elemanı $f = f_0 + f_1 + \cdots$, $f_i \in R_i$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Buradaki f_i'lere, f'nin homojen bileşenleri denir.

Tanım 2.3.2 [22]

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$$

bir dereceli halka olsun. Eğer M modülü

$$M = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} M_i$$

olacak şekilde $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$ koşulunu sağlayan Abelyan grupların direkt toplamı şeklinde yazılabiliyorsa M'ye R üzerinde dereceli modül denir.

Tanım 2.3.3 [22] M, $k[x_1, \cdots, x_n]$ üzerinde sonlu üretilmiş bir dereceli modül olsun.

$$H_M(i) := dim_k M_i$$

nümerik fonksiyonuna M'nin Hilbert fonksiyonu denir.

Bir (R, m) yerel halkasının Hilbert fonksiyonunu tanımlamak için onunla bir dereceli halka ilişkilendirilir. R'nin maksimal ideal m'ye göre ilişkili dereceli halkası olarak adlandırılan ve $gr_m(R)$ ile gösterilen bu halka

$$gr_m(R) = R/m \oplus m/m^2 \oplus m^2/m^3 \oplus ...$$

biçiminde tanımlanır. Böylece, (R, m) yerel halkasının Hilbert fonksiyonunu, bu ilişkili dereceli halkanın Hilbert fonksiyonu olarak tanımlarız:

$$H_R(i) = H_{gr_m(R)}(i) = dim_{R/m} m^i/m^{i+1} = dim_k m^i/m^{i+1}$$

Bu tezde Krull boyutu 1 olan (R, m) yerel halkalarına odaklanacağız. Bu durumda, yeterince büyük i değerleri için $H_R(i) = e$ olur ve e, R'nin katlılığıdır. Bu da düzenlilik indeksi tanımını yapmamızı mümkün kılar.

Tanım 2.3.4 [18] (R, m) boyutu 1 ve katlılığı e olan yerel halka olsun.

$$i(R) = Min\{i \;|H_R(i) = e\}$$

sayısına R'nin düzenlilik indeksi denir.

Krull boyutu 1 olan (R, m) yerel halkaları ile ilgili herhangi bir soruyu çalışmak için başvurabileceğimiz temel nesneler tekterimli eğriler veya nümerik yarıgruplardır. Düzenlilik indeksi problemine odaklanmak için de bu nesnelerden yararlanacağımızdan, bu nesneleri ve yerel halkalar ile ilişkilerini anlamamız gerekir.

Bölüm 3

TEKTERİMLİ EĞRİLER VE NÜMERİK YARIGRUPLAR

Bu bölümde tekterimli eğrileri, nümerik yarıgrupları ve Krull boyutu 1 olan (R, m) yerel halkaları ile ilişkilerini inceleyip, nümerik yarıgruplara ilişkin detaylı bir literatür vereceğiz.

3.1 Tekterimli Eğriler

Temel geometrik nesnelerimiz,, afin uzaydaki bir boyutlu özel eğriler olan tekterimli eğrilerdir.

Tanım 3.1.1 [19] k bir cisim ve n bir pozitif doğal sayı olmak üzere

$$k^b = \{(a_1, \cdots, a_b) \ \mid \ a_1, \cdots, a_b \in k\}$$

kümesine k cismi üzerinde tanımlı n-boyutlu afin uzay denir.

Tanım 3.1.2 [19] k bir cisim ve $f_1, \cdots, f_s \in k[x_1, \cdots, x_n]$ olmak üzere,

$$\{(a_1, \cdots, a_n) \in k^n \ \mid \ \forall\, 1 \leq i \leq s, f_i(a_1, \cdots, a_n) = 0\}$$

kümesine $f_1, \cdots, f_s$ tarafından belirlenen afin varyete denir.

Tanım 3.1.3 [19] $V \subseteq k^n$ bir afin varyete olmak üzere

$$I(V) = \{f \in k[x_1, \cdots, x_n] \ \mid \ \forall (a_1, \cdots, a_n) \in V, f(a_1, \cdots, a_n) = 0\}$$

kümesi bir idealdir ve bu ideale V'nin tanımlayıcı ideali denir.

Tanım 3.1.4 [19] $k[x_1, \cdots, x_n]/I(V)$ halkasına V varyetesinin koordinat halkası denir.

Tanım 3.1.5 [19] k^b afin uzayında, $n_1 < ... < n_b$ pozitif tamsayılar olmak üzere

$$x_1 = t^{n_1}, x_2 = t^{n_2}, ..., x_b = t^{n_b}$$

parametrizasyonu ile verilen eğriye tekterimli eğri denir.

3.2 Nümerik Yarıgruplar

Her tek terimli eğri bir nümerik yarıgruba karşılık gelir. Bu bize geometri ile aritmetik arasında gidip gelme olanağı sunar. Bu ilişkiyi görmek için sırasıyla yarıgrup, monoid ve nümerik yarıgrup kavramlarını tanımlayalım.

Tanım 3.2.1 [37] S boştan farklı bir küme ve "$+$" S kümesi üzerinde birleşmeli bir ikili işlem olsun. Bu durumda $(S, +)$ ikilisine yarıgrup denir. Eğer her $s \in S$ için $0+s = s+0 = s$ olacak şekilde bir $0 \in S$ elemanı varsa $(S, +)$ ikilisine monoid denir.

Tanım 3.2.2 [37] $S \subseteq \mathbb{N}$ bir yarıgrup olsun. Eğer

- $0 \in S$
- S'nin tümleyeni, (S^c), sonlu

koşulları sağlanıyorsa, S'ye nümerik yarıgrup denir.

Tanım 3.2.3 [37] $A = \{n_1, \cdots, n_b\} \subseteq \mathbb{N}$ ve $OBEB(A) = 1$ olsun.

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 n_1 + \cdots + \lambda_b n_b \ \mid \ \lambda_1, \cdots, \lambda_b \in \mathbb{N}\}$$

kümesi bir nümerik yarıgruptur. Bu yarıgruba A'nın ürettiği nümerik yarıgrup denir ve $\langle n_1, \cdots, n_b \rangle$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.4 [37] $M \neq \{0\}$, $\mathbb{N}$'nin bir alt monoidi olsun. O zaman M bir nümerik yarıgruba izomorftur.

Tanım 3.2.5 $S = \langle n_1, \cdots, n_b \rangle$ nümerik yarıgrubunun üreteçleri, her
$1 \leq i \leq b$ için $n_i \notin \langle n_1, \cdots, n_{i-1}, n_{i+1}, \cdots, n_b \rangle$ koşulunu sağlıyorsa,
$\{n_1, \cdots, n_b\}$ kümesine S'nin minimal üreteç kümesi denir.

Lemma 3.2.6 [37] S bir nümerik yarıgrup ve $S^* = S - \{0\}$ olsun. O zaman $S^* \setminus (S^* + S^*)$ kümesi S'nin bir üreteç kümesidir. Ayrıca, S'nin her üreteç kümesi $S^* \setminus (S^* + S^*)$ kümesini kapsar.

Kanıt. $s \in S^*$ olsun. Eğer $s \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$ ise $s = x + y$ olacak şekilde $x, y \in S^*$ vardır ve $x, y < s$ olur. Bu prosedürü ardarda uygulayarak sonlu adım sonunda $s = s_1 + \cdots + s_n$ olacak şekilde $s_1, \cdots, s_n \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ elemanlarını elde ederiz. Bu yüzden $S^* \setminus (S^* + S^*)$, S'nin bir üreteç kümesidir. A, S'nin bir üreteç kümesi olsun. $x \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ alalım. $x = \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_n s_n$ olacak şekilde $s_1, \cdots, s_n \in A$ ve $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ vardır. $x \notin S^* + S^*$ olduğundan $x = s_i$ olacak şekilde bir i vardır. Yani $x \in A$ olur. Sonuç olarak $S^* \setminus (S^* + S^*) \subseteq A$ olur.

□

3.3 Nümerik Yarıgruba Karşılık Gelen Yerel Halka

Yukarıdaki tanımları kullanarak, $x_1 = t^{n_1}, x_2 = t^{n_2}, ..., x_b = t^{n_b}$ parametrizasyonu ile verilen tekterimli C eğrisine $S = \langle n_1, \cdots, n_b \rangle$ nümerik yarıgrubunun karşılık geldiğini söyleyebiliriz. Dahası, aşağıda gösterildiği üzere S'ye karşılık gelen bir de yerel halka vardır. Dolayısıyla, nümerik yarıgruplar geometrik, aritmetik ve cebirsel olarak çalışılabilir.

Tanım 3.3.1 [18] $S = \langle n_1, \cdots n_b \rangle$ bir nümerik yarıgrup olsun.

$$k[[S]] = k[[t^s | s \in S]] = k[[t^{n_1}, \cdots, t^{n_b}]] \subseteq k[[t]]$$

biçiminde tanımlanan yerel halkaya S nümerik yarıgrubuna karşılık gelen yerel halka denir.

Burada $k[[S]]$ bir yerel tamlık bölgesidir ve $m = \langle t^{n_1}, \cdots, t^{n_b} \rangle$ maksimal idealdir. Ayrıca, C tekterimli eğrisi için $I(C)$ tanımlayıcı ideal ve $I(C)_*$ teğet konisinin tanımlayıcı ideali olmak üzere (f_* ile f'nin en düşük dereceli homojen bileşenini gösterirsek, $I(V)_*$ ideali, her $f \in I(V)$ için elde edilen f_* homojen elemanlarının ürettiği idealdir), aşağıdaki izomor6fizma elde edilir:

$$gr_m(k[[t^{n_1}, t^{n_2}, ..., t^{n_b}]]) \cong \; k[x_1, x_2, ..., x_b]/I(C)_*$$

Tanım 3.3.2 $S = \langle n_1, \cdots n_b \rangle$ yarıgrubunun düzenlilik indeksi, $k[[t^{n_1}, \cdots, t^{n_b}]]$ yerel halkasının düzenlilik indeksi olarak tanımlanır.

Böylece, $gr_m(k[[t^{n_1}, t^{n_2}, ..., t^{n_b}]]) \cong k[x_1, x_2, ..., x_b]/I(C)_*$ izomorfisması nedeniyle, S'nin düzenlilik indeksi $gr_m(k[[t^{n_1}, t^{n_2}, ..., t^{n_b}]])$ veya $k[x_1, x_2, ..., x_b]/I(C)_*$ halkalarının Hilbert fonksiyonlarının n_1 değerini almaya başladıkları indekstir.

3.4 Apery Kümesi

Tanım 3.4.1 [37] S bir nümerik yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun.

$$Ap(S, n) = \{s \in S \ \mid \ s - n \notin S\}$$

kümesine S'nin n'ye göre Apery kümesi denir.

Bu tanımın doğrudan bir sonucu aşağıdaki lemmadır.

Lemma 3.4.2 S bir nümerik yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. O zaman her $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ için $w(i)$, S'nin *mod* n'ye göre i'ye denk en küçük elemanı olmak üzere

$$Ap(S, n) = \{0 = w(0), \cdots, w(n-1)\}$$

olur.

Bu lemma, nümerik yarıgruptaki her elemanın Apery kümesindeki elemanlara n'nin katlarının eklenmesiyle elde edilebileceği sonucunu verir.

Lemma 3.4.3 [37] S bir nümerik yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. O zaman her $s \in S$ için $s = kn + w$ olacak şekilde $(k, w) \in \mathbb{N} \times Ap(S, n)$ vardır.

Apery kümesini kullanarak minimal üreteç kümesinin biricik ve sonlu olduğunu gösterebiliriz.

Teorem 3.4.4 [37] Her nümerik yarıgrubun tek bir minimal üreteç kümesi vardır ve bu küme sonludur.

Kanıt. Lemma 3.4.3'ün bir sonucu olarak $\langle Ap(S, n) \cup \{n\} \rangle = S$ ve Lemma 3.2.6'den $S^* \setminus (S^* + S^*)$, S'nin minimal üreteç kümesidir. Ayrıca $S^* \setminus (S^* + S^*) \subseteq Ap(S, n) \cup \{n\}$ olduğundan $S^* \setminus (S^* + S^*)$ kümesi sonludur.

□

Minimal üreteç sayısının biricik olması, aşağıdaki tanımları yapmamızı mümkün kılar.

Tanım 3.4.5 [37] S bir nümerik yarıgrup ve $n_1 < \cdots < n_b$ olmak üzere $\{n_1, \cdots, n_b\}$ S'nin minimal üreteç kümesi olsun. Bu durumda n_1'e S'nin katlılığı, b'ye de S'nin gömülüş boyutu denir. Sırasıyla, $m(S)$ ve $\mu(S)$ ile gösterilir.

Tanım 3.4.6 [37] S bir nümerik yarıgrup olsun. $\mathbb{N} \setminus S$ kümesine S'nin boşluk noktaları kümesi denir ve $G(S)$ ile gösterilir. Bu kümenin kardinalitesine de S'nin cinsi (genus) denir ve $g(S)$ ile gösterilir. S'de olmayan en büyük doğal sayıya ise S'nin Frobenius sayısı denir ve $F(S)$ ile gösterilir. (Bir başka deyişle, $F(S) = max(G(S))$ olur.) Her n doğal sayısı için $x + n \in S$ olacak şekildeki en küçük $x \in S$ elemanına S'nin kondüktörü denir.

Gömülüş boyutu ikiden büyük olan herhangi bir nümerik yarıgrubun Frobenius sayısı ve cinsi için bilinen genel bir formül yoktur. Ancak herhangi bir $n \in S^*$ için $Ap(S, n)$ biliniyorsa bu değişmezleri hesaplamak kolaydır.

Teorem 3.4.7 [37] S bir nümerik yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. O zaman,

i) $F(S) = maksAp(S, n) - n$

ii) $g(S) = \dfrac{1}{n} \sum_{w \in Ap(S,n)} w - \dfrac{n-1}{2}$

Kanıt. i) Apery kümesinin tanımından dolayı $maxAp(S, n) - n \notin S$ olur. $F = maksAp(S, n) - n$ diyelim. Eğer $x > F$ ise $x + n > maksAp(S, n)$ olur. $w(i) \equiv x + n \mod n$ olacak şekilde $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ vardır. $w(i) < x + n$ olduğundan $x = w(i) + kn$ olacak şekilde $k > 0$ vardır. O zaman $x - n = w(i) + (k-1)n \in S$ olur ve bu yüzden $F(S) = F = maksAp(S, n) - n$ olur.

ii) Her $w(i) \in Ap(S, n)$ elemanı $w(i) = k_i n + i$, $i \in \{0, \cdot, n-1\}$, $k_i \in \mathbb{N}$ formunda yazılabilir. Bir başka deyişle,

$$Ap(S, n) = \{0 = w(0), w(1) = k_1 n + 1, \cdots, k_{n-1} + (n-1)\}$$

olur. $x \equiv w(i) mod\ n$ için $x \in S \leftrightarrow w(i) \leq x$ olduğundan,

$$\begin{aligned} g(S) &= k_1 + \cdots k_{n-1} \\ &= \frac{1}{n}[(k_1 n + 1) + (k_2 n + 2) + \cdots (k_{n-1} n + (n-1))] - \frac{n-1}{2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{w \in Ap(S,n)} w - \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

□

$S = \langle a, b \rangle$, $a < b$ durumunda $Ap(S, a) = 0, b, 2b, \cdots, (a-1)b$ olduğundan gömülüş boyutu iki olan nümerik yarıgrupların Frobenius sayısı ve cinsinin formülünü verebiliriz:

Sonuç 3.4.8 i) $F(\langle a, b \rangle) = ab - a - b$

ii) $g(\langle a, b \rangle) = \dfrac{ab - a - b + 1}{2}$

S bir nümerik yarıgrubu için $s \in S$ ise $F(S) - s \notin S$ olur. Bunun sonucu olarak, yarıgrupta yer alan ve Frobenius sayısından küçük olan her elemana karşılık en az bir boşluk olduğundan, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

Lemma 3.4.9 [37] Bir S nümerik yarıgrubunda

$$g(S) \geq \frac{F(S) + 1}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 3.4.10 [37] S bir nümerik yarıgrup ve $x \in G(S)$ olsun. Eğer her $s \in S^*$ için $x + s \in S$ oluyorsa x'e S'nin pseudo-Frobenius sayısı denir. S'nin pseudo-Frobenius sayılarının kümesi $PF(S)$ ile gösterilir. Bu kümenin kardinalitesine S'nin tipi denir ve $t(S)$ ile gösterilir.

Tanım 3.4.11 [18] S bir nümerik yarıgrup olsun. $a, b \in S$ için,

$$a \leq_S b \iff b - a \in S$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Teorem 3.4.12 [37] S bir nümerik yarıgrup olsun. O zaman,

i) $PF(S)$ kümesi $\mathbb{Z} \setminus S$ kümesinin $\leq_S$ kısmi sıralaması altında maksimal olan elemanlarının oluşturduğu kümedir ve $Maksimaller_{\leq_S}\mathbb{Z} \setminus S$ ile gösterilir.

ii) $x \in \mathbb{Z} \setminus S \iff f - x \in S$ olacak şekilde $f \in PF(S)$ vardır.

Benzer biçimde tanımlanan $Minimaller_{\leq_S}S^*$ kümesinin S'nin minimal üreteç sistemi olduğunu kolayca görebiliriz.

Teorem 3.4.13 [37] S bir nümerik yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. O halde

$$PF(S) = \{w - n | w \in Maksimaller_{\leq_S} Ap(S, n)\}$$

olur.

Kanıt. $x \in PF(S)$ olsun. O zaman $x \notin S$ ve $x + n \in S$ olur. Bir başka deyişle, $x + n \in Ap(S, n)$ olur. $x + n \leq_S w$ olacak şekilde $w \in Ap(S, n)$ olsun.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad w - (x + n) = w - x - n \in S \\
&\Longrightarrow \quad w - x - n = s \text{ olacak şekilde} s \in S \text{ vardır.} \\
&\Longrightarrow \quad w - n = x + s \\
&\Longrightarrow \quad w - n \notin S \text{ ve } x \in PF(S) \text{ olduğundan } s = 0 \\
&\Longrightarrow \quad w - n = x \\
&\Longrightarrow \quad w = x + n
\end{aligned}$$

Bir başka deyişle, $PF(S) \subseteq \{w - n | w \in Maksimaller_{\leq_S} Ap(S, n)\}$ olur. Tersine, $w \in Maksimaller_{\leq_S} Ap(S, n)$ olsun. O zaman $w - n \notin S$ olur. $w - n + s \notin S$ olacak şekilde $s \in S^*$ elemanı var olsun. $w + s \in S$ ve $w + s - n \notin S$ olduğundan $w + s \in Ap(S, n)$ olur. Bu durumda $w \leq_S w + s$ olur ve bu da $w \in Maksimaller_{\leq_S} Ap(S, n)$ olması ile çelişir. O zaman her $s \in S^*$ için $w - n + s \in S$ olur. Yani $w - n \in PF(S)$ olur.
Sonuç olarak, $\{w - n | w \in Maksimaller_{\leq_S} Ap(S, n)\} \subseteq PF(S)$ olur ve buradan $PF(S) = \{w - n | w \in Maksimaller_{\leq_S} Ap(S, n)\}$ olur.

$\square$

Sonuç 3.4.14 Bir S nümerik yarıgrubu için $t(S) \leq m(s) - 1$ olur.

Gömülüş boyutu 2 olan nümerik yarıgruplar için $t(S) = 1$ olduğunu biliyoruz. $\mu(S) = 3$ durumunda ise $t(S) = 1$ veya $t(S) = 2$ olur. Ancak, $\mu(S) > 3$ için $t(S)$'in bir üst sınırı yoktur.

Örnek 3.4.15 $S =< s, s+3, s+3n+1, s+3n+2 >$, $n \geq 2$, $3 \geq 3n+2$ ve $s = r(3n+2)+3$ olsun. Bu durumda $t(S) = 2n+3$ olur.

Tanım 3.4.16 [37] S nümerik yarıgrubu için

$$N(S) = \{s \in S \ \mid \ s < F(S)\}$$

kümesini tanımlayalım ve bu kümenin kardinalitesini de $n(S)$ ile gösterelim. Bu küme S'yi tamamen belirler ve ayrıca $n(S) + g(S) = F(S) + 1$ olur.

Eğer $x \notin S$ ise $x \leq_S f$ olacak şekilde $f \in PF(S)$ vardır. $f_x = min\{f \in PF(S) | f - x \in S\}$ şeklinde tanımlayalım.
O zaman $\phi : G(S) \to PF(S) \times N(S)$, $x \mapsto (f_x, f_x - x)$ şeklinde tanımlanan ϕ fonksiyonu birebirdir. Buradan $g(S)$ için aşağıdaki sınırı elde ederiz.

Teorem 3.4.17 [37] S bir nümerik yarıgrup olsun. O halde

$$g(S) \leq t(S)n(S)$$

olur.

Bu eşitsizlik $F(S) + 1 \leq (t(S)+1)n(S)$ eşitsizliğine denktir.

3.4.1 Arf Nümerik Yarıgruplar

Bir sonraki bölümde Arf kapanışları aynı olan halkalar üzerine bir sanıya karşıt örnek verirken Arf nümerik yarıgruplarını kullanacağız.

Tanım 3.4.18 [37] S nümerik yarıgrubunda, $x \geq y \geq z$ koşulunu sağlayan her $x, y, z \in S$ için $x + y - z \in S$ oluyorsa, S'ye Arf nümerik yarıgrup denir.

Teorem 3.4.19 [37] Bir S nümerik yarıgrubu ve $x \in S^*$ için

$$\text{S Arf nümerik yarıgruptur} \iff S' = (x+S) \cup \{0\} \ \text{ Arf nümerik yarıgruptur.}$$

Sonuç 3.4.20 Bir S nümerik yarıgrubu ve $x \in S^*$ için S'nin bir Arf nümerik yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul $S = \{0, x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + \cdots + x_n, \rightarrow\}$ ve her $i \in \{1, \cdots, n\}$ için $x_i \in \{x_{i+1}, x_{i+1} + x_{i+2}, \cdots, x_{i+1} + \cdots x_n, \rightarrow\}$ olacak şekilde $x_1, \cdots, x_n$ pozitif doğal sayılarının var olmasıdır.

Teorem 3.4.21 [37] Sonlu sayıda Arf nümerik yarıgrubun kesişimi yine bir Arf nümerik yarıgrup olur.

S bir nümerik yarıgrup olsun. $\mathbb{N} \setminus S$ sonlu olduğundan S'yi kapsayan Arf nümerik yarıgrupların kümesi de sonludur ve bu nümerik yarıgrupların kesişimi yine bir Arf nümerik yarıgrup olur.

Tanım 3.4.22 [37] S bir nümerik yarıgrubunu kapsayan Arf nümerik yarıgrupların kesişimine S'nin Arf kapanışı denir ve $Arf(S)$ ile gösterilir.

Lemma 3.4.23 [37] S, $\mathbb{N}$'nin bir alt monoidi olsun. O zaman

$$S' = \{x + y - z \mid x, y, z \in S, x \geq y \geq z\}$$

kümesi $\mathbb{N}$'nin bir alt monoididir ve $S \subseteq S'$ olur.

Kanıt. $x \in S$ olsun. $x + x - x = x \in S'$ olduğundan $S \subseteq S'$ olur. $a, b \in S'$ olsun. $a = x_1 + y_1 - z_1$ ve $b = x_2 + y_2 - z_2$, $x_1 \geq y_1 \geq z_1$, $x_2 \geq y_2 \geq z_2$ olacak şekilde $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in S'$ elemanları vardır. Bu durumda, $a + b = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)$ ve $(x_1 + x_2) \geq (y_1 + y_2) \geq (z_1 + z_2)$ olduğu için $a + b \in S'$ olur.

□

S bir nümerik yarıgrup olmak üzere

i) $S^0 = S$

ii) $S^{n+1} = (S^n)'$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 3.4.24 [37] Her S nümerik yarıgrubu için $S^k = Arf(S)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır.

Kanıt. n üzerinden tümevarım uygulayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $S^n \subseteq Arf(S)$ olduğu açıktır ve Lemma'dan dolayı

$$S \subseteq S^1 \subseteq S^2 \subseteq \cdots \subseteq S^n \subseteq \cdots$$

dizisi vardır ve bu dizi bir yerde sabitlenir. Yani $S^k = S^{k+1}$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. $S^k = S^{k+1}$ olduğundan S^k bir Arf nümerik yarıgruptur. Ayrıca S^k, S'yi kapsayan en küçük Arf nümerik yarıgrup olduğundan $Arf(S) = S^k$ olur.

□

Arf kapanışının bu karakterizasyonu kullanılarak aşağıdaki Lemma ve Teorem aracılığı ile Arf kapanışı için bir algoritma verilebilir.

Lemma 3.4.25 [37] $m, r_1, \cdots, r_p, n \in \mathbb{N}$ ve $OBEB(m, r_1, \cdots, r_p) = 1$ olsun. O zaman

$$m + < m, r_1, \cdots, r_p >^n \subseteq Arf(m, m + r_1, \cdots, m + r_p)$$

olur.

Teorem 3.4.26 [37] $m, r_1, \cdots, r_p \in \mathbb{N}$ ve $OBEB(m, r_1, \cdots, r_p) = 1$ olsun. O halde

$$Arf(m, m + r_1, \cdots, m + r_p) = (m + Arf(m, r_1, \cdots, r_p)) \cup \{0\}$$

olur.

Sonuç 3.4.27 $m, r_1, \cdots, r_p \in \mathbb{N}$ ve $OBEB(m, r_1, \cdots, r_p) = 1$ olsun. O zaman;

$$F(Arf(m, m + r_1, \cdots, m + r_p)) = m + F(Arf(m, r_1, \cdots, r_p))$$

olur.

Böylece, Arf kapanışını hesaplamak için şu algoritmayı verebiliriz:
$T \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ve $OBEB(T) = 1$ olsun.

i) $A_1 = T$

ii) $A_{n+1} = \{x - min\ A_n \mid x \in A_n\} \cup \{min\ A_n\}$

$OBEB(T) = 1$ olduğundan, Öklid algoritması $q = min\ \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \in A_k\}$ olacak şekilde bir q sayısının varlığını garanti eder ve

$$Arf(T) = \{0, min\ A_1, min\ A_1 + minA_2, \cdots, min\ A_1 + \cdots + minA_{q-1}, \rightarrow\}$$

biçiminde yazılabilir.

Hatırlatma 3.4.28 Bu algoritmanın, Arf'ın bu kavramları ve teoriyi ürettiği makalesinde değiştirilmiş Jacobi algoritması olarak verildiğini belirtmek gerekir [1], [2].

Örnek 3.4.29 $S = \langle 10, 32, 41 \rangle$ olsun.

$$\begin{array}{lcl}
A_1 = & \{10, 32, 41\} & min\ A_1 = 10 \\
A_2 = & \{10, 22, 31\} & min\ A_2 = 10 \\
A_3 = & \{10, 12, 21\} & min\ A_3 = 10 \\
A_4 = & \{10, 2, 11\} & min\ A_4 = 2 \\
A_5 = & \{8, 2, 9\} & min\ A_5 = 2 \\
A_6 = & \{6, 2, 7\} & min\ A_6 = 2 \\
A_7 = & \{4, 2, 5\} & min\ A_7 = 2 \\
A_8 = & \{2, 2, 3\} & min\ A_8 = 2 \\
A_9 = & \{1, 2\} & min\ A_9 = 1
\end{array}$$

O zaman, $Arf(S) = \{0, 10, 20, 30, 32, 34, 36, 38, 40, \rightarrow\}$ olur.

3.4.2 Simetrik ve pseudo-Simetrik Nümerik Yarıgruplar

Tanım 3.4.30 [37] Bir S nümerik yarıgrubu kendisinden farklı iki nümerik yarıgrubun kesişimi şeklinde yazılamıyorsa S'ye indirgenemez denir.

Lemma 3.4.31 [37] Eğer S, $\mathbb{N}$'den farklı bir nümerik yarıgrup ise, $S \cup \{F(S)\}$ de bir nümerik yarıgruptur.

Kanıt. $\mathbb{N} \backslash S$ sonlu olduğundan $\mathbb{N} \backslash (S \cup F(S))$ sonludur. $a, b \in S \cup \{F(S)\}$ olsun. Eğer $a, b \in S$ ise, $a + b \in S$ olduğu açıktır. O zaman, $a = F(S), b \in S$ alalım. Bu durumda $a + b \geq F(S)$ olur ve bu yüzden $a + b \in S \cup \{F(S)\}$ olur. O halde, $S \cup \{F(S)\}$ bir nümerik yarıgruptur.

□

Teorem 3.4.32 [37] Bir S nümerik yarıgrubu için aşağıdakiler denktir.

i) S indirgenemezdir.

ii) S, Frobenius sayısı $F(S)$ olan nümerik yarıgrupların kümesinde maksimaldir.

iii) S, $F(S)$'i içermeyen nümerik yarıgruplar kümesinde maksimaldir

Kanıt. $(i) \Longrightarrow (ii)$ T bir nümerik yarıgrup, $S \subseteq T$ ve $F(T) = F(S)$ olsun. O zaman $S = (S \cup \{F(S)\}) \cap T$ olur. S indirgenemez olduğundan $S = T$ olur.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$ T bir nümerik yarıgrup, $S \subseteq T$ ve $F(S) \notin T$ olsun. O zaman $T' = T \cup \{F(S)+1, F(S)+2, \cdots, \rightarrow\}$ şeklinde tanımlanan nümerik yarıgrup için, $S \subseteq T'$ ve $F(S) = F(T)$ olur. Yani $S = T'$ ve bu yüzden $S = T$ olur.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$ S_1, S_2 birer nümerik yarıgrup, $S \subsetneqq S_1$ ve $S \subsetneqq S_2$ olsun. O zaman hipotezden dolayı $F(S) \in S_1$ ve $F(S) \in S_2$ olur. Bir başka deyişle, $F(S) \in S$ çelişkisini elde ederiz.

□

Tanım 3.4.33 [37] Bir S nümerik yarıgrubu indirgenemez ve $F(S)$ tek sayı ise S'e simetrik denir. Eğer S indirgenemez ve $F(S)$ çift sayı ise S'e pseudo-Simetrik denir.

Simetrik ve pseudo-simetrik yarıgruplar şu şekilde karakterize edilebilir:

Teorem 3.4.34 [37] S bir nümerik yarıgrup olsun.

i) S simetriktir $\iff$ $F(S)$ tek sayı ve $x \in G(S) \implies F(S) - x \in S$

ii) S pseudo-Simetriktir $\iff$ $F(S)$ çift sayı ve $x \in G(S) \implies F(S) - x \in S$ veya $x = \dfrac{F(S)}{2}$

Bu, nümerik yarıgrupların boşluk sayısına dayanan şu karakterizasyonu verir:

Sonuç 3.4.35 [37] S bir nümerik yarıgrup olsun.

i) S simetrik $\iff g(S) = \dfrac{F(S)+1}{2}$

ii) S pseudo-Simetrik $\iff g(S) = \dfrac{F(S)+2}{2}$

Böylece, bir S nümerik yarıgrubu için $g(S) \geq \dfrac{F(S)+1}{2}$ olduğundan, indirgenemez nümerik yarıgruplar mümkün olan en az boşluk noktasına sahip nümerik yarıgruplardır.

Lemma 3.4.36 [37] S nümerik yarıgrubu için $n \in S^*$ olsun. Eğer $x, y \in S$ için $x + y \in Ap(S, n)$ ise $\{x, y\} \subseteq Ap(S, n)$ olur.

Teorem 3.4.37 [37] Bir S nümerik yarıgrubu için $n \in S^*$ ve $Ap(S, n) = \{a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_{n-1}\}$ ise

$$S \text{ simetriktir } \iff \forall\, i \in \{0, \cdots n-1\} \text{ için } a_i + a_{n-1-i} = a_{n-1}$$

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $a_{n-1} - n = F(S)$ olduğunu biliyoruz.$a_{n-1} \notin S$ ve S simetrik olduğundan $F(S) - (a_i - n) = a_{n-1} - a_i \in S$ olur. Bu durumda, yukarıdaki Lemma'dan, $a_{n-1} = a_i + a_j$ olacak şekilde $a_j \in Ap(S, n)$ vardır ve $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$ olduğundan $a_j = a_{n-1-i}$ olmalıdır.
($\Longleftarrow$) Hipotezden $Maksimaller_{\leq_S} Ap(S, n) = \{a_{n-1}\}$ olur ve bu yüzden $PF(S) = \{F(S)\} = Maksimaller_{\leq_S} G(S)$ olur. Dolayısıyla, $x \in G(S)$ ise $F(S) - x \in S$ olur. Eğer $F(S)$ çift sayı ise $\frac{F(S)}{2} \in G(S)$ ve bu yüzden $F(S) - \frac{F(S)}{2} = \frac{F(S)}{2} \in (S)$ çelişkisini elde ederiz. O halde, $F(S)$ tek sayıdır ve bunun sonucunda S simetriktir.

$\square$

Sonuç 3.4.38 Bir S nümerik yarıgrubu için aşağıdakiler denktir.

i) S simetriktir.

ii) $PF(S) = \{F(S)\}$

iii) $t(S) = 1$

Sonuç 3.4.39 Bir S nümerik yarıgrubu ve $n \in S^*$ için

$$S\text{simetriktir} \iff Maksimaller_{\leq_S} Ap(S, n) = \{F(S) + n\}$$

Örnek 3.4.40 $S = \langle a, b\rangle$ ve $OBEB(a, b) = 1$ olsun.

$$Ap(S) = \{0, b, 2b, \cdots , (a-1)b\}$$

olduğundan her $i \in 0, \cdots , a-1$ için $ib + (a-1-i) = (a-1)b$ olur ve bu yüzden S simetriktir. Yani gömülüş boyutu 2 olan tüm nümerik yarıgruplar simetriktir.

Kunz'un simetrik grupları, Gorenstein halkalar ile bağlayan şu önemli sonucu bu örneği geometrik olarak çok daha kolay ifade etmemizi sağlar.

Teorem 3.4.41 [32] $S = \langle n_1, \cdots n_b\rangle$ yarıgrubunun simetrik olması için gerek ve yeter koşul $k[[t^{n_1}, \cdots , t^{n_b}]]$ halkasının Gorenstein olmasıdır.

Örnek 3.3'teki $S = \langle a, b\rangle$ yarıgrubuna karşılık gelen tek terimli eğri iki boyutlu uzayda tek üreteçle tanımlandığından tam kesişim eğrisidir. Dolayısıyla, $k[[t^a, t^b]]$ halkası tam kesişim halkasıdır. Her tam kesişim halkası Gorenstein olduğundan, Kunz'un karakterizasyonundan $S = \langle a, b\rangle$ yarıgrubu simetriktir.

3.4.3 Apery Tablosu

Apery tablosu verilen bir yarıgruba ait tüm bilgileri barındırır. Bir yarıgruba karşılık gelen yerel halkanın Hilbert fonksiyonunu, düzenlilik indeksini ve ilişkili dereceli halkanın Cohen-Macaulay olup olmadığını bu tablodan okuyabiliriz. Tabloyu tanımlamadan önce bazı tanımları verelim.

Tanım 3.4.42 [18] S bir nümerik yarıgrup olsun. $H \neq \emptyset$ için $H+S \subseteq S$ ve $d+H \subseteq S$ olacak şekilde $d \in S$ varsa H'ye S'nin göreli ideali denir. Eğer $H \subseteq S$ ise H'ye S'nin ideali denir.

Tanım 3.4.43 [22] $M = S \setminus \{0\}$ idealine S'nin maksimal ideali denir.

Tanım 3.4.44 [12] S bir nümerik yarıgrup, L ve H ,S'nin birer göreli ideali olsun. Bu durumda;

$$L + H = \{l + h | l \in L, h \in H\}$$

kümesi de bir göreli idealdir. Ayrıca $z \in \mathbb{Z}$ için

$$z + S = \{z + s | s \in S\}$$

kümesi de bir göreli idealdir ve bu göreli ideale z tarafından üretilmiş temel göreli ideal denir.

Benzer şekilde $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{Z}$ için $\{z_1, \cdots, z_n\}$ tarafından üretilen göreli ideal $(z_1 + S) \cup \cdots \cup (z_n + S)$ şeklinde tanımlanır ve $(z_1, \cdots, z_n) + S$ ile gösterilir. Böylece, S'nin maksimal ideali M'nin, S'nin minimal üreteç kümesi tarafndan üretilmiş göreli bir ideal olduğunu söyleyebiliriz.
$S = \langle n_1, \cdots n_b \rangle$ yarıgrubuna karşılık gelen halka $R = k[[t^{n_1}, t^{n_2}, ..., t^{n_b}]]$ ve $m = \langle t^{n_1}, \cdots, t^{n_b} \rangle$ bu halkanın maksimal ideali ise, derece ile verilen ν değerlemesi için $\nu(R) = S$, $\nu(m) = M = S \setminus \{0\}$ ve her pozitif i tamsayısı için $\nu(m^i) = iM = M + ... + M$ olur.

Tanım 3.4.45 [18] S bir nümerik yarıgrup ve M, S'nin maksimal ideali ise , $e + nM = (n+1)M$ koşulunu sağlayan en küçük n tamsayısına indirgeme sayısı denir.

Hatırlatma 3.4.46 Yukarıdaki değerleme ile $e + nM = (n+1)M$ koşulunu sağlayan en küçük n tamsayısının $t^{n_1}m^n = m^{n+1}$ koşulunu sağlayan en küçük n tamsayısının aynı olduğunu görürüz. Bu sayıdan sonra m^i/m^{i+1} ile m^{i+1}/m^{i+2} izomorfik olacağından Hilbert fonksiyonu sabitlenir. Dolayısıyla, düzenlilik indeksi ile indirgeme sayısı eşittir.

Böylece, $S = \langle n_1, \cdots n_b \rangle$ yarıgrubuna karşılık gelen halka $R = k[[t^{n_1}, t^{n_2}, ..., t^{n_b}]]$ ve $m = \langle t^{n_1}, \cdots, t^{n_b} \rangle$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlikleri kullanabiliriz:

i) $e = n_1 = dim_k(R/t^{n_1}R) = |S \setminus (n_1 + S)|$

ii) $b = dim_k(m/m^2) = |M \setminus 2M|$

iii) $r = min\{r \in \mathbb{N} \mid m^{r+1} = xm^r\} = min\{r \mid (r+1)M = n_1 + rM\}$

iv) $\delta = dim_k(\overline{R}/R) = g(S)$ (δ, R'nın tekillik derecesi olarak adlandırılır).

v) $H_R(n) = \mu(m^n) = \lambda(m^n/m^{n+1}) = \mid nM \setminus (n+1)M \mid$

Tanım 3.4.47 [18] $S = \langle n_1, \cdots n_b \rangle$ bir nümerik yarıgrup ve $s \in S$ olsun. Tüm $s = r_1 n_1 + ... + r_b n_b$ temsilleri arasında $\sum_{i=1}^{b} r_i$ maksimum olacak şekildeki $s = r_1 n_1 + ... + r_b n_b$ temsiline s'nin maksimal gösterilişi denir ve $\sum_{i=1}^{b} r_i$'ye s'nin mertebesi (order) denir ve $ord(s)$ ile gösterilir.

Eğer $s = r_1n_1 + ... + r_bn_b$ bir maksimal gösteriliş ise, her $r'_i \leq r_i$ olacak şekildeki $s' = r'_1n_1 + ... + r'_bn_b$ toplamı bir maksimal gösteriliştir.
Ayrıca $s = r_1n_1 + ... + r_bn_b \in Ap(S)$ ise her $r'_i \leq r_i$ olacak şekildeki $s' = r'_1n_1 + ... + r'_bn_b \in Ap(S)$ olur. ($Ap(S)$ ile $Ap(S, n_1)$ kümesini kastediyoruz.)

Tanım 3.4.48 [18] S bir nümerik yarıgrup ve $s \in S$ olsun. Eğer $ord(s + cn_1) > ord(s) + c$ olacak şekilde $0 \neq c \in \mathbb{N}$ varsa s'ye torsiyon eleman denir. S'nin torsiyon elemanlarının kümesi

$$T := \{s \in S \ \mid \ \exists c > 0 \ ; \ ord(s + cn_1) > ord(s) + c\}$$

ile gösterilir. s'nin torsiyon mertebesi $tord(s) = min\{c > 0 | ord(s+cn_1) > ord(s)+c\}$ şeklinde tanımlanır.

Şimdi Apery tablosunu tanımlayabiliriz.

Tanım 3.4.49 [18] S bir nümerik yarıgrup ve M, S'nin maksimal ideali olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$Ap(nM) = \{w_{n,0} = ne, ..., w_{n,i}, ..., w_{n,e-1}\}$$

olmak üzere

Ap(S)	$w_{0,0}$	$w_{0,1}$	...	$w_{0,i}$	...	$w_{0,e-1}$
Ap(M)	$w_{1,0}$	$w_{1,1}$	...	$w_{1,i}$	...	$w_{1,e-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Ap(nM)	$w_{n,0}$	$w_{n,1}$	...	$w_{n,i}$	...	$w_{n,e-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Ap(rM)	$w_{r,0}$	$w_{r,1}$	...	$w_{r,i}$	...	$w_{r,e-1}$

tablosuna M'nin Apery Tablosu denir.

Örnek 3.4.50 $S = \langle 8, 19, 29 \rangle$ nümerik yarıgrubunun Apery tablosu

Ap(S)	0	57	58	19	76	29	38	87
Ap(M)	8	57	58	19	76	29	38	87
Ap(2M)	16	57	58	27	76	37	38	87
Ap(3M)	24	57	66	35	76	45	46	87
Ap(4M)	32	65	74	43	76	53	54	95
Ap(5M)	40	73	82	51	84	61	62	95

Tanım 3.4.51 [18] $E = \{w_0, \cdots, w_m\} \subseteq \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $w_0 \leq \cdots \leq w_m$ ise buna bir merdiven diyeceğiz. Verilen bir merdivenin $L = \{w_i, \cdots w_{i+k}\}$ altkümesi için $w_{i-1} < w_i = \cdots = w_{i+k} < w_{i+k+1}$ oluyorsa L'ye k uzunluklu bir düzleme denir. Bu durumda i indeksine bu düzlemenin başlangıcı, $i+k$ indeksine de bu düzlemenin bitişi denir ve sırası ile $s(L)$ ve $e(L)$ ile gösterilir. Bir L düzlemesi için eğer $s(L) \geq 1$ ise L'ye gerçek düzleme denir. Verilen L ve L' düzlemeleri için eğer $s(L) < s(L')$ ise $L < L'$ denir. $L_0 < \cdots L_{l(E)}$ E'deki düzlemeler olsun. O zaman her $0 \leq j \leq l(E)$ için

i) $s_j(E) = e(L_j)$, $e_j(E) = e(L_j)$

ii) $c_j(E) = s_j - e_{j-1}$

iii) $k_j(E) = e_j - s_j$

sayılarını tanımlayalım. Bu notasyonla, her $1 \leq i \leq e-1$ için M'nin Apery tablosunun her bir sütununu, $\Omega^i = \{w_{n,i}\}_{0 \leq n \leq r}$, bir merdiven olarak düşünelim. Bu durumda,

i) $l_i = l(\Omega^i) :$ Ω^i sütunundaki doğru düzleme sayısı

ii) $d_i = e_{l_i}(\Omega^i)$: son düzlemenin bitişi

iii) $b^i_j = e_{j-1}(\Omega^i)$ ve $c^i_j = c_j(\Omega^i)$

sayılarını tanımlayalım.

$gr_m(R)$'in Cohen-Macaulay olması için gerek ve yeter şart torsiyon elemanının olmamasıdır. Bunu da Apery tablosunda sütunlarda hiç gerçek düzleme olmaması olarak okuyabiliriz. Bir başka deyişle, her $1 \leq i \leq e-1$ için $l_i = 0$ ve $d_i = b_i$ olmasıdır. Ayrıca eğer $gr_m(R)$ Cohen-Macaulay ise R'nin düzenlilik indeksi, $Ap(S)$'deki elemanların mertebelerinin en büyüğüdür. Benzer şekilde $gr_m(R)$'in Gorensteinliği de Apery tablosundan kontrol edilebilir. $gr_m(R)$'in Gorenstein olması için gerek ve yeter şart $gr_m(R)$ Cohen-Macaulay , S simetrik ve S'nin M-saf olmasıdır. $Ap(S) = \{w_0 < \cdots < w_{e-1}\}$ ve S simetrik olsun. Bu durumda S'nin M-saf olması için gerek ve yeter koşul her $i = 0, \cdots e-1$ için $ord(w_i) + ord(w_{e-1-i}) = ord(w_{e-1})$ olmasıdır. Bu da Apery tablosunda $b_i + b_{e-1-i} = b_{e-1}$ olmasıdır. Bu da Apery tablosunda ilk düzlemelerin sonunda bir tür simetri olması demektir.

Örnek 3.4.52 $S = \langle n_1, n_2 \rangle$, $OBEB(n_1, n_2) = 1$ ve $n_1 < n_2$ olsun. Bu durumda M'nin $Ap(S)$'deki elemanları artan sırayla dizerek oluşturduğumuz Apery tablosu aşağıdaki gibidir.

Ap(S)	0	n_2	...	kn_2	...	$(n_1-1)n_2$
Ap(M)	n_1	n_2	...	kn_2	...	$(n_1-1)n_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Ap(kM)	kn_1	$n_2+(k-1)n_1$	...	kn_2	...	$(n_1-1)n_2$
Ap((k+1)M)	$(k+1)n_1$	n_2+kn_1	...	kn_2+n_1	...	$(n_1-1)n_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Ap(rM)	$(n_1-1)n_1$	$n_2+(n_1-2)n_1$	...	$kn_2+(n_1-k-1)n_1$	...	$(n_1-1)n_2$

Tablodan S'nin düzenlilik indeksi $r(S)=n_1-1$ olduğunu görebiliriz.
$Ap(S)$'deki en büyük eleman $(n_1-1)n_2$ olduğundan $F(S)=(n_1-1)n_2-n_1$ olur ve biliyoruz ki $g(S)=\dfrac{n_1n_2-n_1-n_2+1}{2}$. O zaman, $g(S)=\dfrac{F(S)}{2}$ olur ve bu yüzden S simetrik ve $R=k[[t^{n_1},t^{n_2}]]$ Gorenstein olur. Ayrıca Apery tablosunda hiç gerçek düzleme olmadığı için $gr_m(R)$ Cohen-Macaulay olur. Yine, Apery Tablosundan her i için $b_i=i$ olur ve bu yüzden $b_i+b_{e-i-1}=i+e-1-i=e-1=b_{e-1}$ olur. Yani S, M-pure olur. Sonuç olarak, S simetrik, M-pure ve $gr_m(R)$ Cohen-Macaulay olduğundan, $gr_m(R)$ Gorensteindir.

Bölüm 4

DÜZENLİLİK İNDEKSİNE İLİŞKİN SONUÇLAR

Bu bölümde, bir $S = \langle n_1, \cdots n_b \rangle$ yarıgrubununu düzenlilik indeksinin, bir başka deyişle yarıgruba karşılık gelen halka olan $R = k[[t^{n_1}, t^{n_2}, ..., t^{n_b}]]$ halkasının Hilbert fonksiyonunun n_1 olmaya başladığı indeksin nasıl değiştiğine ilişkin elde ettiğimiz sonuçları sunacağız.

4.1 $S_1 \subset S_2$ Durumunda İndeksin Değişimi

Öncelikle, Arf kapanışı aynı olan halkaların düzenlilik indekslerine ilişkin Arslan ve Sertöz tarafından öne sürülen sanıyı anımsatalım:

Soru. [9] $R \subseteq S \subseteq k[[t]]$ yerel halkalarının Arf kapanışları eşit ise, $i(S) \leq i(R)$ midir?

Bu sanının temel motivasyonu, Arf halkalarının düzenlilik indekslerinin 1 olması ve Arf kapanışının bir anlamda karşılık gelen yarıgruptaki boşlukların doldurulması ile elde edilmesi düşüncesidir. Bu, doğal olarak boşluklar dolduruldukça düzenlilik indeksi azalır mı sorusunu sormamızı teşvik eder.

$S = \langle n_1, \cdots n_b \rangle$ yarıgrubuna karşılık gelen halka $R = k[[t^{n_1}, t^{n_2}, ..., t^{n_b}]]$ olmak üzere, R'nin m maksimal idealinin indirgeme sayısını $t^{n_1} m^n = m^{n+1}$ koşulunu sağlayan en küçük n olarak tanımlamıştık ve bunun düzenlilik indeksine eşit olduğunu görmüştük. Esasında bu minimal inidirgeme kavramının yarıgruba karşılık gelen halkalara uygulanmış hali idi. İndirgeme sayısına ilişkin literatürdeki bazı önemli sonuçları vermek için öncelikle genel tanımını verelim.

Tanım 4.1.2 (R,m), d boyutlu bir yerel halka olsun. $\sqrt{I}=m$ koşulunu sağlayan I ideali için $JI^n = I^{n+1}$ koşulunu sağlayan bir J ideali varsa, J'ye I'nın bir indirgemesi denir ve bu koşulu sağlayan en küçük n sayısına I'nın J'ye göre indirgeme sayısı denir. I'nın indirgemelerinden kapsama ilişkisi altında en küçüklerine minimal indirgeme ve bunların arasındaki en küçük indirgeme sayısına I'nın indirgeme sayısı denir ve $r(I)$ ile gösterilir.

R/m cisminin sonsuz olmasının her I'nın d eleman ile üretilen bir minimal indirgemesinin varlığını garanti ettiğini belirtelim. Rossi, 1 boyutlu Cohen-Macaulay (R,m) halkası için, katlılığı $e(I)$ ile verilen bir I idealinin, $r(I) \leq e(I)-1$ eşitsizliğini sağladığını göstermiştir [38]. Sally ise d boyutlu Cohen-Macaulay (R,m) halkasının m ideali için $r(m) \leq d!e(R)-1$ eşitsizliğini vermiştir [39]. Vasconcelos, bunu genelleştirerek d boyutlu Cohen-Macaulay (R,m) halkasının herhangi bir I ideali için $r(I) \leq de(I)-2d+1$ eşitsizliğini vermiştir [41].

$S=\langle n_1,\cdots n_b\rangle$ yarıgrubu ile çalışırken karşılık gelen halka $k[[t^{n_1},t^{n_2},...,t^{n_b}]]$ olmak üzere, $m=\langle t^{n_1},t^{n_2},...,t^{n_b}\rangle$ idealinin minimal indirgeme ideali $\langle t^{n_1}\rangle$ olur. Bu durumda, yukarıdaki üç eşitsizlik de $r(m) \leq n_1-1$ verir. Bir başka deyişle, $i(S) = i(R) = r(m) \leq n_1-1$ olur.

Bir önceki bölümde, $n_1 < n_2$ olmak üzere $S_1=\langle n_1,n_2\rangle$ yarıgrubunun düzenlilik indeksinin n_1-1 olduğunu göstermiştik. Bu durumda, yukarıdaki eşitsizlikten, $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_d$ olmak üzere $S_2=\langle n_1,n_2,n_3,...,n_d\rangle$ yarıgrubunun indeksi $i(S_2) \leq i(S_1) = n_1-1$ koşulunu sağlar.

Lemma 4.1.3 [5] $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_d$ olmak üzere $S_1=\langle n_1,n_2\rangle$ ve $S_2 = \langle n_1,n_2,n_3,...,n_d\rangle$ olsun. Bu durumda $i(S_2) \leq i(S_1)$ olur.

Kanıt. $N=\langle n_1,n_2,n_3,...,n_d\rangle \setminus \{0\}$ ise $n_1+(n_1-1)N \subseteq n_1N$ açık olduğundan, $n_1N \subseteq n_1+(n_1-1)N$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.
$a_2n_2+a_3n_3+\cdots+a_dn_d \in n_1N$ olsun. O halde, $a_2+a_3+\cdots+a_d \geq n_1$ ve $a_2n_2+a_3n_3\cdots+a_dn_d-n_1 \geq n_1n_2-n_1 > F((n_1-1)M) = (n_1-1)n_2-n_1$ olduğundan $a_2n_2+a_3n_3\cdots+a_dn_d-n_1 \in (n_1-1)N$ olur ve ispat tamamlanır.

□

Aşağdaki örnekleri inceleyerek yeni sorular sorabiliriz.

Örnek 4.1.4

Nümerik yarıgrup	Düzenlilik indeksi
$\langle 10, 23, 37 \rangle$	6
$\langle 10, 11, 23, 37 \rangle$	9
$\langle 10, 23, 24, 37 \rangle$	3
$\langle 10, 23, 37, 44 \rangle$	5

Birinci ve ikinci satırdaki örnekler, eklenen sayı n_1 ile n_2 arasında ise indeksin artabileceğini gösteriyor.

O halde şu soruyu sorabiliriz:

Soru. $S_1 = \langle n_1, n_2, ..., n_d \rangle$, $S_2 = \langle n_1, n_2, ..., n_d, m \rangle$ ve $n_1 < n_2 < m$ olsun. Bu durumda $i(S_2) \leq i(S_1)$ olur mu?

Örnek 4.1.6 $S_1 = \langle 11, 23, 36 \rangle$ ve $S_2 = \langle 11, 23, 24, 36 \rangle$ olsun. Bu durumda $i(S_1) = 4 < i(S_2) = 5$ olduğundan yukarıdaki sorunun yanıtı olumsuzdur.

Ancak, bu soruyu şöyle sınırlandırırsak, hala açıktır.

Soru. $S_1 = \langle n_1, n_2, ..., n_d \rangle$, $S_2 = \langle n_1, n_2, ..., n_d, m \rangle$, $n_1 < n_2 < m$ ve $n_1 \leq 10$ olsun. Bu durumda, $i(S_2) \leq i(S_1)$ olur mu?

Şu sorunun da hala açık olduğunu belirtelim:

Soru. $S_1 = \langle n_1, n_2, ..., n_d \rangle$, $S_2 = \langle n_1, n_2, ..., n_d, m \rangle$ ve $n_1 < n_2 < \cdots < n_d < m$ olsun. Bu durumda $i(S_2) \leq i(S_1)$ olur mu?

Yeni bir eleman eklendiğinde indeksin artmadığı bazı durumları karakterize edelim.

Teorem 4.1.9 [5] $S_1 = \langle n_1, n_2, ..., n_d \rangle$, $S_2 = \langle n_1, n_2, ..., n_d, m \rangle$ ve $n_1 < n_2 < m$ olsun. $i(S_1) = r$ ve $M = S_1 - \{0\}$ için $F(rM) \leq rn_2 + m - n_1$ olsun. O zaman $i(S_2) \leq i(S_1)$ olur.

Kanıt. $M = S_1 - \{0\}$ ve $N = S_2 - \{0\}$ olduğundan $F(rN) \leq F(rM)$ olur. $x \in (r+1)N$ alalım. $x - n_1 \geq rn_2 + m - n_1 = F(rM)$ olduğundan
$x - n_1 \in rM \subseteq rN$ olur ve $n_1 + rN = (r+1)N$ elde ederiz.
Dolayısıyla, $i(S_2) \leq r = i(S_1)$ olur.

□

Lemma 4.1.10 [5] $S = \langle n_1, ..., n_d \rangle$ ve $i(S) = r$ olsun. O zaman $F(rM) \leq rn_d - n_1$ olur.

Kanıt. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $nM \setminus (n+1)M \subseteq Ap(nM)$ olduğunu biliyoruz. $|rM \setminus (r+1)M| = n_1$ ve $|Ap(rM)| = n_1$ olduğundan $Ap(rM) = rM \setminus (r+1)M$ olur. O zaman $x \in Ap(rM)$ ise $ord(x)$'in alabileceği maksimum değer r'dir ve bu yüzden $x \leq rn_d$ olur. Dolayısıyla, $F(rM) = maksimum\ Ap(rM) - n_1 \leq rn_d - n_1$

□

Hatırlatma 4.1.11 $F(S) \leq F(M) \leq F(2M) \leq \cdots \leq F(rM) \leq rn_d - n_1$ olduğundan, bu Lemma S'nin Frobenius sayısı için de bir sınır verir. $S = \langle n_1, n_2 \rangle$ için bu sınır $rn_d - n_1 = (n_1 - 1)n_2 - n_1 = n_1 n_2 - n_1 - n_2$ Frobenius sayısıdır.

Bu sınırı kullanarak, aşağıdaki Teorem'i elde ederiz.

Teorem 4.1.12 [5] Eğer $S_1 = \langle n_1, n_2, ..., n_d \rangle$, $S_2 = \langle n_1, n_2, ..., n_d, m \rangle$, $n_1 < n_2 < m$ ve $m > r(n_d - n_2)$ ise $i(S_2) \leq i(S_1)$ olur.

Kanıt. $i(S_1) = r$ olsun. Bir başka deyişler, $n_1 + rM = (r+1)M$ olsun. $x \in (r+1)N$ alalım. $x \geq rn_2 + m$ ise $x - n_1 \geq rn_2 + m - n_1$ olur. $m > r(n_d - n_2)$ olduğundan,

$$x - n_1 > rn_2 + rn_d - rn_2 - n_1 = rn_d - n_1$$

elde ederiz ve Lemma 4.1.10'dan $x - n_1 > F(rM)$ ve $\Rightarrow x - n_1 \in rM \subseteq rN$ olur ve $n_1 + rN = (r+1)N$ olduğundan $i(S_2) \leq r = i(S_1)$ elde ederiz.

□

$S = \langle n_1, \cdots n_b \rangle$ yarıgrubuna karşılık gelen halka $R = k[[t^{n_1}, t^{n_2}, ..., t^{n_b}]]$ olmak üzere $gr_m(R)$ Cohen-Macaulay olduğu durumda, Apery kümesindeki mertebesi en büyük olan elemanın mertebesi aynı zamanda indeksi verdiğinden, şu soruyu sorduk:

Soru. $S_1 = \langle n_1, ..., n_d \rangle$, $S_2 = \langle n_1, n_2, ..., n_d, m \rangle$, $n_1 < n_2 < m$, $R_1 = k[[t^{n_1}, t^{n_2}, ..., t^{n_b}]]$ ve $R_2 = k[[t^{n_1}, t^{n_2}, ..., t^{n_b}, t^m]]$ halkalarının ilişkili dereceli halkaları ($gr_m(R_1)$ ve $gr_m(R_2)$) Cohen-Macaulay ise $i(S_2) \leq i(S_1)$ olur mu?

Örnek 4.1.14 $S_1 = \langle 11, 23, 36 \rangle$ ve $S_2 = \langle 11, 23, 24, 36 \rangle$ nümerik yarıgruplarının Apery tabloları

$Ap(S_1)$	0	23	46	36	59	82	72	95	118	108	131
$Ap(M)$	11	23	46	36	59	82	72	95	118	108	131
$Ap(2M)$	22	34	46	47	59	82	72	95	118	108	131
$Ap(3M)$	33	45	57	58	70	82	83	95	118	108	131
$Ap(4M)$	44	56	68	69	81	93	94	106	118	119	131

$Ap(S_2)$	0	23	24	36	48	60	72	84	96	108	120
$Ap(N)$	11	23	24	36	48	60	72	84	96	108	120
$Ap(2N)$	22	34	35	47	48	60	72	84	96	108	120
$Ap(3N)$	33	45	46	58	59	71	72	84	96	108	120
$Ap(4N)$	44	56	57	69	70	82	83	95	96	108	120
$Ap(5N)$	55	67	68	80	81	93	94	106	107	119	120

Birinci tabloda mertebesi 4, ikinci tabloda mertebesi 5 olan elemanların bulunması nedeniyle $R_1 = k[[t^{11}, t^{23}, t^{36}]]$ ve $R_2 = k[[t^{11}, t^{23}, t^{24}, t^{36}]]$ halkalarının ilişkili dereceli halkaları Cohen-Macaulay olur. Fakat indeks arttığından, yukarıdaki sorunun yanıtı olumsuzdur. Ayrıca,bu tablodan her $w(i) \in Ap(S_1)$ ve $w'(i) \in Ap(S_2)$ için $ord(w'(i)) \leq ord(w(i))$ olmadığını da görürüz. $ord_{S_1}(w(10)) = ord_{S_1}(131) = 4$ ancak $ord_{S_2}(w'(10)) = ord_{S_2}(120) = 5$

Bu soruda, $S_1 = \langle n_1, ..., n_d \rangle$ yarıgrubu için simetrik olma koşulu koyarsak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.1.15 $S_1 = \langle n_1, ..., n_d \rangle$ simetrik bir nümerik yarıgrup, $S_2 = \langle n_1, n_2, ..., n_d, m \rangle$, $n_1 < \cdots < n_d < m$ ve $R_2 = k[[t^{n_1}, t^{n_2}, ..., t^{n_b}, t^m]]$ halkasının ilişkili dereceli halkası Cohen-Macaulay olsun.
O zaman $i(S_2) \leq i(S_1)$ olur.

Kanıt. $w' = b_2 n_2 + \cdots + b_d n_d + km \in Ap(S_2)$ olsun.
O zaman $b_2 n_2 + \cdots + b_d n_d \in Ap(S_2)$ ve $b_2 n_2 + \cdots + b_d n_d - n_1 \notin S_2$ olduğundan

$b_2n_2+\cdots+b_dn_d-n_1 \notin S_1$ olur ve bu yüzden $b_2n_2+\cdots+b_dn_d \in Ap(S_1)$ olur. Simetriklik koşulu $Maksimaller_{\leq_S} Ap(S_1)$ kümesinin tek elemanlı olmasıdır. Bu nedenle, $(b_2 + k_2)n_2 \cdots + (b_d + k_d)n_d = w = Max_{\leq_S} Ap(S_1)$ olacak şekilde $k_2, \cdots, k_d \in \mathbb{N}$ vardır. $w - n_1 = F(S_1) \geq F(S_2)$ olduğundan $w > w'$ olur. O halde,

$$\begin{aligned} b_2n_2 + \cdots + b_dn_d + km < & \quad (b_2 + k_2)n_2 + \cdots (b_d + k_d)n_d \\ km < & \quad k_2n_2 + \cdots + k_dn_d < (k_2 + \cdots + k_d)n_d \end{aligned}$$

Buradan $k < k_2 + \cdots + k_d$ eşitsizliğini elde ederiz. Bu durumda

$$\begin{aligned} ord(w') = (b_2 + \cdots + b_d) + k < & \quad (b_2 + \cdots + b_d) + (k_2 + \cdots + k_d) \\ = & \quad (b_2 + k_2) + \cdots (b_d + k_d) \leq ord(w) \end{aligned}$$

R_2 halkasının ilişkili dereceli halkası Cohen-Macaulay olduğundan S_2'nin düzenlilik indeksi, $Ap(S_2)$'deki elemanların mertebelerinin en büyüğüdür. Bu nedenle $i(S_2) \leq i(S_1)$ olur.

□

Bölümün başında verdiğimiz sanıyı [9] nümerik yarıgruplara sınırlayarak doğru olmadığını gösterelim:

Soru. $S_1 = \langle n_1, ...n_d\rangle$, $S_2 = \langle n_1, ...n_d, m\rangle$ ve $Arf(S_1) = Arf(S_2)$ olsun. Bu durumda $i(S_2) \leq i(S_1)$ olur mu?

Örnek 4.1.17 $S_1 = \langle 19, 51, 96\rangle$ ve $S_2 = \langle 19, 51, 64, 96\rangle$ olsun. $S_1 = \langle 19, 51, 96\rangle$ yarıgrubunun Arf kapanışını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} A_1 = & \quad \{19, 51, 96\} & min\ A_1 = 19 \\ A_2 = & \quad \{19, 32, 77\} & min\ A_2 = 19 \\ A_3 = & \quad \{19, 13, 58\} & min\ A_3 = 13 \\ A_4 = & \quad \{6, 13, 45\} & min\ A_4 = 6 \\ A_5 = & \quad \{6, 7, 39\} & min\ A_5 = 6 \\ A_6 = & \quad \{6, 1, 33\} & min\ A_6 = 1 \end{aligned}$$

$S_2 = \langle 19, 51, 64, 96\rangle$ yarıgrubunun Arf kapanışını hesaplayalım:

$$
\begin{array}{rcl}
A_1 = & \{19, 51, 64, 96\} & min\ A_1 = 19 \\
A_2 = & \{19, 32, 45, 77\} & min\ A_2 = 19 \\
A_3 = & \{19, 13, 26, 58\} & min\ A_3 = 13 \\
A_4 = & \{6, 13, 13, 45\} & min\ A_4 = 6 \\
A_5 = & \{6, 7, 7, 39\} & min\ A_5 = 6 \\
A_6 = & \{6, 1, 1, 33\} & min\ A_6 = 1
\end{array}
$$

O zaman, $Arf(S_1) = Arf(S_2) = \{0, 19, 38, 51, 57, 63, 64, \rightarrow\}$ olur. Ancak, $i(S_1) = 7 < i(S_2) = 9$ olduğundan sorunun yanıtı olumsuzdur.

4.2 Ötelenmiş Nümerik Yarıgruplar

Bu bölümde ötelenmiş nümerik yarıgrup aileleri için indeksin nasıl değiştiğini göstereceğiz.

Tanım 4.2.1 [36] $S = \langle r_1, \cdots, r_k\rangle$ bir nümerik monoid ve $d = OBEB(r_1, \cdots, r_k)$ olsun. Bu durumda $T = \dfrac{r_1}{d}, \cdots, \dfrac{r_k}{d}$ olmak üzere S'nin Frobenius sayısı $F(S) = dF(T)$ şeklinde tanımlanır.

$a \in S$ elemanı için $a = z_1r_1 + \cdots + z_kr_k$ olsun. Burada $\overrightarrow{z} = (z_1, \cdots z_k)$ vektörüne z'nin faktorizasyonu denir ve $|\overrightarrow{z}| = z_1 + \cdots + z_k$'ya bu faktorizasyonun uzunluğu denir. s'nin tüm faktorizasyonlarının kümesini $Z_S(s)$ ve s'nin faktorizasyonlarının uzunluklarının kümesini de $L_m(s)$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.2.2 [36] $S = \langle r_1, \cdots, r_k\rangle$ bir nümerik monoid olsun ve $m : S \rightarrow Z_{\geq 0}$, her $s \in S$ elemanını en kısa faktorizasyon uzunluğuna götürsün. Bu durumda her $s > r_{k-1}r_k$ için,

$$m(s + r_k) = m(s) + 1$$

olur.

$n > r_k^2$ ve $OBEB(n, d) = 1$ olmak üzere $M_n = \langle n, n + r_1, \cdots, n + r_k\rangle$ nümerik yarıgrubu olsun.

Teorem 4.2.3 [36] $n > r_k^2$ ve $dn \in S$ olsun. O zaman,

$$Ap(M_n) = \{i + m_S(i).n \mid i \in Ap(S, dn)\}$$

olur. Ayrıca her $i \in Ap(S, dn)$ için $L_{M_n}(i + m_S(i).n) = \{m_S(i)\}$ olur.

Teorem 4.2.4 [36] $S =< r_1, \cdots, r_k >$ ve $n > r_k^2$ için $Ap(S, dn) = \{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$,

$$a_i = \begin{cases} di & di \in S \\ di + dn & di \notin S \end{cases}$$

formundadır.

Lemma 4.2.5 $S =< r_1, \cdots, r_k >$ bir nümerik monoid olsun. Eğer $n > r_k^2$ ise $dn - dr_k > F(S)$ olur.

Kanıt.

$$\begin{aligned} F(S) \leq \quad & d(\frac{r_k}{d}\frac{r_{k-1}}{d} - \frac{r_k}{d} - \frac{r_{k-1}}{d}) \\ \leq \quad & \frac{r_k^2}{d} - 2r_k \\ < \quad & n - r_k \\ < \quad & dn - dr_k \end{aligned}$$

□

Teorem 4.2.6 $S = \langle r_1, \cdots, r_k \rangle$ nümerik monoid, $d = OBEB(r_1, \cdots r_k) = d$, $n > r_k^2$ ve $OBEB(d, n) = 1$ olsun.
$a_1n_1 + \cdots + a_kn_k \mapsto a_1(n_1 + r_k) + \cdots + a_{k-1}(n_{k-1} + r_{k-1}) + (a_k + d)(n_k + r_k)$ şeklinde tanımlanan

$$\phi : Ap(M_n) \to Ap(M_{n+r_k})$$

fonksiyonu birebirdir. Ayrıca

$$\phi(Maksimaller_{\leq_{M_n}} Ap(M_n)) = Maksimaller_{\leq_{M_{n+r_k}}} Ap(M_{n+r_k})$$

olur.

Kanıt. $\phi' : Ap(S,dn) \to AP(S,dn+dr_k)$, $\phi(i) = i + dr_k$ fonksiyonu yardımıyla $\phi(i + m_S(i).n) = i + dr_k + m_S(i + dr_k)(n + r_k)$ şeklinde tanımlayalım. $a \in Ap(M_n)$ için $a = a_1n_1 + \cdots + a_kn_k = i + m_S(i).n$, $a_1 + \cdots + a_k = m_S(i)$ olsun.

$$\begin{aligned} \phi(a) = & \quad i + dr_k + m_s(i + dr_k).(n + r_k) \\ = & \quad i + m_S(i)n + m_S(i)r_k + d(n + 2r_k) \\ = & \quad a_1n_1 + \cdots + a_kn_k + (a_1 + \cdots + a_k)r_k + d(n + 2r_k) \\ = & \quad a_1(n_1 + r_k) + \cdots + a_{k-1}(n_{k-1} + r_{k-1}) + (a_k + d)(n_k + r_k) \end{aligned}$$

ϕ' birebir olduğundan ϕ birebirdir. $b \notin Im(\phi)$ ve $b \in Max_{\leq_{M_{n+r_k}}} Ap(M_{n+r_k})$ olsun. ϕ, Apery kümelerindeki $di + dn$'e karşılık gelen elemanlarla $di + dn + dr_k$'ye karşılık gelen elemanlar arasında birebir eşleşme sağladığı için $b = di + m_S(di)(n + r_k)$ formunda olmalıdır. $b \notin Im(\phi)$ olduğundan $di - dr_k \notin S$ olmalıdır. Lemma 4.2.5'den dolayı $di - dr_k < dn - dr_k$ olur. O zaman $di + dr_k \in Ap(S, dn + dr_k)$ olur.
$c = di + dr_k + m_S(di + dr_k)(n + r_k)$ olsun.
$c - b = dr_k + d(n + r_k) = dr_k + m_S(dr_k)(n + r_k) \in Ap(M_{n+r_k})$ olduğundan $b \notin Maksimaller_{\leq_{M_{n+r_k}}} Ap(M_{n+r_k})$ olur.

$a \leq_{M_n} a'$, $a, a' \in Ap(M_n)$ olsun. O zaman $a_i \leq a'_i$ olacak şekilde $a = a_2n_2 + \cdots + a_kn_k$, $a' = a'_2n_2 + \cdots + a'_kn_k$ gösterilişleri vardır. O zaman $\phi(a) = a_2(n_2 + r_k) + \cdots + a_{k-1}(n_{k-1} + r_k) + a_k(n_k + r_k)$, $\phi(a') = a'_2(n_2 + r_k) + \cdots + a'_{k-1}(n_{k-1} + r_k) + a'_k(n_k + r_k)$ ve bu yüzden $\phi(a) \leq_{M_n} \phi(a')$ olur.

Bir başka deyişle,

$$\phi(Maksimaller_{\leq_{M_n}} Ap(M_n)) = Maksimaller_{\leq_{M_{n+r_k}}} Ap(M_{n+r_k})$$

olur.

□

Sonuç 4.2.7 $n > r_k^2$ olacak şekildeki yeterince büyün n için

$$i(M_n) + d = i(M_{n+r_k})$$

Kanıt. Yeterince büyük n için $G(M_n)$ ve $G(M_{n+r_k})$ Cohen-Macaulay olduğundan $i(M_n)$ ve $i(M_{n+r_k})$ Apery kümelerindeki maksimal elemanların mertebelerinin en büyüğüne eşittir. Bu durumda eğer $i(M_n) = r = ord(w)$ ise $i(M_{n+r_k}) = ord(\phi(w)) = r + d$ olur.

□

Sonuç 4.2.8 $n > r_k^2$ için

$$t(M_n) = t(M_n + r_k)$$

olur. Özel olarak, M^n simetriktir ancak ve ancak M_{n+r_k} simetriktir.

Kanıt. $type(M_n) = |Maksimaller_{\leq_{M_n}} Ap(M_n)| = |Maksimaller_{\leq_{M_{n+r_k}}} Ap(M_{n+r_k})| = type(M_n + r_k)$

□

Sonuç 4.2.9 $n > r_k^2$ için,

$$i(M_n) = \frac{F(M_{n+r_k}) - F(M_n) - d(n_k + r_k) + r_k)}{r_k}$$

Kanıt. $F(M_n) = w - n$ olacak şekilde $w \in Maksimaller_{\leq_{M_n}} Ap(M_n)$ vardır. Bu durumda $F(M_{n+r_k}) = \phi(w) - (n + r_k)$ olduğu için yukarıdaki eşitliği elde ederiz.

□

Örnek 4.2.10 $S =< 6, 10, 14 >$ olsun.
$n > r_k^2 = 14^2 = 196$ koşuluna uygun olması için $M_{293} =< 293, 299, 303, 307 >$ ve $M_{307} =< 307, 313, 317, 321 >$ nümerik yarıgruplarını inceleyelim.

$Max_{\leq_{M_{293}}} Ap(M_{293}) = \{13177, 13181, 13189, 13193\}$
$Max_{\leq_{M_{307}}} Ap(M_{307}) = \{14421, 14425, 14433, 14437\}$

$Ap(M_n) = \{i + m_S(i).n \mid i \in Ap(S, dn)\}$ olduğu için Apery kümelerindeki her elemana karşılık gelen $Ap(S, 586)$ ve $Ap(S, 614)$ kümelerindeki elemanlar sırasıyla ;
$\{578, 582, 590, 594\}$ ve $\{606, 610, 618, 622\}$ olur.
Buradan da açıkça görebiliriz ki $\phi'(578) = 606$, $\phi'(582) = 610$, $\phi'(590) = 618$, $\phi'(594) = 622$ olur ve bu yüzden;
$\phi(13177) = 14421$, $\phi(13181) = 14425$, $\phi(13189) = 14433$ ve $\phi(13193) = 14437$ olur.

Bölüm 5

SONUÇ

Bu tezde nümerik yarıgrupların düzenlilik indekslerinin nasıl değiştiğine odaklandık. $S_1 \subset S_2$ iken çeşitli durumlarda yarıgrupların düzenlilik indeksinin nasıl değiştiğine ilişkin sonuçlar elde ettik ve Arf kapanışı aynı olan halkaların düzenlilik indekslerine ilişkin Arslan ve Sertöz tarafından öne sürülen bir sanıya karşıt örnek sunduk. Ayrıca, ötelenmiş yarıgrup ailelerinde düzenlilik indeksinin nasıl değiştiğine ilişkin sonuçlar da elde ettik.

$S_1 \subset S_2$ iken şu iki temel durumun hala açık olduğunu vurgulayalım:

Soru. $S_1 = \langle n_1, n_2, ..., n_d \rangle$, $S_2 = \langle n_1, n_2, ..., n_d, m \rangle$ ve $n_1 < n_2 < \cdots < n_d < m$ olsun. Bu durumda $i(S_2) \leq i(S_1)$ olur mu?

Soru. $S_1 = \langle n_1, n_2, ..., n_d \rangle$, $S_2 = \langle n_1, n_2, ..., n_d, m \rangle$, $n_1 < n_2 < m$ ve $n_1 \leq 10$ olsun. Bu durumda, $i(S_2) \leq i(S_1)$ olur mu?

Kaynakça

[1] **Arf C.**, 1948. Une interpretation algébrique de la suite des ordres de multiplicité d'une branche algébrique. *Proceedings of the London Mathematical Society*,**2(1),** 256-287.

[2] **Arslan, F.** 1994. On Arf rings *MS dissertation, Bilkent Universitesi*

[3] **Arslan, S.F.** , 1999. Monomial curves and the Cohen-Macaulayness of their tangent cones *Doctoral dissertation, Bilkent Universitesi*

[4] **Arslan F.,** 1999 Cohen-Macaulayness of tangent cones, *Proc.Amer.Math.Soc.* **128,** no.8, 2243-2251

[5] **Arslan, F., Çiftlikli, E.**, Numerical semigroups and regularity index, *preprint*

[6] **Arslan F., Mete P., Şahin M.** 2009 Gluing and Hilbert Functions of Monomial Curves *Proc.Amer.Math.Soc.* **137,** 2225–2232 .

[7] **Arslan F., Sipahi N., Şahin N.,** Monomial curve families supporting Rossi's Conjecture

[8] **Arslan F., Mete P.,** 2007. Hilbert functions of Gorenstein monomial curves. *Proc.Amer.Math.Soc.* **135,** 1993-2002.

[9] **Arslan, F., Şahin, N.ü**, 2014. A fast algorithm for constructing Arf closure and a conjecture. *Journal of Algebra* **417,** 148-160.

[10] **Atiyah** 1994. Introduction to Commutative Algebra *Westview Press*

[11] **Balcerzyk S., Josefiak T.** 1989 Commutative rings, dimension, multiplicity and homological methods, *Ellis Horwood Limited, PWN-Polish Scientific Publishers*

[12] **Barucci V. , . Fröberg B.** 2006 Associated graded rings of one-dimensional analytically irreducible rings *Journal of Algebra*, **304,** 349–358.

[13] **Bresinsky H.,** 1975 Symmetric Semigroups of Integers Generated by four elements, *Manuscripta Math.*, **17,** 205-219.

[14] **Bresinsky H.,** 1975 On Prime ideals with generic zero $x_i = t^{n_i}$, *Proc.Amer.Math.Soc.* **47,** no.2 329-332.

[15] **Bresinsky, H.** 1979 Monomial Gorenstein ideals. *Manuscripta Math.* **29,** no. 2-4, 159–181.

[16] **Cortadellas T. , Zarzuela S.** 2011 Apery and Microinvariants of a one dimensional Cohen-Macaulay local ring and the invariants of its tangent cone *J. Algebra* **328,** 94–113.

[17] **Cortadellas T. , Zarzuela S.** 2009 Tangent cones of numerical semigroup rings *Contemp. Math.* **502,** 45-58.

[18] **Cortadellas T. ,Jafari R. Zarzuela S.** 2013 On the Apery sets of monomial curves *Semigroup Forum* **86,** 289-320.

[19] **Cox D., Little J., O'Shea D.,** 1989 Ideals, Varieties and Algorithms, *An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, 3rd edition.*

[20] **Curtis F.** 1990 On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup. *Math. Scand.* **67,** no. 2, 190–192.

[21] **Eakin J., Sathaye A.** 1976 Prestable ideals, *Journal of Algebra* **41,** 439-454

[22] **Eisenbud D.** 1995. Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry *Springer-Verlag*

[23] **Elias J.** 1993 The conjecture of Sally on the Hilbert function for curve singularities, *Journal of Algebra* **160,** No.1 , 42-49.

[24] **Froberg R.** 1994 The Frobenius number of some semigroups. *Comm. Algebra* **22,** no. 14, 6021–6024.

[25] **Gimenez P., Srinivasan H.,** A note on Gorenstein Monomial Curves

[26] **Greuel G.M., Pfister G.** A Singular Introduction to Commutative Algebra

[27] **Heap, B. R.; Lynn, M. S.** 1964 A graph-theoretic algorithm for the solution of a linear Diophantine problem of Frobenius. *Numer. Math. 6* 346–354.

[28] **Herzog J.,** 1970. Generators and Relations of Abelian Semigroups and Semigroup Rings, *Manuscripta Math.*, **3,** 175-193.

[29] **Herzog J., Waldi R.** 1975 A note on the Hilbert function of a one-dimensional Cohen-Macaulay ring, *Manuscripta Math.*, **16,** 251-260.

[30] **Herzog J. and Stamate D.I.,** On the Defining Equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring

[31] **Jayanthan A.V. and Srinivasan H.,** Periodic Occurance of Complete Intersection Monomial Curves, *Amer.Math.Soc.*

[32] **Kunz,E.,** 1970. The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring, *Proc.Amer.Math.Soc.* **25,** 748-751

[33] **Matlis E.,** 1977. One-dimensional Cohen-Macaulay Rings, *Lecture Notes in Mathematics* **327,** Springer-Verlag.

[34] **Matsumura H.** 1989 Commutative ring theory *Cambridge university press* **8**

[35] **Nalbandiyan M.**, 2015 Simetrik Nümerik Yarıgruplar (Yüksek Lisans Tezi, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi).

[36] **O'Neill C. , Pelayo R.** 2018 Apery sets of shifted numerical monoids *Advances in Applied Mathematics* **97,** no. 1, 27-35.

[37] **Rosales J.C. , García-Sánchez P.A.** 2009 Numerical Semigroups *Developments in Mathematics, 20*

[38] **Rossi, M.** 2000. A bound on the reduction number of a primary ideal. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **128(5)**, 1325-1332.

[39] **Sally, J.** 1976. Bounds for numbers of generators of Cohen-Macaulay ideals. *Pacific Journal of Mathematics*, **63(2)** 517-520.

[40] **Sertoz S., Ozlük A. E.** 1986 On a Diophantine problem of Frobenius. *İstanbul Tek. Üniv. Bül.* **39,** no. 1, 41–51.

[41] **Vasconcelos WV** 1998 Cohomological degrees of graded modules. *Six lectures on commutative algebra* 345-392.

[42] **Vu T.,** 2013 Periodicity of Betti numbers of monomial curves, *math.AC* 17pp, arXiv: 1304.1659