MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ ★
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NÜMERİK AŞIRI-DÖNÜŞSEL OPERATÖRLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan: Umutcan ERDUR

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı: MATEMATİK YÜKSEK LİSANS

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Özgür MARTİN

İSTANBUL TEMMUZ 2020

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NÜMERİK AŞIRI-DÖNÜŞSEL OPERATÖRLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Umutcan ERDUR

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Yüksek Lisans Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Özgür MARTİN

TEMMUZ 2020

.... tarafından hazırlanan .... adlı bu tezin .... tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

....

Tez Danışmanı

Bu çalışma, jürimiz tarafından .... Anabilim Dalında .... tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : ______________________________________

Üye : ______________________________________

Üye : ______________________________________

Bu tez, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak yazılmıştır.

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Ücret karşılığı başka kişilere yazdırmadığımı (dikte etme dışında), uygulamalarımı yaptırmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

NÜMERİK AŞIRI-DÖNÜŞSEL OPERATÖRLER

ÖZET

Bu tezde diyagonal nümerik aşırı-dönüşsellik kavramı öne sürülmüş ve klasik Banach dizi uzaylarında tanımlı, ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin diyagonal nümerik aşırı-dönüşselliği üzerinde çalışılmıştır. Öncelikle, birinci bölümde aşırı-dönüşsellik kavramı tanıtılmış, bahsi geçen dizi uzaylarında tek ve çift taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin aşırı-dönüşselliğinin karakterizasyonları verilmiş olup, bu karakterizasyonlar aracılığıyla, verilmiş bir ağırlıklı sola kaydırma operatörü için aşırı-dönüşsel bir vektörün inşası yapılmıştır. İkinci bölümde ise nümerik aşırı-dönüşsellik kavramı tanıtılmış, sonlu boyutlu Banach uzaylarında nümerik aşırı-dönüşsel operatörlerin varlığı hakkında bir önerme verilmiş, klasik Banach dizi uzaylarında verili ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin nümerik aşırı-dönüşselliğinin karakterizasyonları verilmiştir. Üçüncü bölümde ilk olarak diyagonal aşırı-dönüşsellik kavramı ve ilgili diğer kavramlar verilip, devamında bu kavramların aralarındaki ilişkilerden bahsedilmiştir. Sonrasında tek taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin diyagonal aşırı-dönüşselliğinin bir karakterizasyonu verilmiştir. Dördüncü bölümdeyse diyagonal nümerik aşırı-dönüşsellik kavramı öne sürülmüş, sonlu boyutlu Banach uzaylarında diyagonal nümerik aşırı-dönüşsel operatörlerin varlığına dair bir önerme ve klasik Banach uzaylarında verili ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin diyagonal nümerik aşırı-dönüşselliği için yeterli koşullar önerilmiş ve kanıtlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Banach dizi uzayları, Ağırlıklı Sola Kaydırma Operatörleri, Aşırı-Dönüşsellik, Diyagonal Aşırı-Dönüşsellik, Nümerik Aşırı-Dönüşsellik, Diyagonal Nümerik Aşırı-Dönüşsellik.

NUMERICALLY HYPERCYCLIC OPERATORS

ABSTRACT

In this thesis, the notion of disjoint numerical hypercyclicity is proposed and the disjoint numerically hypercyclicity of weighted backward shift operators given on classical Banach sequence spaces is studied. In the first chapter, the notion of hypercyclicity is presented and the characterization of the hypercyclicity of weighted backward shift operators on classical Banach sequence spaces is given, and through these characterizations a hypercyclic vector for such a given operator is constructed. In the second chapter, the concept of numerical hypercyclicity is introduced, a proposition on the existence of numerically hypercyclic operators on finite dimensional numerically hypercyclic operators is given, then characterizations for numerically hypercyclicity of weighted backward shift operators on classical Banach sequence spaces are given. In the third chapter, first, the concept of disjoint hypercyclicity and other related concepts are given, and then the relations between these concepts are mentioned. Afterward, a characterization of disjoint hypercyclicity for the unilateral weighted backward shift operators is given. In the fourth chapter, the concept of disjoint numerical hypercyclicity is proposed, a proposition on the existence of disjoint numerically hypercyclic operators on finite dimensional Banach spaces and sufficient conditions for disjoint numerical hypercyclicity of weighted shift operators on classical Banach sequence spaces are proposed and proven.

Keywords: Banach sequence spaces, Weighted Backward Shift Operators, Hypercyclicity, Disjoint Hypercyclicity, Numerical Hypercyclicity, Disjoint Numerical Hypercyclicity.

Önsöz

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi'ndeki çalışmalarım sırasında bana gösterdiği sabır ve desteğinden dolayı ne kadar teşekkür etsem yetersiz olacağının bilincinde olduğum tez danışmanım Doç. Dr. Özgür Martin'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez jürisinde bulunmayı kabul eden Doç. Dr. Turgay Bayraktar ve Dr. Öğr. Üyesi Sibel Şahin'e teşekkür ederim.

Dr. Öğr. Üyesi Fatma Altunbulak Aksu'ya destekleri ve cesaretlendirmeleri için şükranlarımı sunarım. Ayrıca matematik ve hayata dair öneri ve tavsiyeleri için Doç. Dr. Özgür Martin ve Dr. Öğr. Üyesi Fatma Altunbulak Aksu'ya minnettarım.

İlaveten matematik açısından ufkumu genişletmemde olan desteklerinden dolayı Prof. Dr. Ayşe Berkman, Prof. Dr. David Pierce ve Dr. Öğr. Üyesi Sibel Şahin'e teşekkürlerimi sunarım.

İstanbul Bilgi Üniversitesi'ndeki çalışma arkadaşlarım Tarık Bayrakçı ve Emre Kırlı'ya, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi'nden arkadaşlarım İbrahim Altun, Gökhan Ayyıldız, Mustafa Eroğlu, Emre Okuyucu, Özlem Duygu Yılmaz ve Selda Zeray'a destekleri ve eleştirileri için teşekkür ederim.

Son olarak, yeterince teşekkür edebilmek için sözcüklerin yetersiz kalacağı Annem Armağan, Teyzem Asuman, Ablam Serra, Eniştem Yusuf ve Yeğenim Reyyan'a sonsuz destekleri ve sabırları için teşekkür ederim.

Umutcan Erdur

İçindekiler

Bölüm 1

AŞIRI-DÖNÜŞSEL OPERATÖRLER

Bu bölümün genelinde kaynakçada belirtilen [7], [9], [11] ve [12] kaynaklarından yararlanılmıştır. İlk altbölümde tezin geri kalanında kullanılacak temel kavramlar ve önermeler verilmiştir. İkinci altbölümde aşırı-dönüşsellik kavramı ve bu kavramla ilişkili olan Birkhoff Geçişkenlik Teoremi verilmiştir. Üçüncü altbölümde ağırlıklı sola kaydırma operatörleri tanıtılmış olup, dördüncü altbölümde ise [13] nolu kaynaktan yararlanılarak aşırı-dönüşsel ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin bir karakterizasyonu verilmiştir. Devamında ise bu karakterizasyonlar kullanılarak aşırı-dönüşsel vektörlerin inşası yapılmıştır.

1.1 Temel Kavram ve Önermeler

Tanım 1.1.1. *X bir topolojik uzay olup, $E \subset X$ altküme olsun. Eğer X uzayının verili her U boştan farklı, açık altkümesinin E ile kesişimi, $E \cap U$, boş kümeden farklıysa E kümesi X uzayında yoğundur denir.*

Sonuç 1.1.1. *(X, d) metrik uzayında bir $E \subset X$ altkümesinin X uzayında yoğun olması için gerekli ve yeterli koşul verili $x \in X$ noktası ve verili $\epsilon > 0$ sayısı için $B(x, \epsilon) = \{y \in X \ : \ d(x, y) < \epsilon\}$ kümesinin E ile kesişiminin, $E \cap B(x, \epsilon)$, boş kümeden farklı olmasıdır. Başka deyişle, E kümesinin X uzayında yoğun olması için gerekli ve yeterli koşul $\overline{E} = X$ olmasıdır.*

Tanım 1.1.2. *X bir topolojik uzay olup, X uzayının sayılabilir ve X uzayında yoğun bir altkümesi varsa, X ayrılabilirdir denir.*

Tanım 1.1.3. *X bir topolojik uzay olup, $E \subset X$ altkümesinin X üzerindeki topolojiye göre kapanışının içi, $int(\overline{E})$, boş küme ise E'ye X'te seyrek küme denir. X uzayında seyrek kümelerin sayılabilir birleşiminden oluşan kümeye birinci kategori küme denir. X uzayının birinci kategori olmayan altkümelerine ise ikinci kategori küme denir. Ayrıca sayılabilir sayıda X uzayı üzerindeki topolojiye göre açık kümenin kesişiminden oluşan kümeye bir G_δ-küme denir.*

Tanım 1.1.4. *(X, d) bir metrik uzay olup, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ X uzayından alınmış bir dizi olsun. Verili $\epsilon > 0$ için öyle N pozitif tamsayısı varsa ki her $k, m \geq N$ pozitif tamsayıları için $d(x_k, x_m) < \epsilon$ sağlansın. O halde $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisine (X, d) uzayında bir Cauchy dizisi denir. Bir (X, d) metrik uzaydan alınmış tüm Cauchy dizileri bu metrik uzayda yakınsak ise (X, d)'ye tam metrik uzay denir.*

Fonksiyonel Analiz'in temel teoremlerinden Baire Kategori Teoremi'ni ispatsız olarak verelim. Bu teoremin bir kanıtı [12] nolu kaynakta bulunabilir.

Önerme 1.1.1 (*Baire Kategori Teoremi*)**.**
(X, d) bir tam metrik uzay olsun. X uzayında yoğun açık kümelerin sayılabilir kesişimi de X uzayında yoğun bir kümedir.

Sonuç 1.1.2. *Bir (X, d) tam metrik uzayı ikinci kategoridir.*

Not 1.1.1. *Çalışacağımız tüm vektör uzayları kompleks sayılar cismi $\mathbb{C}$ üzerinde verilmiştir.*

Gösterim 1.1.1. *Verilen vektör uzayının sıfır vektörünü θ ile göstereceğiz. Ayrıca $\mathbb{N}$ ile negatif olmayan tamsayıların kümesini göstereceğiz.*

Tanım 1.1.5. *X bir vektör uzayı olup, aşağıdaki koşulları sağlayan $\| * \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir norm ve $(X, \| * \|)$ ikilisine normlu vektör uzayı denir.*

(i) Verili $x \in X$ için $\|x\| \geq 0$'dır. Ayrıca $\|x\| = 0$ olması ancak ve ancak $x = \theta$ olmasıyla mümkündür.

(ii) Verili $x \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

(iii) Verili $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ayrıca bir tam normlu vektör uzayına Banach uzayı denir.

Tanım 1.1.6. *$(X, \| * \|)$ bir normlu vektör uzayı olsun. x_0 X'te bir vektör ve $\epsilon > 0$ sayı olup, $B(x_0, \epsilon) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \epsilon\}$ kümesine x_0 merkezli ϵ yarıçaplı açık yuvar, $\overline{B(x_0, \epsilon)} = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \epsilon\}$ kümesine de x_0 merkezli ϵ yarıçaplı kapalı yuvar denir. $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kümesine $(X, \| * \|)$ uzayının birim kapalı küresi, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ kümesine ise $(X, \| * \|)$ uzayının birim küre yüzeyi diyeceğiz.*

Örnek 1.1.1. *Verili $p \in [1, \infty)$ gerçel sayısı için $\ell^p = \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p < \infty\}$ vektör uzayı üzerinde $\|x\|_p = (\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}$, $x \in \ell^p$, normunu göz önüne alalım. Göstermek mümkündür ki $(\ell^p, \| * \|_p)$ ayrılabilir bir Banach uzayıdır.*

Örnek 1.1.2. *$\ell^\infty = \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < \infty\}$ vektör uzayı üzerinde $\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|$, $x \in \ell^\infty$, normunu göz önüne alalım. Göstermek mümkündür ki $(\ell^\infty, \| * \|_\infty)$ ayrılabilir olmayan bir Banach uzayıdır.*

Örnek 1.1.3. *$c_0 = \{x = (x_j)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \lim_{j \to \infty} |x_j| = 0\}$ vektör uzayı üzerinde $\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|$, $x \in c_0$, normunu göz önüne alalım. Göstermek mümkündür ki $(c_0, \| * \|_\infty)$, $(\ell^\infty, \| * \|_\infty)$' nin kapalı altuzayıdır. Özel olarak, $(c_0, \| * \|_\infty)$ ayrılabilir bir Banach uzayıdır.*

Örnek 1.1.4. *Verili $p \in [1, \infty)$ gerçel sayısı için $\ell^p(\mathbb{Z}) = \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^p < \infty\}$ vektör uzayı üzerinde $\|x\|_p = (\sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}$, $x \in \ell^p(\mathbb{Z})$, normunu göz önüne alalım. Göstermek mümkündür ki $(\ell^p(\mathbb{Z}), \| * \|_p)$ ayrılabilir bir Banach uzayıdır.*

Örnek 1.1.5. *$\ell^\infty(\mathbb{Z}) = \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sup_{j \in \mathbb{Z}} |x_j| < \infty\}$ vektör uzayı üzerinde $\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|$, $x \in \ell^\infty$, normunu göz önüne alalım. Göstermek mümkündür ki $(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \| * \|_\infty)$ ayrılabilir olmayan bir Banach uzayıdır.*

Örnek 1.1.6. *$c_0(\mathbb{Z}) = \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \inf_{J \subset \mathbb{Z}, J\, sonlu} \sup_{j \in \mathbb{Z} \setminus J} |x_j| = 0\}$ vektör uzayı üzerinde $\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|$, $x \in c_0(\mathbb{Z})$, normunu göz önüne alalım. Göstermek mümkündür ki $(c_0(\mathbb{Z}), \|*\|_\infty)$ $(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \|*\|_\infty)$ uzayının kapalı bir altuzayıdır. Özel olarak, $(c_0(\mathbb{Z}), \| * \|_\infty)$ ayrılabilir bir Banach uzayıdır.*

Tanım 1.1.7. *Verili $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $x_j \in \mathbb{C}$, dizisine karşı gelen $supp(x) = \{j \in \mathbb{N} : x_j \neq 0\}$ kümesine x dizisinin destek kümesi denir ve bu kümenin kardinalitesini $|supp(x)|$ ile göstereceğiz. Ayrıca indisleri belirli bir $N \in \mathbb{N}$ sayısından büyük tüm terimleri sıfır olan x dizisine sonlu dizi diyeceğiz ve bu durumda $I(x) = \max\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq 0\}$ olarak gösterelim. Eğer verili x dizisi $\mathbb{Z}$ üzerinden indislenmişse $supp(x) = \{j \in \mathbb{Z} : x_j \neq 0\}$, $I(x) = \max\{|j| \in \mathbb{N} : x_j \neq 0\}$ olarak göstereceğiz.*

Gösterim 1.1.2. *δ_j^i Kronecker delta fonksiyonu olup, kanonik baz ile $\{e_i = (\delta_j^i)_i : i \in \mathbb{N}\}$ (veya $\{e_i = (\delta_j^i)_i : i \in \mathbb{Z}\}$) olarak verilmiş kümeyi kastedeceğiz.*

Tanım 1.1.8. *$(X, \| * \|_X)$ ve $(Y, \| * \|_Y)$ iki normlu vektör uzayı olsun. $T : X \longrightarrow Y$ sürekli lineer dönüşümüne operatör denir. $L(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y : T \text{ operatör}\}$ vektör uzayı üzerinde*

$$\|T\|_{L(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{\theta\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Tx\|_Y$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Göstermek mümkündür ki $(L(X,Y), \| * \|_{L(X,Y)})$ bir normlu vektör uzayıdır. $Y = X$ olması halinde $L(X,X)$ yerine $L(X)$ yazacağız.

Fonksiyonel Analiz'in en temel önermelerinden ikisini kanıtsız olarak verelim. Bu önermelerin kanıtları [11] nolu kaynakta bulunabilir.

Önerme 1.1.2. *$(X, \| * \|_X)$ ve $(Y, \| * \|_Y)$ iki normlu vektör uzayı olsun. $T : X \longrightarrow Y$ lineer dönüşümü için aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.*

(i) $T : X \longrightarrow Y$ süreklidir.

(ii) $T : X \longrightarrow Y$, X uzayının bir noktasında süreklidir.

(iii) $T : X \longrightarrow Y$ sınırlıdır. Yani öyle bir $M \geq 0$ sayısı vardır ki her $x \in X$ için $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ eşitsizliği sağlanır.

Önerme 1.1.3. *$(X, \| * \|_X)$ bir normlu vektör uzayı ve $(Y, \| * \|_Y)$ Banach uzayı olsun. O halde, $(L(X,Y), \| * \|_{L(X,Y)})$ bir Banach uzayıdır.*

Tanım 1.1.9. *$(X, \| * \|_X)$ bir normlu vektör uzayı olsun. $x^* : X \longrightarrow \mathbb{C}$ sürekli lineer dönüşümüne fonksiyonel denir ve $(X, \| * \|_X)$ üzerinde tanımlı tüm fonksiyonellerin oluşturduğu vektör uzayına, $\| * \|_{X^*} = \sup\{|x^*(x)|/\|x\|_X : x \in X \setminus \{\theta\}\}$ şeklinde tanımlanmış normla beraber, $(X, \| * \|)$ uzayının (topolojik) eşlenik uzayı denir ve X^* ile gösterilir.*

Sonuç 1.1.3. *$(X, \| * \|_X)$ bir normlu vektör uzayı olsun. O halde $(X^*, \| * \|_{X^*})$ bir Banach uzayıdır.*

Gösterim 1.1.3. *Bu metnin geri kalanında bahsedilen normlu vektör uzayları, üzerlerinde tanımlı olan norm fonsiyonlarıyla birlikte anlaşılmalıdır. Ayrıca bu metin boyunca norm fonksiyonunu uzayın belirtilmesi gerekmedikçe $\| * \|$ ile göstereceğiz. Verilen bir vektörün normu derken vektörün ait olduğu uzayda tanımlı norm düşünülerek işlem yapılacaktır.*

Tanım 1.1.10. $(X, \| * \|)$ *bir normlu vektör uzayı olsun.* $(X, \| * \|)$ *uzayında verilmiş* $\Pi(X) = \{(x, x^*) \in X \times X^* : \|x\| = \|x^*\| = x^*(x) = 1\}$ *kümesine* X *uzayının durum kümesi denir.*

Fonksiyonel Analiz'in meşhur teoremlerinden Hahn-Banach Teoremi'ni kanıtsız olarak vereceğiz. Bu teoremin bir kanıtı [6] nolu kaynakta bulunabilir.

Teorem 1.1.1 $(Hahn - Banach)$**.** $(X, \| * \|)$ *bir normlu vektör uzayı,* $M \subset X$ *bir altuzay olup,* $f \in M^*$ *fonksiyoneli verilmiş olsun. O halde öyle* $F \in X^*$ *bulunabilir ki* $F|_M = f$ *ve* $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{M^*}$*.*

Hahn-Banach Teoremi ile ilgili aşağıdaki sonucu verelim. Bu sonucun bir kanıtı [6] nolu kaynakta bulunabilir.

Sonuç 1.1.4. *Verili* $x \in X$ *için öyle* $f \in X^*$*,* $\|f\| = 1$*, fonksiyoneli vardır ki* $f(x) = \|x\|$*.*

Tanım 1.1.11. $(X, \| * \|)$ *bir normlu vektör uzayı olup, keyfi* $x^* \in X^*$ *ve keyfi* $U \subset \mathbb{C}$ *açık kümesi için* $(x^*)^{-1}(U)$ *kümelerinin sonlu kesişimlerinin birleşimlerinden oluşan koleksiyona* X *üzerindeki zayıf topoloji denir.*

Not 1.1.2. X *üzerindeki zayıf topolojiye göre açık olan bir kümenin* X *üzerindeki norm-topolojiye göre de açık bir küme olduğu tanımdan görülür. Ancak bu ifadenin tersi doğru değildir.*

Tanım 1.1.12. $(X, \|*\|_X)$ *ve* $(Y, \|*\|_Y)$ *iki normlu vektör uzayı olup, eğer* $T : X \longrightarrow Y$ *bijektif, norm koruyan, yani her* $x \in X$ *için* $\|Tx\| = \|x\|$ *koşulunu sağlayan, sürekli bir lineer dönüşümü varsa,* X *ve* Y *izomorfiktir denir ve bu durum* $X \cong Y$ *ile gösterilir.*

Üzerinde çalıştığımız dizi uzaylarının eşlenik uzayları hakkındaki aşağıdaki lemma, ikinci ve dördüncü bölümlerde oldukça kullanışlı olacaktır. Bu lemmanın bir kanıtı [9] nolu kaynakta bulunabilir.

Lemma 1.1.1.

(i) *Verili* $p \in (1, \infty)$ *sayısı için* q*,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *eşitliğini sağlayan sayı olsun. O halde* $(\ell^p)^* \cong \ell^q$ *ve* $(\ell^p(\mathbb{Z}))^* \cong \ell^q(\mathbb{Z})$*.*

(ii) $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ *ve* $(\ell^1(\mathbb{Z}))^* \cong \ell^\infty(\mathbb{Z})$*.*

(iii) *Verili* $\xi = (\xi_j) \in \ell^1$ *(sırasıyla* $\ell^1(\mathbb{Z})$*) dizisini kullanarak* $x^*(x) = \sum_j x_j \overline{\xi_j}$ *formülüyle* $x^* \in (\ell^\infty)^*$ *(sırasıyla* $(\ell^\infty(\mathbb{Z}))^*$*) foksiyoneli tanımlanabilir. Ayrıca* $\|\xi\| = \|x^*\|$

Lemma 1.1.2. $(c_0)^* \cong \ell^1$ *ve* $(c_0(\mathbb{Z}))^* \cong \ell^1(\mathbb{Z})$.

Kanıt. Keyfi $x^* \in (c_0)^*$ (sırasıyla $(c_0(\mathbb{Z}))^*$) fonksiyonelini alalım. Keyfi $x = (x_j) \in c_0$ (sırasıyla $c_0(\mathbb{Z})$) vektörünün kanonik baza göre aşağıdaki formda tek türlü gösteriminin olduğunu biliyoruz.

$$x = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j e_j \text{ (analog olarak } x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j e_j)$$

$x^* \in (c_0)^*$ (sırasıyla $(c_0(\mathbb{Z}))^*$) olduğu için takip eden ifade sağlanır.

$$x^*(x) = \sum_j x_j x^*(e_j)$$

Bu ifadede görülen $(x^*(e_j))$ dizisinin terimleri x^* fonksiyonelince tek türlü olarak belirlenir.

Verili $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki kuralla verilmiş olan $y_n = (y_k^{(n)}) \in c_0$ (sırasıyla $c_0(\mathbb{Z})$) vektörünü göz önüne alalım.

$$y_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{|x^*(e_k)|}{x^*(e_k)} & , 0 \le k \le n \text{ tamsayı ve } x^*(e_k) \neq 0 \\ 0 & , k > n, \text{ tamsayı veya } x^*(e_k) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\text{sırasıyla } y_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{|x^*(e_k)|}{x^*(e_k)} & , |k| \le n \text{ tamsayı ve } x^*(e_k) \neq 0 \\ 0 & , \text{ tamsayı } |k| > n \text{ veya } x^*(e_k) = 0 \end{cases} \right)$$

O halde,

$$x^*(y_n) = \sum_{j=1}^{n} y_j^{(n)} x^*(e_j)\text{'dir.}$$

$$\left(\text{sırasıyla } x^*(y_n) = \sum_{j=-n}^{n} y_j^{(n)} x^*(e_j) \right).$$

Keyfi $n \in \mathbb{N}$ için y_n vektörünün kuruluşundan $\|y_n\| = 0$ veya 1'dir. x^* sürekli bir lineer fonksiyonel olması nedeniyle $|x^*(y_n)| \le \|x^*\| \|y_n\|$ eşitsizliği sağlanır ve bu ise takip eden eşitsizliği doğurur.

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} |x^*(e_j)| \le \|x^*\| \left(\text{ veya } a_n = \sum_{j=-n}^{n} |x^*(e_j)| \le \|x^*\| \right), \ n \in \mathbb{N}$$

Açıktır ki (a_n) sayısal dizisi üstten sınırlı monoton artan bir dizidir. O halde (a_n) dizisi yakınsaktır ve üstten $\|x^*\|$ ile sınırlıdır. Başka deyişle aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\sum_{j=0}^{\infty}|x^*(e_j)| = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}|x^*(e_j)| \leq \|x^*\| \text{ (veya} \sum_{j\in\mathbb{Z}}|x^*(e_j)| = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=-n}^{n}|x^*(e_j)| \leq \|x^*\|)$$

Haliyle, $(x^*(e_j)) \in \ell^1$ (veya $(x^*(e_j)) \in \ell^1(\mathbb{Z})$). Ayrıca bu dizinin terimleri verili x^* fonksiyonelince tek türlü belirlendiğinden, x^* fonksiyoneline karşı gelen ve $x^*(x) = \sum_j x_j\bar{\xi_j}$ eşitliğini her $x \in c_0$ (veya $c_0(\mathbb{Z})$) sağlayan tek türlü $(\xi_j) \in c_0$ (veya $c_0(\mathbb{Z})$), vardır. Ayrıca bu (ξ_j) dizisi $\|(\xi_j)\| \leq \|x^*\|$ eşitsizliğini de sağlayacaktır. Öte yandan, keyfi $x \in S_{c_0}$ (veya $S_{c_0(\mathbb{Z})}$) için

$$|x^*(x)| = |\sum_j x_j x^*(e_j)| \leq \|x\|\sum_j |x^*(e_j)| = \sum_j |x^*(e_j)| \leq \|x^*\|$$

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\|=1}|x^*(x)| \leq \textstyle\sum_j |x^*(e_j)| \leq \|x^*\|,$$

ve $\|x^*\| = \sum_j |x^*(e_j)|$ olduğu sonucu alınır.

Tersine, verili $(\xi_j) \in \ell^1$ (veya $\ell^1(\mathbb{Z})$) vektörünü kullanarak $\tilde{x} \in (c_0)^*$ (veya $(c_0(\mathbb{Z}))^*$) fonksiyonelini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\tilde{x}(x) = \sum_j x_j\bar{\xi_j}, x = (x_j) \in c_0 \text{ (veya } c_0(\mathbb{Z})),$$

Aşikardır ki

$$|\tilde{x}(x)| = |\sum_j x_j\bar{\xi_j}| \leq \sum_j |x_j||\xi j|.$$

gerçeklenir.

Bu eşitsizlikten keyfi $x \in S_{c_0}$ (veya $S_{c_0(\mathbb{Z})}$) için $|\tilde{x}(x)| \leq \sum_j |\xi_j|$ sağlandığı ve buradan da $\|\tilde{x}\| = \sup_{\|x\|=1}|\tilde{x}(x)| \leq \sum_j |\xi_j|$ olduğu görülür. Öte yandan $\tilde{x}(e_j) = \bar{\xi_j}$ olduğundan ve verili $x \in S_{c_0}$ (veya $S_{c_0(\mathbb{Z})}$) için

$$|\tilde{x}(x)| = |\sum_j x_j\tilde{x}(e_j)| \leq \|x\|\sum_j \tilde{x}(e_j) = \sum_j \bar{\xi_j} = \|(\xi_j)\| \leq \|\tilde{x}\|$$

gerçeklenir. Yani $\|\tilde{x}\| = \|(\xi_j)\|$ olur.

Sonuç olarak, c_0^* ile ℓ^1 (ayrıca $c_0(\mathbb{Z})^*$) ile $\ell^1(\mathbb{Z})$) arasında normu koruyan, bijektif lineer bir sürekli dönüşümün varolduğu görülür. □

Lemma 1.1.3. *$X = c_0$ (sırasıyla $c_0(Z)$) olsun. O halde her $(x, x^*) \in \Pi(X)$ için x^* fonksiyoneli sonlu desteğe sahiptir. Yani, önceki lemmayı gözönünde tutarsak, x^* fonksiyoneline karşı gelen tek türlü belirli $\xi = (\xi_j) \in \ell^1$ (sırasıyla $\ell^1(Z)$) sonlu bir dizidir.*

Kanıt. Varsayalım ki $(x, x^*) \in \Pi(X)$ verilmiş olsun, yani $\|x\| = \|x^*\| = \|\xi\| = 1$ ve $x^*(x) = \sum_j x_j \bar{\xi_j} = 1$. O halde,

$$1 = x^*(x) = \sum_j x_j \bar{\xi_j} = \Big| \sum_j x_j \bar{\xi_j} \Big| \leq \sum_j |x_j||\xi_j| \leq \sum_j |\xi_j| = 1.$$
$$1 = \sum_j |x_j||\xi_j| \leq \sum_j |\xi_j| = 1.$$

olur. Bu ifadeden aşağıdaki yeni eşitlik elde edilir.

$$\sum_j |\xi_j||1 - |x_j|| = 0$$

Buradan her bir j için $|\xi_j||1 - |x_j|| = 0$ olduğu görülür. $x = (x_j) \in S_X$ olduğundan x dizisinin terimlerinin en fazla sonlu tanesinin modulüsü 1 olabilir. Bu durum ise ξ dizisinin en fazla sonlu sayıda teriminin sıfırdan farklı olmasını gerektirir. Böylece x^* dizisinin sonlu desteğe sahip olduğu sonucuna varılır. □

1.2 Aşırı-dönüşsellik

Tanım 1.2.1. *(X, d) bir metrik uzay, $T : X \longrightarrow X$ bir sürekli dönüşüm olsun. (X, T) ikilisine bir dinamik sistem denir.*

Tanım 1.2.2. *(X, T) bir dinamik sistem, $x \in X$ ise bir vektör olsun. $T^0 = Id$, birim dönüşüm, $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$, $n \in \mathbb{N}$, dönüşümüne ise T dönüşümünün n. iterasyonu denir. Elemanları $T^n x$, $n \in \mathbb{N}$, formunda olan kümeye x vektörünün T altındaki yörüngesi denir ve $orb(x, T)$ ile gösterilir.*

$$orb(x, T) = \{T^n x : n \in \mathbb{N}\}.$$

Tanım 1.2.3. *(X, T) bir dinamik sistem olsun. Eğer T altındaki yörüngesi X uzayında yoğun olan bir $x \in X$ vektörü varsa, T operatörü aşırı-dönüşseldir ve x vektörüne T altında aşırı-dönüşsel vektör veya kısaca T-aşırı-dönüşsel vektör denir. Tüm T-aşırı-dönüşsel vektörlerin oluşturduğu kümeyi $HC(T)$ ile göstereceğiz.*

$$HC(T) = \{x \in X : \overline{orb(x, T)} = X\}$$

Tanım 1.2.4. (X,T) *bir dinamik sistem olsun.* X *uzayının keyfi, boştan farklı, açık* U,V *altkümeleri için* $T^n(U)\cap V\neq\emptyset$ *koşulunu sağlayan öyle* $n\in\mathbb{N}$ *bulunabiliyorsa,* (X,T) *dinamik sistemine topolojik geçişken denir. Bir anlamda tanımı esnetirsek,* (X,T) *dinamik sisteminin topolojik geçişken olması halinde* $T:X\longrightarrow X$ *dönüşümüne de topolojik geçişken diyeceğiz.*

Lemma 1.2.1. *Verili* (X,T) *dinamik sisteminin topolojik geçişken olması için gerekli ve yeterli koşul* X *uzayının keyfi boştan farklı, açık* U *altkümesi için* $\bigcup_{n=0}^{\infty}T^{-n}(U)$ *kümesinin* X *uzayında yoğun olmasıdır.*

Kanıt. Gereklilik : Varsayalım ki (X,T) topolojik geçişkendir. Verili $U,V\subset X$ boştan farklı, açık kümeleri için öyle $n\in\mathbb{N}$ vardır ki $T^n(V)\cap U\neq\emptyset$ sağlanır. T sürekli olduğundan, $V\cap T^{-n}(U)$ boştan farklı, açık bir kümedir. V keyfi olduğundan, $\bigcup_{n=0}^{\infty}T^{-n}(U)$ kümesinin, X uzayında yoğun olduğu görülür.

Yeterlilik: U ve V, X uzayının keyfi boştan farklı, açık iki altkümesi olsun. Varsayalım ki $\bigcup_{n=0}^{\infty}T^{-n}(V)$ X uzayında yoğundur. Yani $\bigcup_{n=0}^{\infty}T^{-n}(V)\cap U\neq\emptyset$. O halde öyle $n\in\mathbb{N}$ vardır ki $T^{-n}(V)\cap U\neq\emptyset$. Bu ise $T^n(U)\cap V\neq\emptyset$ olduğu sonucunu verir. Bu durumda, (X,T) dinamik sisteminin topolojik geçişken olduğu görülür. □

Aşırı-dönüşsellik ve topolojik geçişkenlik kavramlarını birbirlerine bağlayan ve ilerideki sayfalarda önemli bir işlev görecek olan Birkhoff Geçişkenlik Teoremi'ni ifade edelim.

Teorem 1.2.1 (*Birkhoff Geçişkenlik Teoremi*).
(X,d) *izole noktaları olmayan ayrılabilir bir tam metrik uzay ve* (X,T) *bir dinamik sistem olsun. O halde* T *operatörünün aşırı-dönüşsel olması için gerekli ve yeterli koşul* (X,T) *dinamik sisteminin topolojik geçişken olmasıdır. Ayrıca* T *aşırı-dönüşselse,* $HC(T)$*,* X *uzayında yoğun olan bir* G_δ*-kümedir.*

Kanıt. Gereklilik : Varsayalım ki T aşırı-dönüşseldir. Yani, öyle $x\in X$ vardır ki $orb(x,T)$ X uzayında yoğundur. U ve V, X uzayının keyfi, boştan farklı, açık altkümeleri olsun. O halde, öyle iki $k,m\in\mathbb{N}$ bulunur ki $T^k(x)\in U$ ve $T^m(x)\in V$ sağlanır. Genelliği bozmadan $k\leq m$ olarak kabul edelim. $T^{m-k}(T^k(x))\in V$ ve $T^k(x)\in orb(x,T)\cap U$ olduğu açıktır. Bu durumda, $n=m-k$ için $T^n(U)\cap V\neq\emptyset$ olur. Sonuç olarak (X,T) dinamik sistemi topolojik geçişkendir.

Yeterlilik: Varsayalım ki (X, T) topolojik geçişkendir. (X, d) ayrılabilir olduğundan, X uzayında yoğun, sayılabilir $\{y_j \in X : j \in \mathbb{N}\}$ altkümesi mevcuttur. $\{B_m(y_j) : m, j \in \mathbb{N}\}$, $B_m(y_j) = \{x \in X : d(y_j, x) < \frac{1}{m}\}$, X üzerindeki metrik topolojinin sayılabilir bir bazıdır. Bu bazın elemanlarını U_k, k pozitif tamsayı, ile yeniden gösterelim. Bu durumda, bir $x \in X$ vektörünün $HC(T)$ kümesinin elemanı olması, verili k pozitif tamsayısı için için öyle $n \in \mathbb{N}$ varolsun ki $T^n x \in U_k$ sağlanmasına denktir. Başka deyişle,

$$HC(T) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k).$$

T sürekli olduğundan, her bir k pozitif tamsayısı için $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ boştan farklı, açık küme olduğu görülür. Bu durumda, $HC(T)$ kümesinin bir G_δ-kümesi olduğunu da görürüz. Ayrıca, Lemma 1.2.1 nedeniyle, her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ kümesinin X uzayında yoğun olduğu sonucu elde edilir. Baire Kategori Teoremi göz önüne alınarak, $HC(T)$ kümesinin X uzayında yoğun bir G_δ- küme olduğu, bu nedenle $HC(T)$ kümesinin boştan farklı bir küme olduğu ve nihayetinde T dönüşümünün aşırı-dönüşselliği sonucu alınır. $\square$

1.3 Ağırlıklı Sola Kaydırma Operatörleri

Bu tezin amaçlarından birini bir anlamda açıklayacak, ayrıca devamında karşılaşacağımız operatörleri anlamamızı kolaylaştıracak olan aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 1.3.1. *$X = c_0$ veya $\ell^p, p \in [1, \infty)$, uzayı olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ verili sabit bir sayı olup, $T = \lambda B$ ile aşağıdaki şekilde tanımlayacağımız lineer dönüşümü gösterelim.*

$$\begin{aligned} T = \lambda B : X &\longrightarrow X \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto (\lambda x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

$\|T\| = |\lambda|$ ve dolayısıyla $T \in L(X)$ olduğu kolayca gösterilir. T operatörüne $\omega = (\omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}, \omega_\nu = \lambda, \nu \in \mathbb{N}$, ağırlıklı tek taraflı sola kaydırma operatörü veya Rolewicz operatörü diyeceğiz.

Eğer $|\lambda| \leq 1$ ise, keyfi $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\|T^n x\| \leq |\lambda|^n \|x\| \leq \|x\|$. Bu durumda $orb(x, T) \subset \overline{B(\theta, \|x\|)}$ olduğu görülür. Bu ise $|\lambda| \leq 1$ durumunda T operatörünün aşırı-dönüşsel olamayacağı anlamına gelir.

Şimdi $|\lambda| > 1$ durumunu inceleyelim. U ve V, X uzayının keyfi boştan farklı, açık altkümeleri olsun. Sonlu dizilerin oluşturduğu küme X uzayında yoğun olduğu için, $x \in U$ ve $y \in V$ sonlu dizileri mevcuttur. $N = \max\{I(x), I(y)\}$ olup, $x = (x_1, x_2, ..., x_N, 0, 0, ...)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_N, 0, 0, ...)$ yazabiliriz. Verili $n > N$ tamsayısı için $z = (z_j) \in X$ dizisinin terimlerini

$$z_j = \begin{cases} x_j & ,\text{eğer } 0 \leq j \leq N, \\ \lambda^{-n} y_j & ,\text{eğer } n+1 \leq j \leq n+N, \\ 0 & ,\text{eğer } j > n+N. \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

O halde $T^n z = y$ ve $\|x - z\| = |\lambda|^{-n} \|y\|$ olduğu görülür. U boştan farklı açık bir küme olduğundan, öyle $\epsilon > 0$ vardır ki $B(x, \epsilon) \subset U$ olur. $n > N$ sayısını yeterince büyük seçmekle $\|x - z\| < \epsilon$ elde ederiz ki bu $z \in U$ olduğu sonucunu verir. $T^n z = y \in V$ olduğu ise açıktır. Bu sebeple $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ve Birkhoff Geçişkenlik Teoremi sebebiyle görülür ki T operatörü aşırı-dönüşseldir.

Nihayetinde, T operatörünün aşırı-dönüşsel olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiş $\lambda \in \mathbb{C}$ için $|\lambda| \geq 1$ olmasıdır.

Tanım 1.3.1. *$X = c_0$ veya $\ell^p, p \in [1, \infty]$, uzayı olsun. $\omega = (\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ dizisi verilsin ve X üzerinde B_ω lineer dönüşümü aşağıdaki kuralla tanımlansın.*

$$B_\omega : X \longrightarrow X$$
$$x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \longmapsto (\omega_{j+1} x_{j+1})_{j \in \mathbb{N}}$$

B_ω dönüşümüne ω-ağırlıklı, tek taraflı sola kaydırma dönüşümü, $\omega = (\omega_\nu)_{\nu_{\nu \in \mathbb{N}}}$ dizisine ise B_ω dönüşümünün ağırlık dizisi denir.

Lemma 1.3.1. *$B_\omega : X \longrightarrow X$ dönüşümünün bir operatör olması için gerekli ve yeterli koşul $\omega = (\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ağırlık dizisinin sınırlı olmasıdır.*

Kanıt. Gereklilik: Varsayalım ki B_ω bir operatördür. Ayrıca varsayalım ki $\omega = (\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ağırlık dizisi sınırsızdır.O halde her bir $j \in \mathbb{N}$ için $\|B_\omega e_j\| = |\omega_{j+1}|$ sınırsızdır ve açıktır ki bu B_ω dönüşümünün sınırsız bir lineer dönüşüm olduğu sonucunu verir. Bu ise B_ω dönüşümünün sınırlı olmasıyla çelişir.

Yeterlilik: Varsayalım ki $\omega = (\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ağırlık dizisi sınırlıdır.Yani, öyle $M > 0$ sayısı vardır ki her bir $j \in \mathbb{N}$ için $|\omega_j| \leq M$ eşitsiliği sağlanır.

$X = \ell^p, p \in [1, \infty)$, durumunda, verili $x \in X$ için

$$\|B_\omega x\| = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\omega_{j+1} x_{j+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} M^p |x_{j+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = M\|x\|$$

$X = \ell^\infty$ veya $X = c_0$ durumunda, verili $x \in X$ için

$$\|B_\omega x\| = \sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} |\omega_{j+1} x_{j+1}| \leq M \sup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} |x_{j+1}| \leq M\|x\|$$

Bu iki durumdan $\|B_\omega x\| \leq M\|x\|$ olduğu ve B_ω dönüşümünün bir operatör olduğu sonucu alınır. □

Not 1.3.1. *B_ω dönüşümünü kanonik baz vektörleri aracılığıyla aşağıdaki özdeşliklerle de ifade edebiliriz.*

$$B_\omega e_j = \omega_j e_{n-1}, \; n \geq 1 \;\; ve \;\; B_\omega e_0 = \theta$$

Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ üzerinde indislenmiş dizi uzaylarında tanımlı çift taraflı ağırlıklı sola kaydırma dönüşümleri aşağıdaki tanımda verilmiştir.

Tanım 1.3.2. *X ile $\ell^p(\mathbb{Z}), p \in [1, \infty]$ veya $c_0(\mathbb{Z})$ uzaylarını gösterelim. $\omega = (\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}$ üzerinde indislenmiş bir dizi, $B_\omega : X \longrightarrow X$ dönüşümü ise aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.*

$$B_\omega : X \longrightarrow X$$
$$x = (x_n) \longmapsto (\omega_{n+1} x_{n+1})$$

B_ω dönüşümüne çift taraflı $\omega = (\omega_\nu)$ ağırlıklı sola kaydırma dönüşümü ve ω dizisine ise B_ω dönüşümünün ağırlık dizisi diyeceğiz.

Not 1.3.2. *Kanonik baz elemanları üzerinden B_ω dönüşümünü*

$$B_\omega e_n = \omega_n e_{n-1}, \; n \in \mathbb{Z}$$

eşitlikleriyle de tarif edebiliriz.

Not 1.3.3. *Bir B_ω çift taraflı ağırlıklı sola kaydırma dönüşümünün bir operatör olması için gerekli ve yeterli koşulun $\omega = (\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ ağırlık dizisinin sınırlı olduğu Lemma 1.3.1 için verilmiş kanıta benzer olarak gösterilebilir.*

Tek ve çift taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin iterasyonlarının operatör normu hakkındaki aşağıdaki lemmayı ifade edelim.

Lemma 1.3.2. *X ile c_0, $c_0(\mathbb{Z})$, ℓ^p veya $\ell^p(\mathbb{Z}), p \in [1,\infty]$, uzaylarından birini gösterelim ve k pozitif tamsayısı verilmiş olsun. $B_\omega : X \longrightarrow X$, $\omega = (\omega_\nu)$ sınırlı dizisiyle verilmiş tek veya çift taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörü olsun, B_ω^k operatörünün k. iterasyonunun, B_ω^k, operatör normu aşağıdaki ifadeyle hesaplanır. (Bu ifadedeki supremum sırasıyla $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ üzerinden alınmaktadır.)*

$$\|B_\omega^k\| = \sup_j \left| \prod_{\nu=j+1}^{j+k} \omega_\nu \right|$$

Kanıt. (a) İlk önce c_0, $c_0(\mathbb{Z})$, ℓ^∞ veya $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ uzaylarında önermeyi kanıtlayalım. Açıktır ki $x = (x_j) \in X$ için $\sup_j |x_{j+k}| \leq \|x\|$. O halde

$$\begin{aligned}\|B_\omega^k\| &= \sup_{\|x\|=1} \|B_\omega^k x\| = \sup_{\|x\|=1} \left(\sup_j \left| \Big(\prod_{\nu=j+1}^{j+k} \omega_\nu \Big) x_{j+k} \right| \right) \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \left(\sup_j \left| \Big(\prod_{\nu=j+1}^{j+k} \omega_\nu \Big) \right| \sup_j |x_{j+k}| \right) \leq \sup_j \left| \prod_{\nu=j+1}^{j+k} \omega_\nu \right|.\end{aligned}$$

Öte yandan verili j için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\|B_\omega^k e_{j+k}\| = \left| \prod_{\nu=j+1}^{j+k} \omega_\nu \right| \leq \|B_\omega^k\|.$$

Buradan ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\sup_j \left| \prod_{\nu=j+1}^{j+k} \omega_\nu \right| \leq \|B_\omega^k\|.$$

(b) Verili $p \in [1,\infty)$ için $X = \ell^p$ veya $X = \ell^p(\mathbb{Z})$ uzaylarında önermeyi kanıtlayalım. Açıktır ki verili $x = (x_j) \in X$ için $\sum_j |x_{j+k}|^p \leq \|x\|^p$. O halde

$$\begin{aligned}\|B_\omega^k\| &= \sup_{\|x\|=1} \|B_\omega^k x\| = \sup_{\|x\|=1} \left(\sum_j \left| \Big(\prod_{\nu=j+1}^{j+k} \omega_\nu \Big) x_{j+k} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \sup_j \left| \prod_{\nu=j+1}^{j+k} \omega_\nu \right| \Big(\sum_j |x_{j+k}|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_j \left| \prod_{\nu=j+1}^{j+k} \omega_\nu \right|\end{aligned}$$

sağlanır. Öte yandan verili j için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\|B_\omega^k e_{j+k}\| = \left| \prod_{\nu=j+1}^{j+k} \omega_\nu \right| \leq \|B_\omega^k\|.$$

Buradan ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\sup_j \left| \prod_{\nu=j+1}^{j+k} \omega_\nu \right| \leq \|B_\omega^k\|.$$

□

1.4 Aşırı-Dönüşsel Sola Kaydırmalar

Buraya kadar olan bilgilerimizi kullanarak ilk önce c_0 veya $\ell^p, p \in [1,\infty)$, uzayları üzerinde verilmiş tek taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin aşırı-dönüşselliği için gerekli ve yeterli bir koşulu aşağıdaki önermede sadece c_0 uzayı koşullarında ifade edeceğiz. $\ell^p, p \in [1,\infty)$, uzayları için aynı önermeyi benzer şekilde kanıtlayabiliriz.

Not 1.4.1. *ω ağırlık dizisinin terimlerinden birinin sıfır olması durumunda B_ω operatörünün aşırı-dönüşsel olması mümkün değildir. Bu sebeple ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin aşırı-dönüşselliği üzerinde çalışırken karşı gelen ağırlık dizisinin terimlerinin sıfırdan farklı olduğunu varsayacağız.*

Önerme 1.4.1 (*c_0 uzayında aşırıdönüşsellik*)**.**
B_ω, c_0 uzayında tanımlı, ağırlık dizisi $\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sınırlı ve terimleri sıfırdan farklı olan, tek taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörü olsun. B_ω operatörünün aşırı-dönüşsel olması için gerekli ve yeterli koşul terimleri pozitif tamsayılar olan öyle kesin artan (n_k) dizisinin bulunabilmesidir, öyle ki keyfi $j \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{\nu=j+1}^{j+n_k} |\omega_\nu| = \infty \tag{1.4.1}$$

sağlansın.

Kanıt. Gereklilik: Varsayalım ki B_ω operatörü aşırı-dönüşseldir ve $k \geq 1$ tamsayısı verilmiş olsun. Birkhoff Geçişkenlik Teoremi göz önünde bulundurularak, varsayımımız gereği $HC(B_\omega)$ kümesinin c_0 uzayında yoğun olduğu görülür. Bundan dolayı, verili $\delta_k > 0$ için öyle $B_\omega-$aşırı-dönüşsel $x = (x_j) \in c_0$ vektörü vardır ki aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$\|x - \sum_{j=0}^{k} e_j\| < \delta_k \tag{1.4.2}$$

ve keyfi derecede büyük $n_k \geq 2k$ pozitif tamsayısı vardır ki

$$\|B_\omega^{n_k} x - \sum_{j=0}^{k} e_j\| < \delta_k \tag{1.4.3}$$

(1.4.2) eşitsizliğinden $0 \leq j \leq k$ tamsayıları için $|x_j - 1| < \delta_k$ ve $j \geq k$ tamsayıları içinse $|x_j| < \delta_k$ olduğu görülür. O halde $0 \leq j \leq k$ tamsayıları için $1 - \delta_k < |x_j|$ eşitsizliği sağlanır. $\delta_k < 1$ olduğunu kabul edersek (1.4.3) eşitsizliğinden $0 \leq j \leq k$ tamsayıları için

$$\left| \Big(\prod_{\nu=j+1}^{j+n_k} \omega_\nu \Big) x_{j+n_k} - 1 \right| < \delta_k$$

ve $j + n_k > k$ olması nedeniyle de $|x_{j+n_k}| > \delta_k$ elde edilir. Bu iki eşitsizliği birarada göz önünde bulundurursak, üçgen eşitsizliğini kullanarak $0 \leq j \leq k$ tamsayıları için şu eşitsizliği elde ederiz.

$$\left| \prod_{\nu=j+1}^{j+n_k} \omega_\nu \right| > \frac{1 - \delta_k}{\delta_k}$$

Verili $k \in \mathbb{N}$ için δ_k sayısını $0 < \frac{\delta_k}{1-\delta_k} < \frac{1}{k}$ koşulunu sağlayacak şekilde seçmekle, $0 \leq j \leq k$ tamsayıları için

$$\left| \prod_{\nu=j+1}^{j+n_k} \omega_\nu \right| > k$$

eşitsizliği alınır. $k \in \mathbb{N}$ keyfi olduğundan, $k \to \infty$ koşulunda son eşitsizlikte limite geçersek istenilen sonuç elde edilir. Yani, her bir $j \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki ifade doğrudur.

$$\lim_{k \to \infty} \prod_{\nu=j+1}^{j+n_k} |\omega_\nu| = \infty$$

Yeterlilik: Birkhoff Geçişkenlik Teoremi göz önünde bulundurulursa, yeterliliğin ispatı için B_ω operatörünün topolojik geçişken olduğunu göstermemiz yeterlidir.

U ve V, c_0'ın keyfi boştan farklı açık altkümeleri olsun. Sonlu dizilerin kümesinin c_0 uzayında yoğun olması nedeniyle, $x = (x_j) \in U$ ve $y = (y_j) \in V$ olacak şekilde sonlu x, y dizileri bulabiliriz. $N = \max\{I(x), I(y)\}$ olarak gösterelim. U ve V boştan farklı açık kümeler olduğundan öyle $\epsilon > 0$ sayısı bulabiliriz ki $B(x, \epsilon) \subset U$ ve $B(y, \epsilon) \subset V$ ilişkileri sağlanır.

Amacımız öyle $z = (z_j) \in c_0$ ve kanıtın ilerleyen kısımlarında belirleyeceğimiz yeterince büyük $n > 2N$ tamsayısı belirleyebilmektir ki $z \in B(x, \epsilon)$ ve $B_\omega^n(z) \in B(y, \epsilon)$ olsun. $z = (z_j)$'nin terimlerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$z_j = \begin{cases} x_j & \text{, eğer } 0 \leq j \leq N, \\ \Big(\prod_{\nu=j-n+1}^{j} \omega_\nu \Big)^{-1} y_{j-n} & \text{, eğer } n \leq j \leq n+N, \\ 0 & \text{geriye kalan durumlarda.} \end{cases}$$

Tanımlanışından z'nin sonlu bir dizi olduğu ve bu sebeple c_0'nın bir elemanı olduğu görülür. Buna ek olarak aşağıdaki ifade geçerlidir.

$$\|x - z\| = \sup\{\Big(\prod_{\nu=j-n+1}^{j} |\omega_\nu|\Big)^{-1} |y_{j-n}| : n \leq j \leq n + N \text{ tamsayılar}\}$$

Eğer $y = \theta$, c_0 uzayının sıfır vektörüyse, $\|x - z\| = 0$ olur ve ϵ'dan küçük olacaktır. Eğer $y \neq \theta$ ise, (1.4.1) koşulundan görülür ki (n_k) dizisinin her bir $j \in \mathbb{N}$ için öyle $\tilde{n}_j > 2N$ terimi vardır ki

$$\Big(\prod_{\nu=j+1}^{j+\tilde{n}_j} |\omega_\nu|^{-1}\Big) < \frac{\epsilon}{\|y\|}$$

eşitsizliği sağlanır. $j > N$ tamsayıları için $y_j = 0$ olduğundan, bu j tamsayılarını göz ardı edebiliriz ve $0 \leq j \leq N$ tamsayılarının her biri için bir $\tilde{n}_j > 2N$ tamsayılarını bulduktan sonra, n sayısını bu $\tilde{n}_j$ sayılarının en büyüğü olarak alalım. $n > 2N$ olduğundan $\|x - z\| < \epsilon$ ve $\|y - B_\omega^n z\| = 0 < \epsilon$ olduğu da doğrudan hesaplamayla görülür.Bu ise yeterlilik kısmının ispatını tamamlar. □

Bu önermedeki (1.4.1) koşulunu sağlayan bir B_ω operatörünün aşırı-dönüşselliğini kanıtlamış olup, bu operatör için aşırı-dönüşsel bir vektörün inşasını topolojik geçişkenlik kavramını kullanmadan da yapabiliriz.

Önerme 1.4.2 (*Yapısalcı Yöntem*)**.**
B_ω, c_0 uzayında tanımlı, sınırlı ve terimleri sıfırdan farklı olan $\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ağırlık dizisiyle verilmiş tek taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörü olsun. Terimleri pozitif tamsayılar olan ve keyfi $j \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{\nu=j+1}^{j+n_k} |\omega_\nu| = \infty$$

koşulunu sağlayan kesin artan (n_k) dizisi varsa, B_ω operatörü aşırı-dönüşseldir.

Kanıt. Öncelikle, $\omega = (\omega_\nu)$ ağırlık dizisinin sınırlı olduğunu hatırlatalım. Yani, öyle $M \geq 1$ sayısı vardır ki her bir $\nu \in \mathbb{N}$ için $|\omega_\nu| \leq M$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca c_0 ayrılabilir olması nedeniyle sonlu dizilerden oluşan, c_0 uzayında yoğun, sayılabilir $\{y^{(n)} = (y_0^{(n)}, y_1^{(n)}, , \ldots, y_{n-1}^{(n)}, 0, 0, \ldots),\ n \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesi mevcuttur.

Amacımız B_ω altındaki yörüngesi c_0 uzayında yoğun olan bir $z = (z_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$ vektörü inşa etmektir. Bunun içinse, B_ω altındaki yörüngesi $\{y^{(n)} :\ n \in \mathbb{N}\}$ kümesinde yoğun olan bir $z = (z_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$ vektörü inşa etmemiz yeterli olacaktır. Bunun için, (n_k) dizisinin öyle (m_k) altdizisini bulalım ki her bir k pozitif tamsayısı için

$$\|B_\omega^{m_k} - y^{(k)}\| \leq \frac{1}{k}$$

eşitsizliği sağlansın.

Her bir $j \in \mathbb{N}$ için,

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{\nu=j+1}^{j+n_k} |\omega_\nu| = \infty$$

olduğu kabulünden, (n_k) dizisinin öyle $m_1 \geq 1$ terimi vardır ki

$$\Big|\prod_{1}^{m_1} \omega_\nu\Big| \|y^{(1)}\| \leq 1 \tag{1.4.4}$$

eşitsizliği sağlanır. $0 \leq j \leq m_1 - 1$ tamsayıları için $z_j = 0$ ve $z_{m_1} = \Big(\prod_1^{m_1} \omega_\nu\Big)^{-1} y_0^{(1)}$ olarak alalım.

Gene (1.4.1) kabulünden dolayı, (n_k) dizisinin öyle $m_2 \geq m_1 + 1$ terimi bulunur ki $j = 0, 1$ için

$$M^{m_1}\Big|\prod_{\nu=j+1}^{j+m_2} \omega_\nu\Big|^{-1} \|y^{(2)}\| \leq \frac{1}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. $1 + m_1 \leq j \leq m_2 - 1$ tamsayıları için $z_j = 0$ ve $j = 0, 1$ için $z_{j+m_2} = \Big(\prod_{j+1}^{j+m_2} \omega_\nu\Big)^{-1} y_j^{(2)}$ olarak alalım.

Bu işlemi böyle devam ettirirsek, (1.4.1) koşulundan, k. adımda (n_k) dizisinin öyle $m_k \geq m_{k-1} + k - 1$ terimini buluruz ki $j = 0, 1, ..., k-1$ için

$$M^{m_{k-1}}\Big|\prod_{j+1}^{j+m_k} \omega_\nu\Big|^{-1} \|y^{(k)}\| \leq \frac{1}{k}$$

eşitsizliği sağlanır. $m_{k-1} + k - 1 \leq j \leq m_k - 1$ tamsayıları için $z_j = 0$ ve $j = 0, 1, ..., k-1$ için $z_{j+m_k} = \Big(\prod_{j+1}^{j+m_k} \omega_\nu\Big)^{-1} y_j^{(k)}$ olarak alalım.

O halde, tümevarımla (n_k) dizisinin her bir k pozitif tamsayısı için öyle $m_k \geq m_{k-1} + k - 1$ terimini bulabileceğimizi kanıtlarız ki $j = 0, 1, ..., k-1$ için

$$|z_{j+m_k}| = \Big|\Big(\prod_{j+1}^{j+m_k} \omega_\nu\Big)^{-1} y_j^{(k)}\Big| \leq M^{m_{k-1}}\Big|\prod_{j+1}^{j+m_k} \omega_\nu\Big|^{-1} \|y^{(k)}\| \leq \frac{1}{k} \tag{1.4.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu durumda terimlerini her bir adımda özel olarak seçtiğimiz $z = (z_j)$ dizisinin c_0 uzayının bir elemanı olduğunu ve her $k \geq 1$ tamsayısı için $\|B_\omega^{m_k} z - y^{(k)}\| \leq \frac{1}{k}$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek geriye kalıyor.

$B_\omega^{m_k} z - y^{(k)}$ vektörünü ele alalım. B_ω operatörünün tanımı gereği, $j = 0, 1, \ldots, m_k - 1$ olduğunda $B_\omega^{m_k} z_j e_j = 0$ olduğu ve $j = m_k, m_k + 1, \ldots, m_k + k - 1$ olduğunda ise $B_\omega^{m_k} z_j e_j = y_{j-m_k}^{(k)}$ olduğunu görmek kolaydır.

Şimdi $j \geq m_k + k$ için $B_\omega^{m_k} z_j e_j$ terimlerine bakalım. Bu terimler ya sıfırdır veya bir $l \geq k+1$ ve $j = 0, 1, ..., l-1$ için aşağıdaki formda olacaktır

$$\Big(\prod_{\nu=j+m_l-m_k+1}^{j+m_l} \omega_\nu\Big)\Big(\prod_{j+1}^{j+m_l} \omega_\nu\Big)^{-1} y_j^{(l)}.$$

Dolayısıyla sıfırdan farklı terimler için, (1.4.5) eşitsizliğinden kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Big|\Big(\prod_{\nu=j+m_l-m_k+1}^{j+m_l} \omega_\nu\Big)\Big(\prod_{j+1}^{j+m_l} \omega_\nu\Big)^{-1} y_j^{(l)}\Big| &\leq M^{m_k-1}\Big|\prod_{j+1}^{j+m_l} \omega_\nu\Big|^{-1} \|y^{(l)}\| \\
&\leq M^{m_{l-1}}\Big|\prod_{j+1}^{j+m_l} \omega_\nu\Big|^{-1} \|y^{(l)}\| \leq \frac{1}{l} \leq \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlandığı görülür.

Böylece, $k \geq 1$ tamsayısı için $\|B_\omega^{m_k} z - y^{(k)}\| \leq \frac{1}{k}$ eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlamış oluruz. Bu sonuç $orb(z, B_\omega)$ kümesinin $\{y^{(n)}$: npozitif tamsayı$\}$ kümesinde yoğun olduğu anlamına gelir ve nihayetinde $orb(z, B_\omega)$ kümesinin c_0 uzayında yoğun olduğu görülür.

$\square$

$c_0(\mathbb{Z})$ veya $\ell^p(\mathbb{Z}), p \in [1, \infty)$, uzayları üzerinde verilmiş tek taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin aşırı-dönüşselliği için gerekli ve yeterli bir koşulu takip eden önermede sadece $c_0(\mathbb{Z})$ uzayı koşullarında ifade edeceğiz. $\ell^p(\mathbb{Z}), p \in [1, \infty)$, uzayları için aynı önermeyi benzer şekilde kanıtlayabiliriz.

Önerme 1.4.3 *($c_0(\mathbb{Z})$ uzayında aşırıdönüşsellik).* *B_ω, $c_0(\mathbb{Z})$ uzayında tanımlı, ağırlık dizisi $\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ sınırlı ve terimleri sıfırdan farklı olan çift taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörü olsun. B_ω operatörünün aşırı-dönüşsel olması için gerekli ve yeterli koşul terimleri pozitif tamsayılar olan öyle kesin artan (n_k) dizisi bulunabilmesidir öyle ki keyfi $j \in \mathbb{Z}$ için*

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{\nu=j-n_k+1}^{j} \omega_\nu = 0, \ \lim_{k\to\infty} \prod_{\nu=j+1}^{j+n_k} |\omega_\nu| = \infty \tag{1.4.6}$$

sağlansın.

Kanıt. *Gereklilik*: Varsayalım ki B_ω operatörü aşırı-dönüşseldir. $k \geq 1$ tamsayısı verilmiş olsun. Birkhoff Geçişkenlik Teoremi göz önünde bulundurularak, $HC(B_\omega)$ kümesinin $c_0(\mathbb{Z})$ uzayında yoğun olduğu görülür. Verili $\delta_k > 0$ için B_ω operatörü altında aşırı-dönüşsel olan öyle $x \in c_0(\mathbb{Z})$ vardır ki

$$\|x - \sum_{|j|\leq k} e_j\| < \delta_k, \tag{1.4.7}$$

ve yeterince büyük $n_k \geq 2k$ pozitif tamsayısı vardır ki

$$\|B_\omega^{n_k} x - \sum_{|j|\leq k} e_j\| < \delta_k \tag{1.4.8}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

(1.4.7) eşitsizliğinden $|j| \leq k$ koşulunu sağlayan tamsayılar için $|x_j - 1| < \delta_k$ olduğu ve $|j| > k$ koşulunu sağlayan tamsayılar içinse $|x_j| < \delta_k$ olduğu açıkça görülür. O halde $|j| \leq k$ koşulunu sağlayan tamsayılar için $1 - \delta_k < |x_j|$ eşitsizliği sağlanır. Şimdi kabul edelim ki $\delta_k < 1$ olsun. $n_k \geq 2k$ olduğundan, $|j| \leq k$ koşulunu sağlayan tamsayılar için $j - n_k < -k$ ve $j + n_k > k$'dir. Bu nedenle, (1.4.7) aşağıdaki eşitsizliği verir.

$$\Big|(\prod_{\nu=j-n_k+1}^{j} \omega_\nu) x_j\Big| < \delta_k, \quad \text{eğer } |j| \leq k,$$

ki bu eşitsizlik de aşağıdaki yeni eşitsizliği verir.

$$\Big|\prod_{\nu=j-n_k+1}^{j} \omega_\nu\Big| < \delta_k/1 - \delta_k, \quad \text{eğer } |j| \leq k.$$

Ayrıca, (1.4.8) eşitsizliği benzer olarak aşağıdakileri verir

$$\Big|(\prod_{\nu=j+1}^{j+n_k}\omega_\nu)x_{j+n}-1\Big|<\delta_k,\ \text{eğer}\,|j|\leq k,$$

ki bu eşitsizlik aşağıdaki yeni eşitsizliği verir

$$\Big|\prod_{\nu=j+1}^{j+n_k}\omega_\nu\Big|>1-\delta_k/\delta_k,\ \text{eğer}\,|j|\leq k.$$

Verili $k\geq 1$ tamsayısı için, δ_k sayısını $\delta_k/1-\delta_k<1/k$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçmekle, $|j|\leq k$ tamsayıları için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir

$$\Big|\prod_{\nu=j-n_k+1}^{j}\omega_\nu\Big|<1/k,$$
$$\Big|\prod_{\nu=j+1}^{j+n_k}\omega_\nu\Big|>k.$$

$k\geq 1$ tamsayısı keyfi olduğundan, $k\to\infty$ koşulunda bu iki eşitsizlikte limite geçmekle (1.4.6) ifadesi elde edilir.

Yeterlilik: Birkhoff Geçişkenlik Teoremi'nin sonucu olarak, B_ω operatörünün $c_0(\mathbb{Z})$ uzayında topolojik geçişken olduğunu göstermemiz yeterlidir.

U, V $c_0(\mathbb{Z})$'nin iki keyfi, boştan farklı, açık altkümesi olsun. Sonlu dizilerin kümesi $c_0(\mathbb{Z})$ uzayında yoğun olduğundan, öyle $x=(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}\in U$ ve $y=(y_j)_{j\in\mathbb{Z}}\in V$ sonlu dizileri vardır ve $N=\max\{I(x),I(y)\}$ olarak gösterelim. O halde $|j|>N$ koşulunu sağlayan tamsayılar için $x_j=y_j=0$ olacaktır. U, V boştan farklı, açık altkümeler olduğundan, uygun $\epsilon>0$ için $B_\epsilon(x)\subset U$, $B_\epsilon(y)\subset V$ ilişkileri sağlanır.

İddiamız öyle bir $z=(z_j)_{j\in\mathbb{N}}\in c_0(\mathbb{Z})$ dizisi ve yeterince büyük $n>2N$ tamsayısı, ki kanıtın içerisinde belirleyeceğiz, vardır ki $z\in B_\epsilon(x)$ ve $B_\omega^n z\in B_\epsilon(y)$ ilişkileri sağlanır . Başka deyişle,

$$\epsilon>\|x-z\|=sup_{j\in\mathbb{Z}}|x_j-z_j|\geq\begin{cases}|x_j-z_j| & ,\ \text{eğer}\ |j|\leq N\\ |z_j| & ,\ \text{eğer}\ |j|>N\end{cases}\tag{1.4.9}$$

$$\epsilon>\|y-B_\omega^n z\|=sup_{j\in\mathbb{Z}}|y_j-(B_\omega^n z)_j|\geq\begin{cases}|y_j-(B_\omega^n z)_j| & \text{eğer}|j|\leq N\\ |(B_\omega^n z)_j| & \text{eğer}\ |j|>N\end{cases}\tag{1.4.10}$$

(1.4.9) ve (1.4.10) eşitsizlikleri inşa edeceğimiz z dizisini belirlemekte bize yol gösterici olacaktır. $z = (z_j)$ terimleri aşağıdaki kuralla verilmiş olan dizi olsun

$$z_j = \begin{cases} x_j, & \text{eğer } |j| \leq N; \\ (\prod_{\nu=j-n+1}^{j} \omega_\nu)^{-1} y_{j-n}, & \text{eğer } n - N \leq j \leq N + n, \\ 0, & \text{eğer } j \in \mathbb{Z} \setminus \{j \in \mathbb{Z} : \ |j| \leq N \text{ veya } n - N \leq j \leq N + n\}. \end{cases}$$

Kurduğumuz z dizisinin gerçekten $c_0(\mathbb{Z})$ uzayında olduğu, (1.4.9) ve (1.4.10) şartlarını sağladığını göstermek kalıyor. x, y ve z sonlu diziler olduğundan ve z dizisinin kuruluş şeklinden aşağıdaki ifade elde edilir

$$\|x - z\| = \sup \left\{ \prod_{\nu=j-n+1}^{j} |\omega_\nu|)^{-1} |y_{j-n}| \ : \ n - N \leq j \leq N + n \right\}.$$

Eğer $y = \theta$, $c_0(\mathbb{Z})$ uzayının sıfır vektörüyse, $\|x - z\| = 0 < \epsilon$ olur. Bu durumda, genelliği bozmadan kabul edebiliriz ki $y \neq \theta$'dır. (1.4.6) koşulundaki ikinci koşuldan, keyfi $j \in \mathbb{Z}$ için öyle $\tilde{n}_j > 2N$ tamsayısının bulunur ki ($\prod_{\nu=j+1}^{j+\tilde{n}_j} |\omega_\nu|)^{-1} < \epsilon/\|y\|$ eşitsizliği sağlanır. Karşılaştığımız durumda, $j > |N|$ tamsayıları için $y_j = 0$ olduğundan, $j > |N|$ tamsayılarını göz ardı edelim.

Benzer şekilde,

$$\|y - B_\omega^n z\| = \sup \left\{ \prod_{\nu=j-\tilde{n}+1}^{j} |\omega_\nu|) |x_{j-\tilde{n}}| \ : \ -N \leq j \leq N \right\}.$$

Eğer $x = \theta$, $c_0(\mathbb{Z})$ uzayının sıfır vektörüyse, $\|y - z\| = 0 < \epsilon$ olur. Bu durumda, genelliği bozmadan kabul edebiliriz ki $x \neq \theta$. O halde, (1.4.6) koşulundaki birinci koşuldan alınır ki keyfi $j \in \mathbb{Z}$ için öyle $\hat{n}_j > 2N$ tamsayısı vardır ki $\prod_{\nu=j-\hat{n}_j+1}^{j} |\omega_\nu| < \epsilon/\|x\|$ sağlanır. Karşılaştığımız durumda, $j > |N|$ tamsayıları için $x_j = 0$ olduğundan, $j > |N|$ tamsayılarını göz ardı edelim. n ile yukarıdaki $\tilde{n}_j$ ve $\hat{n}_j$ tamsayılarının en büyüğünü gösterelim. Açıktır ki $n > 2N$ ve ayrıca $\|x - z\| < \epsilon$, $\|y - B_\omega^n z\| < \epsilon$ olduğu ise kolayca görülür. Buradan da B_ω operatörünün aşırı-dönüşselliği elde edilir. $\square$

Bölüm 2

NÜMERİK AŞIRI-DÖNÜŞSEL OPERATÖRLER

Bu bölümdeki sonuçların hepsi ve kanıtları kaynakçada belirtilen [8] numaralı kaynaktan alınmıştır. Nümerik aşırı-dönüşsellik kavramı tanıtılmış, sonlu boyutlu Banach uzaylarında nümerik aşırı-dönüşsel operatörlerin varlığı hakkında bir önerme verilmiş, klasik Banach dizi uzaylarında verili ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin nümerik aşırı-dönüşselliğinin karakterizasyonları verilmiştir. Shkarin [15], nümerik aşırı-dönüşsel operatörler üzerinde detaylı olarak çalışmıştır ve nümerik aşırı-dönüşsellik için bir kriter belirlemiştir.

2.1 Temel Kavramlar ve Önermeler

$(X, \| * \|)$ ile bir Banach uzayı, $T \in L(X)$ ile bir operatörü göstereceğiz.

Tanım 2.1.1. *Bir $x \in X$ vektörü için orb(x,T) X uzayında, X üzerindeki zayıf topolojiye göre yoğunsa, T operatörü zayıf aşırı-dönüşseldir denir ve $x \in X$ vektörü T operatörü altında zayıf aşırı-dönüşsel bir vektördür denir.*

Lemma 2.1.1. *$T \in L(X)$ operatörü aşırı-dönüşsel ise, aynı zamanda zayıf aşırı-dönüşseldir.*

Kanıt. T aşırı-dönüşsel olduğundan, öyle $x \in X$ vektörü vardır ki $orb(x, T)$ kümesi X uzayında norm-topolojiye göre yoğundur. Yani, keyfi $y \in X$ vektörünün keyfi U komşuluğuna uygun öyle $n \in \mathbb{N}$ bulunur ki $T^n x \in U$ ilişkisi sağlanır. X üzerindeki zayıf topolojiye göre açık olan kümeler aynı zamanda X üzerindeki norm-topolojiye göre de açık olduğundan lemma ispatlanır. □

Not 2.1.1. [4] *nolu kaynakta görüleceği üzere, zayıf aşırı-dönüşsel bir operatör aşırı-dönüşsel olmak zorunda değildir.*

Tanım 2.1.2. *Verili $(x, x^*) \in \Pi(X)$ için $norb((x, x^*), T) = \{x^* T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ kümesine T operatörünün (x, x^*) ile olan nümerik yörüngesi denir. Eğer $norb((x, x^*), T)$ kümesinin $\mathbb{C}$ uzayında yoğun olmasını sağlayan öyle $(x, x^*) \in \Pi(X)$ varsa, o halde T operatörü X uzayında nümerik aşırı-dönüşseldir denir ve (x, x^*) ikilisine T ile ilişkili nümerik aşırı-dönüşsel bir vektör denir.*

Önerme 2.1.1. *$T \in L(X)$ operatörü zayıf aşırı-dönüşsel ise, aynı zamanda nümerik aşırı-dönüşseldir. Ayrıca, $x_0 \in X$ vektörü T altında zayıf aşırı-dönüşselse, $x_0^*(x_0) = \|x_0\|$ koşulunu sağlayan keyfi $x_0^* \in S_{X^*}$ için $(\frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0^*)$, T ile ilişkili nümerik aşırı-dönüşsel bir vektördür.*

Kanıt. $orb(x_0, T)$'nin X uzayında zayıf yoğun olmasından, verili $x \in X$ ve verili $\epsilon > 0$ için öyle $N \in \mathbb{N}$ vardır ki, $f : X \to \mathbb{C}$ keyfi fonksiyonel olup, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$|f(T^N x_0) - f(x)| = |f(T^N x_0 - x)| < \epsilon \|x_0\|. \tag{2.1.1}$$

Sonuç 1.1.3 göz önünde buludurularak, $x_0^*(x_0) = \|x_0\|$ şartını sağlayan öyle $x_0^* \in S_{X^*}$ fonksiyonelinin varolduğu görülür. Ek olarak, $(\frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0^*) \in \Pi(X)$ olur. $c \in \mathbb{C}$ verilmiş bir sayı olsun. $x_0^*(c\frac{x_0}{\|x_0\|}) = c$ olduğu aşikardır.O halde, (2.1.1) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizlik alınır.

$$\left| x_0^*(T^N \frac{x_0}{\|x_0\|}) - x_0^*(c\frac{x_0}{\|x_0\|}) \right| = \left| x_0^*(T^N \frac{x_0}{\|x_0\|} - c\frac{x_0}{\|x_0\|}) \right| = \frac{1}{\|x_0\|} |x_0^*(T^N x_0 - cx_0)| < \epsilon.$$

Bu ise $(\frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0^*) \in \Pi(X)$ ikilisinin T ile eşli nümerik aşırı-dönüşsel bir vektör oldugu sonucunu getirir. □

2.2 Sonlu Boyutlu Banach Uzaylarında Nümerik Aşırı-dönüşsellik

1-boyutlu Banach uzaylarında aşırı-dönüşsel operatör mevcut değildir. Ayrıca 1-boyutlu Banach uzayları üzerinde nümerik aşırı-dönüşsellik kavramı aşırı-dönüşsellik kavramıyla çakıştığından, 1-boyutlu Banach uzayları üzerinde nümerik aşırı-dönüşsel operatör mevcut değildir. Öte yandan,boyutu 1'den büyük olan sonlu boyutlu Banach uzaylarında nümerik aşırı-dönüşsel operatörleri mevcuttur. Bu altbölümde boyutu 1'den büyük olan sonlu boyutlu Banach uzaylarında nümerik aşırı-dönüşsel operatörlerin varlığını kanıtlayan bir önermeyi paylaşacağız. İlk olaraksa aşağıdaki lemmayı ifade edelim.

Lemma 2.2.1. *$(n_k)_{k=1}^{\infty}$, $n_1 = 1, n_{k+1} = n_k 4^{n_k}, m_k = n_{k+1}$, k pozitif tamsayı, kurallarıyla verilmiş bir dizi olsun. O halde öyle (i_k), $(j_k) \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $i_k, j_k \in \{1, 2, \ldots 4^{n_k}\}$, k pozitif tamsayı, dizileri vardır ki*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi i_k}{m_k},\ \beta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi j_k}{m_k},\ \lambda_1 = 2e^{i\alpha}\ \lambda_2 = 2e^{i\beta},$$

olup, $\{{\lambda_1}^n + {\lambda_2}^n : n\ \ pozitif\ tamsayı\}$ kümesi $\mathbb{C}$ uzayında yoğundur. Yani,

$$\mathbb{C} = \overline{\{{\lambda_1}^n + {\lambda_2}^n : n\ \ pozitif\ tamsayı\}}$$

olur.

Kanıt. $\{z_k \in \mathbb{C} : |z_k| < 2^{n_k},\ k$ positive integer$\}$ $\mathbb{C}$'de yoğun bir küme olsun. Verili k pozitif tamsayısı için $|x_k| = |y_k| = 2^{n_k}\ z_k = \frac{x_k+y_k}{2}$ eşitliklerini sağlayan öyle $x_k,\ y_k \in \mathbb{C}$ sayıları vardır. Bu iddiamızı kanıtlamakla başlayalım. İlk olarak aşağıdaki trigonometrik formülleri hatırlayalım.

$$\cos\theta + \cos\psi = 2cos\left(\frac{\theta+\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\psi}{2}\right)$$
$$\sin\theta + \sin\psi = 2\cos\left(\frac{\theta-\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\psi}{2}\right),\ \theta,\ \psi \in \mathbb{R}$$

$r_k = |z_k|$ ve $\phi_k = arg(z_k)$ olarak gösterelim. O halde $x_k = 2^{n_k}e^{i\theta_k}$, $y_k = 2^{n_k}e^{i\psi_k}$, $\theta_k = \arccos(\frac{r_k}{2^{n_k}}) + \phi_k$ ve $\psi_k = -\arccos(\frac{r_k}{2^{n_k}}) + \phi_k$ olarak tanımlayalım. Bu durumda kolayca görülür ki $z_k = \frac{x_k+y_k}{2}$.

$\mathbb{C}$ uzayında orijin merkezli ve 2^{n_k} yarıçaplı çemberi, $\frac{2\pi}{2^{n_k}}$ uzunluklu

$$A_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2^{n_k},\ arg(z) \in [2n\frac{\pi}{4^{n_k}}, 2(n+1)\frac{\pi}{4^{n_k}})\},\ n \in \{0, 1, \ldots, 4^{n_k} - 1\},$$

ile verilen 4^{n_k} tane parçaya ayıralım. O halde aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan $i_k, j_k \in \{1, 2, \ldots, 4^{n_k}\}$ sayıları mevcuttur.

$$|x_k - 2^{n_k}e^{i\pi(\frac{i_k}{4^{n_k}})}| < \frac{2\pi}{2^{n_k}}\ \text{ ve }\ |y_k - 2^{n_k}e^{i2\pi(\frac{j_k}{4^{n_k}})}| < \frac{2\pi}{2^{n_k}}$$

$\{\omega_k = 2^{n_k}e^{i2\pi(\frac{i_k}{4^{n_k}})} + 2^{n_k}e^{i2\pi(\frac{j_k}{4^{n_k}})} : k \geq 1$ tamsayı$\}$ kümesini ele alalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
|x_k + y_k - \omega_k| &= |x_k + y_k - 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{i_k}{4^{n_k}})} - 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{j_k}{4^{n_k}})}| \\
&\leq |x_k - 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{i_k}{4^{n_k}})}| + |y_k - 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{j_k}{4^{n_k}})}| < \frac{4\pi}{4^{n_k}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu nedenle $\{\omega_k = 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{i_k}{4^{n_k}})} + 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{j_k}{4^{n_k}})} \ : \ k \geq 1 \text{ tamsayı}\}$ kümesi, $\{x_k + y_k :$ k pozitif tamsayı$\}$ kümesinde yoğundur. Ayrıca, $\{\frac{\omega_k}{2} \ : \ k \geq 1 \text{ tamsayı}\}$ kümesi de $\{z_k \in \mathbb{C} : |z_k| < 2^{n_k}, k \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesinde yoğundur. $\{z_k \in \mathbb{C} : |z_k| < 2^{n_k}, k \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesi $\mathbb{C}$ uzayında yoğun olduğundan, $\{\frac{\omega_k}{2} \ : \ k \geq 1 \text{ tamsayı}\}$ kümesi $\mathbb{C}$ uzayında yoğundur ve dolayısıyla $\{\omega_k \ : \ k \geq 1 \text{ tamsayı}\}$ kümesi $\mathbb{C}$ uzayında yoğundur. Öte yandan, verili k pozitif tamsayı için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$
\begin{aligned}
{\lambda_1}^{n_k} &= 2^{n_k} e^{i n_k \alpha} = 2^{n_k} \exp\left(i n_k \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2\pi i_s}{n_{s+1}} \right) \\
&= 2^{n_k} \exp\left(i2\pi n_k \Big(\sum_{s=1}^{k-1} \frac{i_s}{n_{s+1}} + \frac{i_{k+1}}{n_{k+1}} + \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{i_s}{n_{s+1}} \Big) \right)
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

Verili k pozitif tamsayısı için, n_k bir pozitif tamsayı olduğunu ve $n_k = n_2 n_3 \ldots n_{k-1} p_k$, p_k da pozitif tamsayı olduğunu gözönünde tutalım. Bu nedenle, $s = 1, 2, \ldots, k-1$ tamsayıları için $n_k \frac{i_s}{n_{s+1}}$ da bir pozitif tamsayıdır. O halde $s = 1, 2, \ldots, k-1$ tamsayıları için $\exp(i2\pi n_k \frac{i_s}{n_{s+1}}) = 1$ ve $\exp(i2\pi n_k \sum_{s=1}^{k-1} \frac{i_s}{n_{s+1}}) = \prod_{s=1}^{k-1} \exp(i2\pi n_k \frac{i_s}{n_{s+1}}) = 1$ olacaktır ve bundan dolayı (2.2.1) eşitliği takip eden hali alır.

$$
\lambda_1^{n_k} = 2^{n_k} \exp\left(i2\pi \frac{i_k}{4^{n_k}} \right) \exp\left(i2\pi n_k \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{i_s}{n_{s+1}} \right) = 2^{n_k} \exp\left(i2\pi \frac{i_k}{4^{n_k}} \right) \exp(i\alpha_k)
$$

Burada $\alpha_k = 2\pi n_k \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{i_s}{n_{s+1}}$ olarak tanımlıdır. Verili s pozitif tamsayısı için $i_s \in \{1, 2, \ldots, 4^{n_s}\}$ olduğundan, $n_{k+1} = n_k 4^{n_k}$ ve $n_{k+j} = n_k q_t$ öyle ki verili t pozitif tamsayısı için q_t de bir pozitif tamsayı olduğundan, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$
\begin{aligned}
\alpha_k &= 2\pi n_k \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{i_s}{n_{s+1}} = 2\pi n_k \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{i_s}{n_s 4^{n_s}} \leq 2\pi \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{n_k 4^{n_s}}{n_s 4^{n_s}} \\
&= 2\pi \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{n_k}{n_s} \leq 2\pi \sum_{t=k}^{\infty} \frac{1}{4^{n_t}} = \frac{2\pi}{4^{n_k}} \sum_{t=k}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{q_t} \leq \frac{2\pi}{4^{n_k}} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{t} = \frac{4\pi}{4^{n_k}}
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde aşağıdaki eşitlik de gösterilebilir.

$$
{\lambda_2}^{n_k} = 2^{n_k} \exp\big(i2\pi \frac{j_k}{4^{n_K}} \big) \exp(i\beta_k)
$$

Buradaysa

$$\beta_k = 2\pi n_k \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{j_s}{n_{s+1}} \leq \frac{4\pi}{4^{n_k}}$$

olarak tanımlanmıştır.

Bu gözlemlerimizden , verili k pozitif tamsayısı için aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığı görülür.

$$\begin{aligned}
&|\lambda_1{}^{n_k} + \lambda_2{}^{n_k} - \omega_k| \leq \\
&|2^{n_k} e^{i2\pi \frac{i_k}{4^{n_k}}}(e^{i\alpha_k} - 1)| + |2^{n_k} e^{i2\pi \frac{j_k}{4^{n_k}}}(e^{i\beta_k} - 1)| \\
&\leq 2^{n_k}\Big(|1 - e^{i\alpha_k}| + |1 - e^{i\beta_k}|\Big)
\end{aligned}$$

e^{iz}, $z \in \mathbb{C}$, fonksiyonu için kuvvet serisi açılımı yapalım.

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}$$

O halde, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$|1 - e^{iz}| = |z|\Big|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{(k+1)!}\Big| = |z|\Big|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}\frac{k!}{(k+1)!}\Big| \leq |z||e^{iz}|\Big|\frac{k!}{(k+1)!}\Big| \leq |z|$$

Buradan görülür ki

$$|\lambda_1{}^{n_k} + \lambda_2{}^{n_k} - \omega_k| \leq 2^{n_k}\Big(|1 - e^{i\alpha_k}| + |1 - e^{i\beta_k}|\Big) \leq 2^{n_k}(\alpha_k + \beta_k) \leq \frac{8\pi}{2^{n_k}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç olarak ise $\{\lambda_1{}^n + \lambda_2{}^n :\ n \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesinin $\{\omega_k :\ k \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesinde yoğun olduğu ve bundan dolayı da $\{\lambda_1{}^n + \lambda_2{}^n :\ n \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesinin $\mathbb{C}$ uzayında yoğun olduğu görülecektir. □

Bu lemmayı kullanarak kanıtlayacağımız en az iki boyutlu, sonlu boyutlu Banach uzaylarında nümerik aşırı-dönüşsel operatörlerin varlığı hakkındaki önermeyi ifade edelim.

Önerme 2.2.1. *Boyutu en az 2 olan sonlu boyutlu Banach uzaylarında nümerik aşırı dönüşsel operatör mevcuttur.*

Kanıt. X boyutu $q = dim(X) \geq 2$ olan sonlu boyutlu bir Banach uzayı ve M, X uzayının 2-boyutlu bir altuzayı olsun. $\mathfrak{B}_M = \{v_1, v_2\}$, M için bir baz olsun ve $\mathfrak{B}_{M^*} = \{v_1^*, v_2^*\}$ ise M^* eşlenik uzayının $\mathfrak{B}_M$ bazına karşı gelen eşlenik bazı olsun. Yani, $v_i^*(v_j) =$

δ_i^j, $i,j = 1,2$, koşulu sağlanır. X uzayının, $\mathfrak{B}_M$ bazını içeren bir bazını $\mathfrak{B}$ ve X^* uzayının, $\mathfrak{B}_{M^*}$ bazını içeren bir bazını ise $\mathfrak{B}^*$ ile gösterelim. $(x,x^*) \in \Pi(M)$ verili bir ikili olsun öyle ki $[x]_{\mathfrak{B}_M} = (c,c), [x^*]_{\mathfrak{B}_{M^*}} = (d,d)$ ise sırasıyla x ve x^* vektörlerinin sırasıyla $\mathfrak{B}_M$ ve $\mathfrak{B}^*$ bazlarına göre gösterim vektörleri olsun. O halde $x^*(x) = cdv_1^*(v_1) + cdv_1^*(v_2) + cdv_2^*(v_1) + cdv_2^*(v_2) = 2dc = 1$ olur. $\hat{x} = (c,c,0,0,\ldots,0) \in \mathbb{C}^q$ ve $\hat{x}^* = (d,d,0,0,\ldots,0) \in \mathbb{C}^q$ olarak gösterelim. Genelliği bozmadan bu vektörleri sırasıyla $\mathfrak{B}_M$ ve $\mathfrak{B}^*$ bazlarına göre gösterim vektörleri olarak alan X'teki vektörü x ve X^*'dan bir fonksiyoneli x^* ile göstermeye devam edelim. $(x,x^*) \in \Pi(X)$ olduğu kolayca gösterilir.

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, Lemma 2.2.1'de tanımlanmış sayılar olup, $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. $\mathfrak{B}$ bazına göre gösterim matrisi aşağıda şekilde verilmiş olan $T : X \longrightarrow X$ operatörünü dikkate alalım.

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Kolayca görülür ki $x^*(T^n x) = (dv_1^* + dv_2^*)(\lambda_1^n c + \lambda_2^n c) = \hat{x}^* [T]_{\mathfrak{B}}^n \hat{x}^T$. O halde (x,x^*) ikilisinin T altındaki nümerik yörüngesi (x,x^*), $norb((x,x^*),T) = \{x^* T^n x : n \text{ pozitif tamsayı}\} = \{d{\lambda_1}^n c + d{\lambda_2}^n c : n \text{ pozitif tamsayı}\} = \{\frac{{\lambda_1}^n + {\lambda_2}^n}{2} : n \text{ pozitif tamsayı}\}$ olur. Lemma 2.2.1 göz önünde bulundurulduğunda, $\{{\lambda_1}^n + {\lambda_2}^n : n \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesinin $\mathbb{C}$ uzayında yoğun bir küme olduğu görülecektir. Bundan dolayı, $\{\frac{{\lambda_1}^n + {\lambda_2}^n}{2} : n \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesi de $\mathbb{C}$ uzayında yoğun bir kümedir. Sonuç olarak, $norb((x,x^*),T)$ $\mathbb{C}$ uzayında yoğundur ve T nümerik aşırı-dönüşseldir. $\square$

2.3 Nümerik Aşırı-Dönüşsel Ağırlıklı Kaydırmalar

Bu kısımda ilk olarak c_0 ve $c_0(\mathbb{Z})$ uzaylarında sırasıyla tek taraflı ve çift taraflı ağırlıklı sola kaydırmaların nümerik aşırı-dönüşselliğinin karakterizasyonlarını vereceğiz. Sonrasında ise ℓ^p ve $\ell^p(\mathbb{Z})$ uzaylarında sırasıyla tek taraflı ve çift taraflı ağırlıklı sola kaydırmaların nümerik aşırı-dönüşselliğinin karakterizasyonlarını vereceğiz. Hatırlatma amacıyla, ağırlıklı sola kaydırmaların genel formunu kanonik baz elemanları aracılığıyla yeniden ifade edelim.

Tek taraflı ağırlıklı sola kaydırma:

$$B_\omega e_j = \omega_j e_{j-1},\ her\ j \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ B_\omega e_0 = \theta$$

Çift taraflı ağırlıklı sola kaydırma:

$$B_\omega e_j = \omega_j e_{j-1},\ \text{her}\ j \in \mathbb{Z},$$

Not 2.3.1. $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \setminus \{0\} = \{q_1 + iq_2 : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\} \setminus \{0\}$ *kümesinin* $\mathbb{C}$ *uzayında yoğun olduğunu biliyoruz. Ayrıca verili* k *pozitif tamsayısı için* $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ *kümesinden en az bir* $q_1 + iq_2$ *elemanı bulabiliriz ki* $0 < |q_1 + iq_2| < k$ *eşitsizliği sağlanır. Seçim aksiyomunu kullanarak böyle bir elemanı seçelim ve* a_k *ile gösterelim. O halde* $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ *kümesinin elemanlarını pozitif tamsayılar ile numaralandırabiliriz öyle ki verili* k *pozitif tamsayısı ile numaralandırılmış eleman* a_k*'nin modülüsü* $0 < |a_k| < k$ *eşitsizliğini sağlar. Sonuç olarak* $\{a_k : 0 < |a_k| < k,\ k\ \textit{pozitif tamsayı}\}$, $\mathbb{C}$ *uzayında yoğun bir küme olacaktır. Bu gözlemimizden* $\mathbb{C}$ *uzayında yoğun ve sayılabilir bir* $\{a_k : 0 < |a_k| < k,\ k\ \textit{pozitif tamsayı}\}$ *kümesinin varolduğu sonucunu da elde ederiz.*

Sırasıyla c_0 ve $c_0(\mathbb{Z})$ uzaylarında verili ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin nümerik aşırı-dönüşsel olması için gerekli ve yeterli koşulu verelim.

Önerme 2.3.1. X *ile* c_0 *veya* $c_0(\mathbb{Z})$ *uzaylarını gösterelim. Sınırlı* $\omega = (\omega_\nu)$ *ağırlık diziyle verilmiş* $B_\omega : X \longrightarrow X$ *operatörünün nümerik aşırı-dönüşsel olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki koşulu sağlayan bir* n_0 *pozitif tamsayısının varolmasıdır.*

$$\sup_{m>n_0} \prod_{\nu=n_0}^{m} |\omega_\nu| = +\infty \tag{2.3.1}$$

Kanıt. Gereklilik: Varsayalım ki bir $(x, f) \in \Pi(X)$ için $norb((x, f), B_\omega)$ $\mathbb{C}$ uzayında yoğundur. Lemma(1.1.2) ve Lemma(1.1.3) birlikte düşünüldüğünde görülür ki f fonksiyonelinin etkisini yaratan tek türlü sonlu x^* dizisi vardır ve $I(x^*) = \max\{j \in \mathbb{N} : x_j^* \neq 0\}$ (sırasıyla $I(x^*) = \max\{|j| : x_j^* \neq 0, j \in \mathbb{Z}\}$) olarak gösterelim. Ayrıca $n_0 = I(x^*) + 1$ ve $M = \sup_{m>n_0} \prod_{n_0}^{m} |\omega_\nu|$ olarak gösterelim. $M = +\infty$ olduğunu aksini varsayarak kanıtlayacağız. Varsayalım ki $M < \infty$. $J = \{j : x_j^* \neq 0\}$ kümesini göz önüne alalım. Keyfi $l > I(x^*)$ tamsayısı için

$$f(B_\omega^l x) = f\big((\prod_{\nu=j+1}^{j+l} \omega_\nu) x_{j+l}\big)_j = \sum_{j\in J}(\prod_{\nu=j+1}^{j+l} \omega_\nu) x_{j+l}\overline{x_j^*}$$

olur. O halde, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned}
|f(B_\omega^l x)| &\leq \sum_{j\in J} |(\prod_{\nu=j+1}^{j+l} \omega_\nu) x_{j+l}\overline{x_j^*}| = \sum_{j\in J} (\prod_{\nu=j+1}^{j+l} |\omega_\nu|)|x_{j+l}||x_j^*| \\
&= \sum_{j\in J} (\prod_{\nu=j+1}^{n_0-1} |\omega_\nu|)(\prod_{\nu=n_0}^{j+l} |\omega_\nu|)|x_{j+l}||x_j^*| \\
&= \sum_{j\in J\setminus\{n_0-1\}} (\prod_{\nu=j+1}^{n_0-2} |\omega_\nu|)(\prod_{\nu=n_0}^{j+l} |\omega_\nu|)|x_{j+l}||x_j^*| + |\omega_{n_0}||x_{n_0}^*||x_{n_0+l}| \\
&\leq M(1 + \sum_{j\in J\setminus\{n_0-1\}} (\prod_{\nu=j+1}^{j+l} |\omega_\nu|)) \\
&\leq M(1 + \sum_{j\in J\setminus\{n_0-1\}} (\prod_{\nu=j+1}^{n_0-1} |\omega_\nu|)) = R < \infty.
\end{aligned}$$

O halde, hangi $l > I(x^*)$ tamsayısını alırsak alalım $|f(B_\omega^l x)|$ son ifadedeki $R > 0$ sayısından küçük olacaktır. Bu ise $norb((x, f), B_\omega)$ kümesinin $\mathbb{C}$ uzayında yoğun olmasıyla çelişir. Bu durumda

$$M = \sup_{m>n_0} \prod_{n_0}^{m} |\omega_\nu| = +\infty$$

olmalıdır.

Yeterlilik: $\{a_k : 0 < |a_k| < k, k \,\text{pozitif tamsayı}\}$ $\mathbb{C}$ uzayında yoğun bir küme olsun. (2.3.1) koşulunu sağlanmasını mümkün kılan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısının varolduğunu kabul edelim. (2.3.1) koşulu nedeniyle öyle $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$, vardır ki $\prod_{\nu=n_0}^{n_1} |\omega_\nu| > 2$ sağlanır. Tümevarımla, verili k pozitif tamsayısı için öyle $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq n_{k-1}$ bulabiliriz ki $\prod_{\nu=n_0}^{n_k} |\omega_\nu| > 2^k$ sağlanır.

Bu kesin artan (n_k) dizisini kullanarak $x = (x_j)$ dizisini tanımlayalım:

$$x_j = \begin{cases} 1 & , \text{eğer } j = n_0 - 1, \\ \frac{a_k}{\prod_{\nu=n_0}^{n_k} \omega_\nu} & , \text{eğer } j = n_k, \\ 0 & , \text{geriye kalan durumlarda} . \end{cases}$$

O halde her bir k pozitif tamsayısı için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{a_k}{\prod_{\nu=n_0}^{n_k} \omega_\nu} \right| < \frac{k}{2^k} < 1$$

Bu eşitsizlikten $x \in c_0$ (sırasıyla $c_0(\mathbb{Z})$) ve $\|x\| = 1$ olduğu kolayca görülür.

Kanonik baz elemanları aracılığıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmış $e_{n_0-1}^* \in c_0^*$ (sırasıyla $(c_0(\mathbb{Z}))^*$) fonksiyonelini göz önüne alalım.

$$e_{n_0-1}^*(e_j) = \begin{cases} 1 & , \text{eğer } j = n_0 - 1, \\ 0 & , \text{eğer } j \neq n_0 - 1 \end{cases}$$

Açıktır ki $\|e_{n_0-1}^*\| = 1$ ve $e_{n_0-1}^*(x) = 1$. O halde $(x, e_{n_0-1}^*) \in \Pi(X)$ olur. Ayrıca verili k pozitif tamsayısı için $B_\omega^{n_k-n_0+1}x$ dizisinin $(n_0 - 1)$. terimi a_k ve haliyle $e_{n_0-1}^*(B_\omega^{n_k-n_0+1}x) = a_k$ olur. O halde verili k pozitif tamsayısı için

$$|e_{n_0-1}^*(B_\omega^{n_k-n_0+1}x) - a_k| = 0 < \frac{1}{k}$$

sağlanır. Bu durumda $norb((x, e_{n_0-1}), B_\omega)$ kümesi $\{a_k : 0 < |a_k| < k, k \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesinde yoğundur. $\{a_k : 0 < |a_k| < k, k \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesi $\mathbb{C}$ uzayında yoğun olduğundan, $norb((x, e_{n_0-1}), B_\omega)$ kümesi de $\mathbb{C}$ uzayında yoğundur. Yani $(x, e_{n_0-1}) \in \Pi(X)$, B_ω operatörünün nümerik aşırı-dönüşsel bir vektördür. □

Bu önermeyi takiben ℓ^p ve $\ell^p(\mathbb{Z}), p \in [1, \infty]$, uzaylarında sırasıyla tek taraflı ve çift taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin nümerik aşırı-dönüşselliği için bir gerekli ve yeterli koşul veren önermeyi ifade edelim.

Önerme 2.3.2. *Verili $p \in [1, \infty]$ için $X = \ell^p$ veya $\ell^p(\mathbb{Z})$ uzaylarından biri olsun ve $B_\omega : X \longrightarrow X$ sınırlı $\omega = (\omega_\nu)$ dizisi ile verilmiş ağırlıklı sola kaydırma operatörü olsun. O halde aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir;*

(i) B_ω operatörü nümerik aşırı-dönüşseldir.

(ii) Ağırlık dizisi ω aşağıdaki koşulu sağlar.

$$\sup_{\substack{m>n,\\ m,n\in\mathbb{N}}} \prod_{\nu=n}^{m} |\omega_\nu| = +\infty \quad \left(\textit{sırasıyla} \sup_{\substack{m>n,\\ m,n\in\mathbb{Z}}} \prod_{\nu=n}^{m} |\omega_\nu| = +\infty\right) \tag{2.3.2}$$

(iii) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|B_\omega^k\| = +\infty.$

Kanıt. (ii) ve (iii) ifadelerinin birbirlerine denk olduğu Lemma 1.3.2 gözönüne alınmasıyla görülür. O halde geriye (i) ve (ii) ifadelerinin denk olduğunu kanıtlamak kalıyor.

$(i) \Rightarrow (ii)$: B_ω operatörünün nümerik aşırı-dönüşsel olduğunu kabul edelim ve varsayalım ki $M = \sup_{m>n} |\prod_{\nu=n}^{m} \omega_\nu| < +\infty$ olsun. Verili $(x, x^*) \in \Pi(X)$ ve verili $k \in \mathbb{N}$ için

$$|x^*(B_\omega^k x)| \leq \|x^*\|\|B_\omega^k\|\|x\| = \|B_\omega^k\| \leq M.$$

eşitliği sağlanır ki bu $(x^* B_\omega^k x)$ sayısal dizisi sınırlı olduğu sonucunu verir. Bu ise B_ω operatörünün nümerik aşırı-dönüşsel olmasıyla çelişir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: (ii) ifadesinin sağlandığını kabul edelim. O halde öyle m_1 ve n_1 pozitif tamsayıları vardır ki $n_1 \geq 2$ ve $\prod_{\nu=n_1}^{m_1} |\omega_\nu| > 2^2$ eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca tümevarımla, ağırlık dizisinin sınırlı olduğunu kullanarak verili k pozitif tamsayısı için öyle $\hat{m}_k$ ve $\hat{n}_k$, $\hat{m}_k > \hat{n}_k$, tamsayıları vardır ki, $m_{k+1} - n_{k+1} > m_k$ ve $n_{k+1} - m_k > m_k - n_k + 2$ ve $\prod_{\nu=n_k}^{m_k} |\omega_\nu| > 2^{2k}$ eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerden $m_{k+1} - m_k + n_k - 1 > n_{k+1} - 1$, $m_{k-1} - m_k + n_k + 1 < 0$ eşitsizlikleri de elde edilir.

$\{a_k : \ 0 < |a_k| < k, \ k \ \text{pozitif tamsayı}\ \}$ $\mathbb{C}$ uzayında yoğun bir küme olsun.

1.durum: İlk önce $X = \ell^\infty$ veya $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ durumu için savı kanıtlayalım. Terimleri aşağıdaki kurallarla belirlenmiş $y = (y_j)$ ve $y^* = (y_j^*)$ dizilerini göz önüne alalım.

$$y_j = \begin{cases} \frac{2^k a_k}{\prod_{\nu=n_k}^{m_k} \omega_\nu} & \text{eğer } j = m_k, \\ 0 & \text{, geriye kalan durumlarda.} \end{cases}$$

$$y_j^* = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{eğer } j = n_k - 1, \\ 0 & \text{, geriye kalan durumlarda.} \end{cases}$$

Kolayca görülür ki $y \in X$ ve $y^* \in \ell^1$ (sırasıyla $\ell^1(\mathbb{Z})$) olur. Lemma 1.1.1 göz önünde akılda tutularak, y^* dizisi aracılığıyla tanımladığımız fonksiyoneli genelliği bozmadan gene y^* ile göstermeye devam edelim.

$$y^*(x) = \sum_j x_j \overline{y_j^*},\ x = (x_j) \in X.$$

Ayrıca $\{j : y_j \neq 0\} \cap \{j : y_j^* \neq 0\} = \emptyset$ olduğundan $y^*(y) = \sum_j y_j \overline{y_j^*} = 0$ olur. $\xi = (\xi_j) \in X$ terimleri aşağıdaki kuralla verilmiş dizi olsun.

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & \text{,eğer } j = n_k - 1, \\ 0 & \text{, geriye kalan durumlarda} \end{cases}$$

$\tilde{y} = y + \xi = (y_j + \xi_j) \in X$ olarak verilmiş dizi olsun. Doğrudan hesaplamayla $(\tilde{y}, y^*) \in \Pi(X)$ olduğu görülecektir. Buradan, verili k pozitif tamsayısı için $B_\omega^{m_k - n_k + 1}\tilde{y}$ dizisinin $(n_k - 1)$. teriminin a_k olduğu ve böylece $y^*\big(B_\omega^{m_k - n_k + 1}\tilde{y}\big) = a_k$ olduğu görülür. O halde $\{a_k : 0 < |a_k| < k, k \text{ pozitif tamsayı }\} \subset norb((\tilde{y}, y^*), B_\omega)$ ilişkisi sağlanır ve $\{a_k : 0 < |a_k| < k, k \text{ pozitif tamsayı }\}$ $\mathbb{C}$ uzayında yoğun olduğundan, $norb((\tilde{y}, y^*), B_\omega)$ kümesinin $\mathbb{C}$ uzayında yoğun olduğu görülür. Yani B_ω nümerik aşırı-dönüşseldir.

2.durum: Verili $p \in (1, \infty)$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan q reel sayısını alalım ve $X = \ell^p$ veya $\ell^p(\mathbb{Z})$ durumları için önermeyi kanıtlayalım. $\lambda > 0$ ileride belirlenecek bir sayı olup, terimleri aşağıdaki kuralla verilmiş $y = (y_j)$ dizisini göz önüne alalım.

$$y_j = \begin{cases} \lambda 2^{\frac{-kq}{p}} & \text{, eğer } j = n_k - 1, \\ \frac{2^k a_k}{\prod_{\nu=n_k}^{m_k} \omega_\nu} & \text{, eğer } j = m_k, \\ 0 & \text{, geriye kalan durumlarda} \end{cases}$$

$y = (y_j)$ dizisininin p-normunu hesaplayalım.

$$\|y\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\lambda 2^{\frac{-kq}{p}}\Big)^p + \sum_{k=1}^{\infty} |2^k \frac{a_k}{\prod_{\nu=n_k}^{m_k}} \omega_\nu|^p < \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\lambda 2^{\frac{-kq}{p}}\Big)^p + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2^k}\right)^p$$

Bu eşitsizliğin en sağındaki seri toplamlarından ilkinin yakınsaklığı $\frac{1}{2^q} < 1$ olmasından, ikinci serinin yakınsaklığıysa seriler için oran testinden görülür. Sonuç olarak $y \in X$ olduğu görülür.

$y^* = (y_j^*)$ dizisinin terimleri aşağıdaki kuralla verilmiş olsun.

$$y_j^* = \begin{cases} 2^{-k} & \text{, eğer } j = n_k - 1, k \text{ pozitif tamsayı} \\ \lambda^{\frac{-p}{q}} (y_{m_k})^{\frac{p}{q}} \overline{\beta_k}^{\frac{p}{q}-1} & \text{, eğer } j = m_k, k \text{ pozitif tamsayı} \\ 0 & \text{, geriye kalan durumlarda} \end{cases}$$

Burada $\beta_k = \frac{y_{m_k}}{|y_{m_k}|}$ olarak tanımlanmıştır. Kolayca görülür ki $\|y^*\|_q^q = \lambda^{-p}\|y\|_p^p$'dir. $\lambda = \|y\|_p$ olarak alırsak, $\|y^*\|_q = 1$ olacaktır. $x = \frac{y}{\|y\|}$ ve $x^* = y^*$ olarak tanımlayalım. Lemma 1.1.1 göz önünde bulundurup, x^* dizisi aracılığıyla tanımlanan fonksiyoneli karışıklığa yol açmayacağını umarak x^* ile gösterelim ve gene Lemma 1.1.1 nedeniyle $\|x^*\| = 1$ olur.

$$x^*(z) = \sum_j z_j \bar{x_j^*},\ z = (z_j) \in X$$

O halde aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned} x^*(x) = \|y\|_p^{-1} y^*(y) &= \|y\|_p^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda 2^{-k(1+\frac{q}{p})} + \sum_{k=1}^{\infty} y_{m_k} \overline{y_{m_k}^*} \right) \\ &= \|y\|_p^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda 2^{-k(1+\frac{q}{p})} + \sum_{k=1}^{\infty} y_{m_k} \lambda^{\frac{-p}{q}} \overline{y_{m_k}}^{\frac{-p}{q}} \frac{y_{m_k}}{y_{m_k}}^{\frac{p}{q}-1} \right) \\ &= \lambda^{\frac{-p}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{1+\frac{p}{q}} 2^{-k(1+\frac{p}{q})} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_{m_k}|^{1+\frac{p}{q}} = \|y\|_p^{-1} \lambda^{\frac{-p}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} |y_{m_k}|^{1+\frac{p}{q}} \\ &= \|y\|_p^{-1} \lambda^{\frac{-p}{q}} \|y\|_p^p = 1 \end{aligned}$$

Bu durumda, $(x, x^*) \in \Pi(\ell^p)$ (sırasıyla $(x, x^*) \in \Pi(\ell^p(\mathbb{Z}))$) olacaktır. Bildiğimiz üzere $\{a_k : 0 < |a_k| < k, k$ pozitif tamsayı $\}$ $\mathbb{C}$ uzayında yoğun bir kümedir. Kolayca gösterilir ki $\{\frac{a_k}{\|y\|_p} : 0 < |a_k| < k, k$ pozitif tamsayı $\}$ de $\mathbb{C}$ uzayında yoğun bir kümedir. Doğrudan hesaplamayla $x^*(B_\omega^{m_k - n_k + 1} x) = \frac{a_k}{\|y\|_p}$ olduğu görülür. O halde $\{\frac{a_k}{\|y\|_p} : 0 < |a_k| < k, k$ pozitif tamsayı $\} \subset norb((x, x^*), B_\omega)$ ve bu nedenle B_ω nümerik aşırı-dönüşseldir.

3.durum: ℓ^1 (sırasıyla $\ell^1(\mathbb{Z})$) uzayında önermeyi kanıtlayacağız. Terimleri aşağıdaki kurallarla verilmiş $y = (y_j)$ ve $y^* = (y_j^*)$ dizilerinin sırasıyla ℓ^1 (veya $\ell^1(\mathbb{Z})$) ve ℓ^∞ (veya $\ell^\infty(\mathbb{Z})$)'nin elemanları olduğunu doğrudan hesaplamayla görebiliriz. Lemma 1.1.1 akılda tutulup, y^* dizisi aracılığıyla tanımladığımız fonksiyoneli genelliği bozmadan y^*

ile gösterelim.

$$y_j = \begin{cases} 2^{-k} & \text{,eğer } j = m_k,\ k \text{ pozitif tamsayı} \\ 0 & \text{, geriye kalan durumlarda} \end{cases}$$

$$y_j^* = \begin{cases} \dfrac{2^k\overline{a_k}}{\prod_{\nu=n_k}^{m_k}\overline{\omega_\nu}} & \text{,eğer } j = n_k - 1,\ k \text{ pozitif tamsayı} \\ 1 & \text{,eğer } j = m_k,\ k \text{ pozitif tamsayı} \\ 0 & \text{, geriye kalan durumlarda} \end{cases}$$

Doğrudan hesaplamayla görülür ki $\|y\| = \|y^*\| = y^*(y) = \sum_j y_j\overline{y_j^*} = 1$. Başka deyişle $(y, y^*) \in \Pi(\ell^1)$ (sırasıyla $(y, y^*) \in \Pi(\ell^1(\mathbb{Z}))$) ilişkisi ve dahası $y^*\big(B_\omega^{m_k-n_k+1}y\big) = a_k$ eşitliği sağlanır. O halde $\{a_k :\ 0 < |a_k| < k, k \ \text{ pozitif tamsayı }\} \subset norb((\tilde{y}, y^*), B_\omega)$ olur. $\{a_k :\ 0 < |a_k| < k, k \ \text{ pozitif tamsayı }\}$ $\mathbb{C}$ uzayında yoğun olduğundan, $norb((\tilde{y}, y^*), B_\omega)$ $\mathbb{C}$ uzayında yoğun bir kümedir. Yani B_ω nümerik aşırı-dönüşseldir. $\square$

Bölüm 3

DİYAGONAL AŞIRI-DÖNÜŞSELLİK

Bu bölümde kaynakçada belirtilen [1] ve [2] numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır. İlk olarak diyagonal aşırı-dönüşsellik kavramı ve ilgili diğer kavramlar verilip, devamında bu kavramların aralarındaki ilişkilerden bahsedilmiştir. Sonrasında tek taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin diyagonal aşırı-dönüşselliğinin bir karakterizasyonu verilmiştir.

3.1 Temel Kavramlar ve Önermeler

Önceki bölümlerde olduğu üzere, X bir Banach uzayını göstermek için kullanılacaktır.

Tanım 3.1.1. *T, X üzerinde bir operatör olsun. Eğer X uzayının verili, boştan farklı, açık U, V, W, $\theta \in W$, altkümeleri için $W \cap T^{-n}(U) \neq \emptyset$ ve $V \cap T^{-n}(W) \neq \emptyset$ sağlayan öyle $n \in \mathbb{N}$ varsa, T operatörü şişme/çökme özelliğini sağlıyor denir.*

Tanım 3.1.2. *$N \geq 2$ bir tamsayı olsun. X üzerinde tanımlı $(T_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, (T_{2,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots$ $, (T_{N,j})_{j\in\mathbb{N}}$ operatör dizileri verilmiş olsun. Eğer X uzayının verili, boştan farklı, açık $V_0, V_1, \ldots, V_N$, W, $\theta \in W$, altkümeleri için*

$$W \cap T_{1,n}^{-1}(V_1) \cap T_{2,n}^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap T_{N,n}^{-1}(V_N) \neq \emptyset,$$

$$V_0 \cap T_{1,n}^{-1}(W) \cap T_{2,n}^{-1}(W) \cap \cdots \cap T_{N,n}^{-1}(W) \neq \emptyset$$

sağlayan öyle $n \in \mathbb{N}$ varsa, $(T_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, (T_{2,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (T_{N,j})_{j\in\mathbb{N}}$ operatörler dizileri diyagonal şişme/çökme veya d-şişme/çökme özelliğini sağlıyor denir.

Tanım 3.1.3. *$N \geq 2$ bir tamsayı olsun. X üzerinden tanımlı $T_1, T_2, \ldots, T_N$ operatörlerinin iterasyonlarından oluşmuş $(T_1^j)_{j\in\mathbb{N}}, (T_2^j)_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (T_N^j)_{j\in\mathbb{N}}$ operatör dizileri d-şişme/cökme özelliğini sağlıyorsa $T_1, T_2, \ldots, T_N$ operatörleri d-şişme/çökme özelliğini sağlıyor denir.*

Tanım 3.1.4. *$N \geq 2$ bir tamsayı olsun. X üzerinde tanımlı $T_1, T_2, \ldots, T_N$ aşırı-dönüşsel operatörleri için öyle $x \in X$ vektörü mevcutsa ki $(x, x, \ldots, x) \in X^N$ vektörü $\oplus_{j=1}^N T_j$ operatörü için X^N uzayında aşırı-dönüşseldir; yani d-orb$(x, T_1, T_2, \ldots, T_N)$ $= \{(T_1^j x, T_2^j x, \ldots, T_N^j x) \in X^N : j \in \mathbb{N}\}$ kümesi X^N uzayındaki çarpım topolojisine göre X^N uzayında yoğunsa; $T_1, T_2, \ldots, T_N$ operatörlerine diyagonal aşırı-dönüşsel veya d-aşırı-dönüşsel denir.*

Tanım 3.1.5. *$N \geq 2$ bir tamsayı olsun. X üzerinde tanımlı $(T_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, (T_{2,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (T_{N,j})_{j\in\mathbb{N}}$ operatör dizileri verilmiş olsun. Eğer X'in verili, boştan farklı, açık $V_0, V_1, \ldots, V_N$ altkümeleri için*

$$V_0 \cap T_{1,n}^{-1}(V_1) \cap T_{2,n}^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap T_{N,n}^{-1}(V_N) \neq \emptyset$$

sağlayan öyle $n \in \mathbb{N}$ varsa, $(T_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, (T_{2,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (T_{N,j})_{j\in\mathbb{N}}$ operatör dizileri diyagonal topolojik geçişken veya d-topolojik geçişkendir denir.

Tanım 3.1.6. *$N \geq 2$ bir tamsayı olsun. X üzerinden tanımlı $T_1, T_2, \ldots, T_N$ operatörlerinin iterasyonlarından oluşmuş $(T_1^j)_{j\in\mathbb{N}}, (T_2^j)_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (T_N^j)_{j\in\mathbb{N}}$ operatör dizileri d-topolojik geçişkense $T_1, T_2, \ldots, T_N$ operatörlerine d-topolojik geçişkendir denir.*

Tanım 3.1.7. *$N \geq 2$ bir tamsayı olsun. X üzerinde tanımlı $(T_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, (T_{2,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (T_{N,j})_{j\in\mathbb{N}}$ operatör dizileri verilmiş olsun. Eğer öyle $x \in X$ vektörü mevcutsa ki $\{(T_{1,j}x, T_{2,j}x, ..., T_{N,j}x) \in X^N : j \in \mathbb{N}\}$ kümesi X^N uzayındaki çarpım topolojisine göre X^N uzayında yoğun olsun, o halde $(T_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, (T_{2,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (T_{N,j})_{j\in\mathbb{N}}$ operatör dizileri d-evrenseldir denir.*

Bu kavramları birbirleriyle ilişkilendiren takip eden iki lemmanın kanıtları [1] nolu kaynakta bulunabilir.

Lemma 3.1.1. *$N \geq 2$ bir tamsayı olup, X üzerinde tanımlı $(T_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, (T_{2,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (T_{N,j})_{j\in\mathbb{N}}$ operatör dizileri verilmiş olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.*

(i) $(T_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, (T_{2,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (T_{N,j})_{j\in\mathbb{N}}$ operatör dizileri d-topolojik geçişkendir.

(ii) $(T_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, (T_{2,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (T_{N,j})_{j\in\mathbb{N}}$ *operatör dizileri için d-evrensel vektörlerin kümesi X uzayında yoğundur.*

(iii) $(T_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, (T_{2,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (T_{N,j})_{j\in\mathbb{N}}$ *operatör dizileri için d-evrensel vektörlerin kümesi X uzayında yoğun bir G_δ-kümedir.*

Lemma 3.1.2. *$N \geq 2$ bir tamsayı olup, X üzerinde tanımlı $(T_{1,j})_{j\in\mathbb{N}}, (T_{2,j})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (T_{N,j})_{j\in\mathbb{N}}$ operatör dizileri d-şişme/çökme özelliğini sağlıyorsa, bu operatör dizileri d-topolojik geçişkendir.*

3.2 c_0 Uzayında D-Aşırı-Dönüşsel Ağırlıklı Kaydırma Operatörleri

c_0 uzayında verilmiş iki adet tek taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörünün *d-aşırı-dönüşsel* olması için bir gerekli ve yeterli koşul ifade edelim.

Önerme 3.2.1. *c_0 uzayı üzerinde, sırasıyla sıfırdan farklı terimli sınırlı $\omega_1 = (\omega_\nu^{(1)})$ ve $\omega_2 = (\omega_\nu^{(2)})$ dizileriyle verilmiş tek taraflı, ağırlıklı B_1 ve B_2 sola kaydırma operatörleri verilmiş olsun. Keyfi $n \geq 1$ ve $i \geq 0$ tamsayıları için*

$$\alpha_{i,n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_{i+j}^{(2)}}{\omega_{i+j}^{(1)}}$$

olarak tanımlayalım. Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

(i) *B_1 ve B_2 operatörleri d-aşırı-dönüşseldir.*

(ii) *B_1 ve B_2 operatörleri d-şişme/çökme özelliğini sağlar.*

(iii) *Terimleri pozitif tamsayılar olan, kesin artan öyle $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır ki verili $i \geq 0$ tamsayısı için*

$$\lim_{k\to\infty} \left| \prod_{j=1}^{n_k} \omega_{i+j}^{(1))} \right| = +\infty$$

ve $\{(\alpha_{0,n_k}, \alpha_{1,n_k}, \alpha_{2,n_k}, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ uzayında çarpım topolojisine göre yoğundur.

Kanıt. *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*: Lemma 3.1.2 nedeniyle B_1 ve B_2 operatörlerinin d-topolojik geçişken olduğu ve sonrasında Lemma 3.1.1 nedeniyle de B_1 ve B_2 operatörlerinin d-aşırı-dönüşsel olduğu görülür.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: c_0'ın keyfi boştan farklı, açık $V_0, V_1, V_2, W, \theta \in W$, altkümeleri verilsin. Sonlu dizilerin kümesi c_0 uzayında yoğun olduğundan, her bir $m = 0, 1, 2$ için öyle $h_m \in V_m$ sonlu dizisi vardır. $I(h_m) = \max\{j \in \mathbb{N} : h_j^{(m)} \neq 0\}$ ve $r = \max\{I(h_m) : m = 0, 1, 2\}$ olarak gösterelim. h_0, h_1, h_2 vektörlerinin $span\{e_i : 0 \leq i \leq r \ tamsayı\}$ kümesinin elemanları olduğu açıktır. V_0, V_1, V_2 ve W, c_0'ın boştan farklı açık altkümeleri olduğundan her bir $m \in \{0, 1, 2\}$ için öyle $\epsilon_m > 0$ sayısı vardır ki $B(h_m, \epsilon_m) \subset V_m$ ve öyle $\epsilon_\theta > 0$ sayısı vardır ki $B(\theta, \epsilon_\theta) \subset W$ sağlanır. $\tilde{\epsilon} = \min\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_\theta, 2\}$ olarak alalım ve bu durumda $B(\theta, \tilde{\epsilon}) \subset W$ ve $B(h_m, \tilde{\epsilon}) \subset V_m, m = 0, 1, 2,$ olacaktır. Terimleri aşağıdaki kuralla verilmiş $\tilde{h}_1 = (\tilde{h}_i^{(1)}) \in c_0$ sonlu dizisini ele alalım.

$$\tilde{h_i}^{(1)} = \begin{cases} h_i^{(1)} & , \text{eğer } i \in supp(h_1) \\ \dfrac{\tilde{\epsilon}}{3} & , \text{eğer } i \in \{0, 1, 2, ..., r\} \setminus supp(h_1) \end{cases}$$

$\tilde{h}_1 \in B(h_1, \frac{\tilde{\epsilon}}{2}) \subset B(h_1, \tilde{\epsilon}) \subset V_1$ olduğu açıkça görülmektedir ve bundan dolayı $B(\tilde{h}_1, \frac{\tilde{\epsilon}}{2}) \subset B(h_1, \tilde{\epsilon}) \subset V_1$ sağlanır. $\tilde{h}_1$ vektörünü h_1 ile değiştirelim ve genelliği bozmadan h_1 ile göstermeye devam edelim. O halde $\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$ için $B(\theta, \epsilon) \subset W$ ve $B(h_m, \epsilon) \subset V_m, m = 0, 1, 2,$ ilişkileri sağlanır.

$$\begin{aligned} S :& span\{e_i : \ i = 0, 1, 2, ..., r\} \longrightarrow span\{e_i : \ i = 0, 1, 2, ..., r\} \\ & e_i \longmapsto (\omega_{i+j}^{(1)})^{-1} e_{i+1}, \ i = 0, 1, 2, ..., r. \end{aligned}$$

lineer dönüşümünü tanımlayalım. (iii) ifadesindeki koşulları kullanarak yukarıda belirlediğimiz ϵ için öyle k pozitif tamsayısı bulabiliriz ki $n_k > r + 1$ olup,

$$\|S^{n_k} h_1\| = \sup_{0 \leq i \leq r} |(\prod_{j=1}^{n_k} \omega_{i+j}^{(1)})^{-1} h_i^{(1)}| < \epsilon$$

ve verili $i \in \{0, 1, ..., r\}$ için

$$\left| \alpha_{i,n_k} - \frac{h_i^{(2)}}{h_i^{(1)}} \right| < \frac{\epsilon}{\|h_1\|}$$

sağlanır. $n_k > r + 1$ olduğundan $B_1^{n_k} h_0 = \theta$ ve $B_2^{n_k} h_0 = \theta$'dır ve sonuç olarak $h_0 \in V_0 \cap B_1^{-n_k}(W) \cap B_2^{-n_k}(W)$'dir. $\|S^{n_k} h_1\| < \epsilon$ olduğundan, $S^{n_k} h_1 \in B(\theta, \epsilon) \subset W$ sağlanır. Ek olarak, $B_1^{n_k} S^{n_k} h_1 = h_1 \in V_1$ olduğundan $S^{n_k} h_1 \in B_1^{-n_k}(V_1)$ sağlanır. Ayrıca

$$\|B_2^{n_k} S^{n_k} h_1 - h_2\| = \sup_{0 \leq i \leq r} \left| \prod_{j=1}^{n_k} \frac{\omega_{i+j}^{(2)}}{\omega_{i+j}^{(1)}} h_i^{(1)} - h_i^{(2)} \right| < \epsilon$$

eşitsizliği de sağlanır.

Yani, $B_2^{n_k} S^{n_k} h_1 \in B(h_2, \epsilon) \subset V_2$ olur. Bu durum ise $S^{n_k} h_1 \in B_2^{-n_k}(V_2)$ olduğunu ve en sonunda $S^{n_k}h_1 \in W \cap B_1^{-n_k}(V_1) \cap B_2^{-n_k}(V_2)$ neticesi alınır. Bundan dolayı, B_1 ve B_2 operatörlerinin d-şişme/çökme özelliğini sağladığı görülür.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Varsayalım ki B_1 ve B_2 operatörleri *d-aşırı-dönüşseldir* ve $x = (x_j) \in c_0$, B_1 ve B_2 için d-aşırı-dönüşsel bir vektör olsun. $\{(\lambda_{0,k}, \lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \; : \; k \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ uzayında çarpım topolojisine göre yoğun olan bir sayılabilir küme olsun. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\max\{|\lambda_{i,k}| \; : \; 0 \leq i \leq k$ tamsayı$\}$ sayısından büyük pozitif bir c_k sayısı belirleyelim. Ek olarak, terimleri pozitif tamsayılar olan, kesin artan öyle (n_k) dizisi belirleyelim ki aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın.

$$\|B_1^{n_k}x - \sum_{l=0}^{k} e_l\| < M_k, \tag{3.2.1}$$

$$\|B_2^{n_k} - \sum_{l=0}^{k} \lambda_{l,k} e_l\| < \frac{1}{2^{k+1}} \tag{3.2.2}$$

Burada $M_k = \min\{\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{c_k 2^{k+1}}\}$ olarak tanımlanmıştır. (3.2.1) ve (3.2.2) eşitsizliklerinden, verili $k \geq 0$ ve $0 \leq i \leq k$ tamsayıları için bir takım yeni eşitsizlikler elde ederiz.

$$\left| \prod_{j=1}^{n_k} \omega_{i+j}^{(1)} x_{i+n_k} - 1 \right| < M_k \tag{3.2.3}$$

$$\left| \prod_{j=1}^{n_k} \omega_{i+j}^{(2)} x_{i+n_k} - \lambda_{i,k} \right| < \frac{1}{2^{k+1}} \tag{3.2.4}$$

(3.2.3) eşitsizliğinde üçgen eşitsizliğini uygulayarak, $0 \leq i \leq k$ tamsayıları için takip eden ifadeleri elde ederiz. Burada $M_k \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ olduğunu da göz önünde bulunduralım.

$$\left| \left| \prod_{j=1}^{n_k} \omega_{i+j}^{(1)} x_{i+n_k} \right| - |1| \right| < M_k$$
$$0 < 1 - \frac{1}{2^{k+1}} < 1 - M_k < \left| \prod_{j=1}^{n_k} \omega_{i+j}^{(1)} \right| |x_{i+n_k}|$$

Sonuncu eşitsizlikten ilk olarak $i \in \{0, 1, ..., k\}$ için $x_{i+n_k} \neq 0$ olduğu görülür ve ayrıca

$$\frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{|x_{i+n_k}|} \leq \left| \prod_{j=1}^{n_k} \omega_{i+j}^{(1)} \right|. \tag{3.2.5}$$

sağlandığı da görülür. $x \in c_0$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} x_{i+n_k} = 0$ olur. O halde,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{|x_{i+n_k}|} \leq \lim_{k\to\infty} \left| \prod_{j=1}^{n_k} \omega_{i+j}^{(1)} \right|$$

ve bu eşitsizlik

$$\lim_{k\to\infty}\left|\prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(1)}\right| = +\infty$$

olduğu sonucunu verir. Ayrıca verili $k \in \mathbb{N}$ ve her bir $i \in \{0,1,...,k\}$ için (3.2.5) ifadesinden aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$\left|\alpha_{i,n_k} - \lambda_{i,k}\right| = \left|\prod_{j=1}^{n_k}\frac{\omega_{i+j}^{(2)}}{\omega_{i+j}^{(1)}} - \lambda_{i,k}\right| = \frac{1}{|\prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(1)}|}\left|\prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(2)} - \lambda_{i,k}\prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(1)}\right|$$

$$\leq \frac{|x_{i+n_k}|}{1-\frac{1}{2^{k+1}}}\left|\prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(2)} - \lambda_{i,k}\prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(1)}\right| = \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}-1}\left|\prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(2)}x_{i+n_k} - \prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(1)}\lambda_{i,k}x_{i+n_k}\right|$$

$$= \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}-1}\left|\prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(2)}x_{i+n_k} - \lambda_{i,k} + \lambda_{i,k} - \prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(1)}\lambda_{i,k}x_{i+n_k}\right|$$

$$\leq \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}-1}\left|\prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(2)}x_{i+n_k} - \lambda_{i,k}\right| + \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}-1}|\lambda_{i,k}|\left|1 - \prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(1)}x_{i+n_k}\right|$$

(3.2.3) ve (3.2.4) eşitsizliklerini de dikkate almakla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$|\alpha_{i,n_k} - \lambda_{i,k}| < \tfrac{2^{k+1}}{2^{k+1}-1}\tfrac{1}{2^{k+1}} + \tfrac{2^{k+1}}{2^{k+1}-1}c_k\tfrac{1}{c_k 2^{k+1}} = \tfrac{2}{2^{k+1}-1}.$$

Sonuç olarak, $i \in \{0,1,...,k\}$ için aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığı görülür.

$$\left|\alpha_{i,n_k} - \lambda_{i,k}\right| < \frac{2}{2^{k+1}-1}$$

Bu eşitsizlikten ise, $\{(\lambda_{0,k}, \lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ : \ k \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ uzayında çarpım topolojisine göre yoğun olması nedeniyle, $\{(\alpha_{0,n_k}, \alpha_{1,n_k}, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ uzayında çarpım topolojisine göre yoğun olduğu sonucu elde edilir. □

Bu önermenin (*iii*)-nolu ifadesindeki koşulları kullanarak verili ağırlıklı sola kaydırma operatörleri için d-aşırı-dönüşsel bir vektörün kuruluşu aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 3.2.2 (Yapısalcı Yöntem). *c_0 uzayı üzerinde, sırasıyla sıfırdan farklı terimli $\omega_1 = (\omega_\nu^{(1)})$ ve $\omega_2 = (\omega_\nu^{(2)})$ dizileriyle verilmiş tek taraflı, ağırlıklı B_1 ve B_2 sola kaydırma operatörleri verilmiş olsun. Keyfi $n \geq 1$ ve $i \geq 0$ tamsayıları için*

$$\alpha_{i,n} = \prod_{j=1}^{n}\frac{\omega_{i+j}^{(2)}}{\omega_{i+j}^{(1)}}$$

olarak tanımlayalım. Terimleri pozitif tamsayılar olan, kesin artan öyle $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır ki verili $i \geq 0$ tamsayısı için

$$\lim_{k\to\infty}\left|\prod_{j=1}^{n_k}\omega_{i+j}^{(1)}\right| = +\infty \tag{3.2.6}$$

ve $\{(\alpha_{0,n_k}, \alpha_{1,n_k}, \alpha_{2,n_k}, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ uzayında çarpım topolojisine göre yoğundur. O halde B_1 ve B_2 operatörleri d-aşırı-dönüşseldir.

Kanıt. $c_0 \times c_0$ ayrılabilir bir uzay olduğundan, bu uzayda carpım topolojisine göre yoğun $\{(a_k, b_k) \in c_0 \times c_0 \ : \ I(a_k) \leq k-1, I(b_k) \leq k-1, \ k \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesi mevcuttur. Ayrıca ω_1 ve ω_2 sınırlı olduğundan öyle $M \geq \max\{1, \sup_\nu |\omega_\nu^{(1)}|, \sup_\nu |\omega_\nu^{(2)}|\}$ sayısı vardır ki her $\nu \in \mathbb{N}$ ve $l = 1,2$ için $|\omega_\nu^{(l)}| \leq M$ sağlanır. Öyle $z = (z_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$ vektörü kurmayı amaçlıyoruz ki *d-orb*(z, B_1, B_2), $\{(a_k, b_k) \in c_0 \times c_0 \ : \ I(a_k) \leq k-1, I(b_k) \leq k-1, \ k \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesinde çarpım topolojisine göre yoğun olsun.

(3.2.6) koşulu sayesinde (n_k) dizisinin öyle $\hat{m}_1 \geq 1$ terimini bulabiliriz ki

$$\left|\left(\prod_{\nu=1}^{\hat{m}_1}\omega_\nu^{(1)}\right)^{-1} a_1^{(1)}\right| < 1$$

eşitsizliği sağlanır.

$\{(\alpha_{0,n_k}, \alpha_{1,n_k}, \alpha_{2,n_k}, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ uzayında yoğun olması nedeniyle (n_k) dizisinin öyle $m_1 \geq \hat{m}_1$ terimini bulabiliriz ki

$$\left|\prod_{\nu=1}^{m_1}\frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}} - \frac{b_1^{(1)}}{a_1^{(1)}}\right| < \frac{1}{\|a_1\|} \tag{3.2.7}$$

ve $m_1 \geq \hat{m}_1$ olduğundan

$$\left|\left(\prod_{\nu=1}^{m_1}\omega_\nu^{(1)}\right)^{-1} a_1^{(1)}\right| \leq 1 \tag{3.2.8}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $z_j = 0, \ j = 0,1,2,...,m_1-1$ ve $z_{m_1} = (\prod_{\nu=1}^{m_1}\omega_\nu^{(1)})^{-1}a_1^{(1)}$ olarak alalım.

(3.2.6) koşulundan görülür ki (n_k) dizisinin öyle $\hat{m}_2 \geq m_1 + 1$ terimini bulabiliriz öyle ki $j = 0,1$ için

$$M^{m_1}\left|\left(\prod_{\nu=1}^{\hat{m}_2}\omega_{\nu+j}^{(1)}\right)^{-1} a_j^{(2)}\right| < \frac{1}{2}$$

sağlanır.

Buna ek olarak $\{(\alpha_{0,n_k}, \alpha_{1,n_k}, \alpha_{2,n_k}, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ uzayında yoğun olması nedeniyle (n_k) dizisinin öyle $m_2 \geq \hat{m}_2$ terimini bulabiliriz ki $j = 0, 1$ için

$$\left| \prod_{\nu=1}^{m_2} \frac{\omega_{\nu+j}^{(2)}}{\omega_{\nu+j}^{(1)}} - \frac{b_j^{(2)}}{a_j^{(2)}} \right| < \frac{1}{2\|a_2\|}$$

eşitsizliği sağlanır. İlaveten, $m_2 \geq \hat{m}_2 \geq m_1 + 1$ olduğundan

$$M^{m_1} \left| \left(\prod_{\nu=1}^{m_2} \omega_{\nu+j}^{(1)} \right)^{-1} a_j^{(2)} \right| < \frac{1}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. $j = m_1 + 1, ..., m_2 - 1$ için $z_j = 0$ ve $j = 0, 1$ için $z_{j+m_2} = (\prod_{\nu=1}^{m_2} \omega_{\nu+j}^{(1)})^{-1} a_j^{(2)}$ olarak alalım.

Bu işlemi böyle devam ettirirsek, k.adımda (3.2.6) koşulu sayesinde (n_k) dizisinin öyle $\hat{m}_k \geq m_{k-1} + k - 1$ terimini bulabiliriz ki $j = 0, 1, ..., k - 1$ için

$$M^{m_{k-1}} \left| \left(\prod_{\nu=1}^{\hat{m}_k} \omega_{\nu+j}^{(1)} \right)^{-1} a_j^{(k)} \right| < \frac{1}{k}$$

sağlanır.

Ayrıca $\{(\alpha_{0,n_k}, \alpha_{1,n_k}, \alpha_{2,n_k}, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ uzayında yoğun olması nedeniyle (n_k) dizisinin öyle $m_k \geq \hat{m}_k$ terimini bulabiliriz ki $j = 0, 1, ..., k - 1$ için

$$\left| \prod_{\nu=1}^{m_k} \frac{\omega_{\nu+j}^{(2)}}{\omega_{\nu+j}^{(1)}} - \frac{b_j^{(1)}}{a_j^{(k)}} \right| < \frac{1}{k\|a_k\|} \tag{3.2.9}$$

ve $m_k \geq \hat{m}_k \geq m_{k-1} + k - 1$ olduğundan

$$M^{m_{k-1}} \left| \left(\prod_{\nu=1}^{m_k} \omega_{\nu+j}^{(1)} \right)^{-1} a_j^{(k)} \right| < \frac{1}{k}, \tag{3.2.10}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $j = m_{k-1} + k - 1, ..., m_k - 1$ için $z_j = 0$ ve $j = 0, 1, ..., k - 1$ için $z_{j+m_k} = (\prod_{\nu=1}^{m_k} \omega_{\nu+j}^{(1)})^{-1} a_j^{(k)}$ olarak alalım ve bu süreci böyle devam ettirelim.

Terimlerini bu şekilde seçtiğimiz $z = (z_j)$ dizisinin c_0 uzayının bir elemanı olduğunu ve *d-orb*(z, B_1, B_2) kümesinin, $\{(a_k, b_k) \in c_0 \times c_0 \;:\; I(a_k) \leq k - 1,\, I(b_k) \leq k - 1,\ k$ pozitif tamsayı$\}$ kümesinde çarpım topolojisine göre yoğun olduğunu gösterelim.

Öncelikle, $z = (z_j)$ dizisinin c_0 uzayının bir elemanı olduğunu gösterelim. $z = (z_j)$ dizisinin kuruluş şeklinden, ayrıca (3.2.8) ve (3.2.10) ifadelerinden $z = (z_j)$ dizisinin c_0 uzayının bir elemanı olduğu görülür.

Verili k pozitif tamsayısı için $B_1^{m_k} z - a_k$ dizisini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} B_1^{m_k} z - a_k = \Bigg(&0, 0, \ldots, 0, \prod_{\nu=m_{k+1}-m_k+1}^{m_{k+1}} \omega_\nu^{(1)} \Big(\prod_{\nu=1}^{m_{k+1}} \omega_\nu^{(1)} \Big)^{-1} a_0^{(k+1)}, \\ &\ldots, \prod_{\nu=j+m_{k+1}-m_k}^{j+m_{k+1}} \omega_\nu^{(1)} \Big(\prod_{\nu=j+1}^{j+m_{k+1}} \omega_\nu^{(1)} \Big)^{-1} a_j^{(k+1)}, \\ &\ldots, \prod_{\nu=k+m_{k+1}-m_k}^{k+m_{k+1}} \omega_\nu^{(1)} \Big(\prod_{\nu=k+1}^{k+m_{k+1}} \omega_\nu^{(1)} \Big)^{-1} a_k^{(k+1)}, \ldots \Bigg) \end{aligned}$$

Her $l \geq k+1$ tamsayısı için, $j = 0, 1, ..., l-1$ olup, (3.2.10) eşitsizliğini göz önüne alarak aşağıdaki gözlemde bulunuruz.

$$\begin{aligned} &\Big| \prod_{\nu=j+m_l-m_k}^{j+m_l} \omega_\nu^{(1)} \Big(\prod_{j+1}^{j+m_{k+1}} \omega_\nu^{(1)} \Big)^{-1} a_j^{(l)} \Big| \\ &\leq M^{m_k} \Big| \Big(\prod_{\nu=j+1}^{j+m_l} \omega_\nu^{(1)} \Big)^{-1} a_j^{(l)} \Big| \\ &\leq M^{m_{l-1}} \Big| \Big(\prod_{\nu=j+1}^{j+m_l} \omega_\nu^{(1)} \Big)^{-1} a_j^{(l)} \Big| < \frac{1}{l} < \frac{1}{k} \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

O halde, (3.2.11) eşitsizliğinden verili $k \geq 1$ tamsayısı için $\|B_1^{m_k} z - a_k\| < \frac{1}{k}$ olduğu sonucu alınır.

Şimdi $B_2^{m_k} z - b_k$ dizisini inceleyelim.

$$\begin{aligned} B_2^{m_k} z - b_k = \Bigg(&\prod_{\nu=1}^{m_k} \frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}} - b_0^{(k)}, \prod_{\nu=2}^{m_k+1} \frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}} - b_1^{(k)}, \ldots, \prod_{\nu=1}^{m_k+k-1} \frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}} - b_{k-1}^{(k)}, 0, \ldots, 0, \\ &\prod_{\nu=m_{k+1}-m_k+1}^{m_{k+1}} \omega_\nu^{(2)} \Big(\prod_{\nu=1}^{m_{k+1}} \omega_\nu^{(1)} \Big)^{-1} a_0^{(k+1)}, \ldots, \\ &\prod_{\nu=j+m_{k+1}-m_k+1}^{j+m_{k+1}} \omega_\nu^{(2)} \Big(\prod_{\nu=j+1}^{j+m_{k+1}} \omega_\nu^{(1)} \Big)^{-1} a_j^{(k+1)}, \\ &\ldots, \prod_{\nu=k+m_{k+1}-m_k+1}^{k+m_{k+1}} \omega_\nu^{(2)} \Big(\prod_{\nu=k+1}^{k+m_{k+1}} \omega_\nu^{(1)} \Big)^{-1} a_k^{(k+1)}, \ldots \Bigg) \end{aligned}$$

O halde, her $l \geq k+1$ tamsayısı için, $j = 0, 1, \ldots, l-1$ tamsayılar olup,

$$\begin{aligned}\Big|\prod_{\nu=j+m_l-m_k+1}^{j+m_l} \omega_\nu^{(2)} \big(\prod_{\nu=j+1}^{j+m_l} \omega_\nu^{(1)}\big)^{-1} a_j^{(k+1)}\Big| &\leq M^{m_k-1} \Big|\prod_{\nu=j+1}^{j+m_l} \omega_\nu^{(1)}\Big|^{-1} \|a_l\| \\ &< M^{m_{l-1}} \Big|\prod_{\nu=j+1}^{j+m_l} \omega_\nu^{(1)}\Big|^{-1} \|a_l\| < \frac{1}{l} < \frac{1}{k}\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

eşitsizliği sağlanır. Ek olarak, verili $k \geq 1$ tamsayısı için (3.2.9) eşitsizliğini yeniden göz önünde bulundurursak,

$$\Big|\big(\prod_{\nu=1}^{m_k} \frac{\omega_{\nu+j}^{(2)}}{\omega_{\nu+j}^{(1)}}\big) a_j^{(k)} - b_j^{(k)}\Big| < \frac{1}{k}$$

olduğu görülecektir. (3.2.9) ve (3.2.12) eşitsizliklerinden $k \geq 1$ tamsayısı için $\|B_2^{m_k} z - b_k\| < \frac{1}{k}$ olduğu sonucu alınır. Bu elde ettiğimiz sonuçları toparlarsak $d\text{-}orb(z, B_1, B_2)$ kümesi $\{(a_k, b_k) \in c_0 \times c_0 \ : \ I(a_k) \leq k-1, \, I(b_k) \leq k-1, \ k$ pozitif tamsayı$\}$ kümesinde yoğundur. $\{(a_k, b_k) \in c_0 \times c_0 \ : \ I(a_k) \leq k-1, \, I(b_k) \leq k-1, \ k$ pozitif tamsayı$\}$ kümesi $c_0 \times c_0$ uzayında çarpım topolojisine göre yoğun olması nedeniyle, B_1 ve B_2 operatörlerinin d-aşırı-dönüşsel olduğu sonucununa erişilir. □

Bölüm 4

DİYAGONAL NÜMERİK AŞIRI-DÖNÜŞSELLİK

Bu bölümde nümerik aşırı-dönüşsellik ve diyagonal aşırı-dönüşsellik kavramlarının bir manada kaynaşması olan diyagonal nümerik aşırı-dönüşsellik kavramını tanıtacağız. Sonlu boyutlu uzaylarda diyagonal nümerik aşırı-dönüşsel operatörlerin varlığını kanıtlayan bir teoremi kanıtlayacağız. Ayrıca ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin diyagonal nümerik aşırı-dönüşselliği için yeterli koşullar vereceğiz.

4.1 Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 4.1.1. *X bir Banach uzayı, $T \in L(X)$ bir operatör olup,*

$$W(T) = \{x^*(Tx) \ : \ (x, x^*) \in \Pi(X)\}$$

kümesine T operatörünün nümerik değer kümesi denir.

Tanım 4.1.2. *X bir Hilbert uzayı, $N \geq 2$ verili bir tamsayı, $T_1, T_2, ..., T_N \in L(X)$ olup,*

$$W(T_1, T_2, ..., T_n) = \{(< T_1x, x >, < T_2x, x >, ..., < T_Nx, x >) \in \mathbb{C}^N \ : \ \|x\| = 1\}$$

kümesine $T_1, T_2, ..., T_n$ operatörlerinin eş uzaysal nümerik değer kümesi denir.

[5] ve [14] nolu kaynaklarda yapıldığı üzere bu tanımı Banach uzayı koşullarına aşağıdaki şekilde genelleyelim.

Tanım 4.1.3. *X bir Banach uzayı, $N \geq 2$ verili bir tamsayı, $T_1, T_2, ..., T_N \in L(X)$ olup,*

$$W(T_1, T_2, ..., T_N) = \{(x^*(T_1 x), x^*(T_2 x), ..., x^*(T_N x)) \in \mathbb{C}^N \ : \ (x, x^*) \in \Pi(X)\}$$

kümesine $T_1, T_2, ..., T_N$ operatörlerinin eş uzaysal nümerik değer kümesi denir.

Bu tanımlamalar ve önceki bölümde bahsettiğimiz diyagonal aşırı-dönüşsellik kavramını göz önünde bulundurarak aşağıdaki yeni kavramları öne süreceğiz.

Tanım 4.1.4. *X bir Banach uzayı, $N \geq 2$ verili bir tamsayı, $T_1, T_2, ..., T_N \in L(X)$ ve $(x, x^*) \in \Pi(X)$ için*

$$\{(x^*(T_1^k x), x^*(T_2^k x), ..., x^*(T_N^k x)) \in \mathbb{C}^n : \ k \geq 0 \ tamsayı\}$$

kümesine (x, x^*) ikilisinin $T_1, T_2, ..., T_N$ operatörleriyle ilişkili diyagonal nümerik yörüngesi denir ve d-norb$((x, x^*), T_1, T_2, ..., T_N)$ ile gösterilir. Eğer $T_1, T_2, ..., T_n$ için d-norb$((x, x^*), T_1, T_2, ..., T_N)$ kümesinin $\mathbb{C}^N$ uzayında yoğun olmasını sağlayan bir $(x, x^*) \in \Pi(X)$ varsa, bu operatörlere X uzayında diyagonal nümerik aşırı-dönüşsel veya d-nümerik aşırı-dönüşsel denir.

4.2 Sonlu Boyutlu Uzaylarda d-Nümerik Aşırı-Dönüşsellik

Verdiğimiz diyagonal nümerik aşırı-dönüşsellik kavramını ve Lemma 2.2.1 ile birlikte göz önünde bulundurarak sonlu ve en az iki boyutlu Banach uzaylarında diyagonal nümerik aşırı-dönüşsel operatörlerin varlığını kanıtladığımız aşağıdaki önermeyi ifade edelim.

Teorem 4.2.1. *$N \geq 2$ tamsayı verimiş olsun. X boyutu $dim(X) \geq 2$ olan sonlu boyutlu bir Banach uzayı olsun. O halde X üzerinde tanımlı N tane d-nümerik aşırı-dönüşsel operatör mevcuttur.*

Kanıt. $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ dizisini Lemma 2.2.1 için tanımladığımız $n_1 = 1, n_{k+1} = n_k 4^{n_k}, m_k = n_{k+1}$, k pozitif tamsayı, şeklinde tanımlayalım. $\{(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}, \ldots, z_k^{(N)}) \in \mathbb{C}^N \ : \ |z_k^{(l)}| < 2^{n_k}, \ l = 1, 2, \ldots, N\}$ kümesi $\mathbb{C}^N$ uzayında yoğun olsun. Verili k pozitif tamsayısı ve verili $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$ için $r_{k,l} = |z_{k,l}|$ ve $\phi_{k,l} = arg(z_{k,l})$ olarak tanımlayalım. Ayrıca

$x_{k,l} = 2^{n_k} e^{i\theta_{k,l}}$, $y_{k,l} = 2^{n_k} e^{i\psi_{k,l}}$, $\theta_{k,l} = \arccos(\frac{r_{k,l}}{2^{n_k}}) + \phi_{k,l}$, ve $\psi_{k,l} = -\arccos(\frac{r_{k,l}}{2^{n_k}}) + \phi_{k,l}$ olarak tanımlayalım. O halde, $z_{k,l} = \frac{x_{k,l}+y_{k,l}}{2}$ olduğu kolayca görülür. O halde, verili k pozitif tamsayısı ve $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$ için öyle $x_{k,l}, y_{k,l} \in \mathbb{C}$ vardır ki $|x_{k,l}| = |y_{k,l}| = 2^{n_k}$ ve $z_{k,l} = \frac{x_{k,l}+y_{k,l}}{2}$ koşulları sağlanır.

$\mathbb{C}$ uzayındaki orijin merkezli, 2^{n_k} yarıçaplı çemberi, $\frac{2\pi}{2^{n_k}}$ uzunluklu $A_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2^{n_k},\ arg(z) \in [2n\frac{\pi}{4^{n_k}}, 2(n+1)\frac{\pi}{4^{n_k}})\}$, $n \in \{0, 1, \ldots, 4^{n_k} - 1\}$ olacak şekilde 4^{n_k} adet parçaya ayıralım. O halde öyle $i_{k,l}, j_{k,l} \in \{1, 2, \ldots, 4^{n_k}\}$sayıları bulunur ki aşağıdaki

$$|x_{k,l} - 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{i_{k,l}}{4^{n_k}})}| < \frac{2\pi}{2^{n_k}} \quad \text{ve} \quad |y_{k,l} - 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{j_{k,l}}{4^{n_k}})}| < \frac{2\pi}{2^{n_k}} \tag{4.2.1}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ek olarak $l = 1, 2, \ldots, N$ için $\lambda_{1,l} = 2e^{i\alpha_l}$, $\lambda_{2,l} = 2e^{i\beta_l}$ olmak üzere

$$\alpha_l = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi i_{k,l}}{n_{k+1}},\ \beta_l = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi j_{k,l}}{n_{k+1}}$$

olarak tanımlayalım. Burada $(i_{k,l}), (j_{k,l})$ terimleri $i_{k,l}, j_{k,l} \in \{1, 2, \ldots, 4^{n_k}\}$ ve (4.2.1) koşullarını sağlayan diziler olsun. $B_l = \begin{bmatrix} \lambda_{1,l} & 0 \\ 0 & \lambda_{2,l} \end{bmatrix}$, $l = 1, 2, \ldots, N$, olarak tanımlanmış matrisler olsun. Her bir B_l matrisini bir $T_l \in L(\mathbb{C}^N)$ matrisine Önerme 2.2.1'de yaptığımız gibi genişletelim ve bu matrisleri X uzayının bir $\mathfrak{B}$ bazına göre gösterim matrisi olarak kabul eden operatörleri de T_l ile göstermeye devam edelim. Ayrıca X^* eşlenik uzayının, $\mathfrak{B}$ bazına karşı gelen eşlenik bazı $\mathfrak{B}^*$ ile gösterelim. Önerme 2.2.1 için yapılan kanıtta tanımladığımız $\hat{x} = (c, c, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^q$ ve $\hat{x}^* = (d, d, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^q$ vektörlerini sırasıyla $\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{B}^*$ bazlarına göre gösterim vektörü olarak kabul eden $x \in X$ ve x^* vektörlerinin oluşturduğu $(x, x^*) \in \Pi(X)$ ikili olsun. Bu durumda

$$d\text{-}norb((x, x^*), T_1, T_2, \ldots, T_N)$$

$$= \{(d{\lambda_{1,1}}^p c + d{\lambda_{2,1}}^p c, d{\lambda_{1,2}}^p c + d{\lambda_{2,2}}^p c, \ldots, d{\lambda_{1,N}}^p c + d{\lambda_{2,N}}^p c) \in \mathbb{C}^N : p \text{ pozitif tamsayı}\}$$
$$= \{(\frac{(\lambda_{1,1})^p + (\lambda_{2,1})^p}{2}, \frac{(\lambda_{1,2})^p + (\lambda_{2,2})^p}{2}, \ldots, \frac{(\lambda_{1,N})^p + (\lambda_{2,N})^p}{2}) \in \mathbb{C}^N : p \text{ pozitif tamsayı}\}.$$

Her bir $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$ tamsayısı için $\{\omega_{k,l} = 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{i_{k,l}}{4^{n_k}})} + 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{j_{k,l}}{4^{n_k}})} :$ k pozitif tamsayı$\}$ kümesini ele alalım. O halde,

$$\begin{aligned} |x_{k,l} + y_{k,l} - \omega_{k,l}| &= |x_{k,l} + y_{k,l} - 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{i_{k,l}}{4^{n_k}})} - 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{j_{k,l}}{4^{n_k}})}| \\ &\leq |x_{k,l} - 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{i_{k,l}}{4^{n_k}})}| + |y_{k,l} - 2^{n_k} e^{i2\pi(\frac{j_{k,l}}{4^{n_k}})}| < \frac{4\pi}{4^{n_k}}. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Bu sebeple, her bir $l \in \{1,2,\ldots,N\}$ için, $\{\omega_{k,l} \ : \ k \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesi $\{x_{k,l}+y_{k,l} :$ k pozitif tamsayı$\}$ kümesinde yoğundur. Bundan dolayı, verilmiş $l \in \{1,2,\ldots,N\}$ için $\{\frac{\omega_{k,l}}{2} \ : \ k \text{ pozitif tamsayı}\}$ kümesi de $\{z_{k,l} \in \mathbb{C} : |z_{k,l}| < 2^{n_k},\ k$ pozitif tamsayı$\}$ kümesinde yoğundur.

Aşağıdaki sayısal büyüklüğü inceleyelim.

$$\begin{aligned} &|{\lambda_{1,l}}^{n_k} + {\lambda_{2,l}}^{n_k} - \omega_{k,l}| \leq \\ &|2^{n_k} \exp(i2\pi \frac{i_{k,l}}{4^{n_k}})(\exp(i\alpha_{k,l}) - 1)| + |2^{n_k} \exp(i2\pi \frac{j_{k,l}}{4^{n_k}})(\exp(i\beta_{k,l}) - 1)| \leq \\ &2^{n_k} \left(|1 - e^{i\alpha_{k,l}}| + |1 - e^{i\beta_{k,l}}| \right) \leq 2^{n_k}(\alpha_{k,l} + \beta_{k,l}) \leq \frac{8\pi}{2^{n_k}}. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

(4.2.2) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\|(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}, \ldots, z_k^{(N)}) - \frac{1}{2}(\omega_{k,1}, \omega_{k,2}, \ldots, \omega_{k,N})\| = \left(\sum_{l=1}^{N} |z_k^{(l)} - \frac{\omega_{k,l}}{2}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < N^{\frac{1}{2}} \frac{2\pi}{4^{n_k}}$$

ve (4.2.3) eşitsizliğinden ise aşağıdaki yeni eşitsizliği elde ederiz.

$$\|\frac{1}{2}({\lambda_{1,1}}^{n_k} + {\lambda_{2,1}}^{n_k}, \lambda_{1,2}^{n_k} + {\lambda_{2,2}}^{n_k}, \ldots, \lambda_{1,N}^{n_k} + {\lambda_{2,N}}^{n_k}) - \frac{1}{2}(\omega_{k,1}, \omega_{k,2}, \ldots, \omega_{k,N})\|$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{N} |\frac{1}{2}\lambda_{1,l}^{n_k} + \frac{1}{2}{\lambda_{2,l}}^{n_k} - \frac{1}{2}\omega_{k,l}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < N^{\frac{1}{2}} \frac{4\pi}{2^{n_k}}$$

O halde,

$$\|(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}, \ldots, z_k^{(N)}) - \frac{1}{2}({\lambda_{1,1}}^{n_k} + {\lambda_{2,1}}^{n_k}, \lambda_{1,2}^{n_k} + {\lambda_{2,2}}^{n_k}, \ldots, \lambda_{1,N}^{n_k} + {\lambda_{2,N}}^{n_k})\| \leq$$

$$\|(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}, \ldots, z_k^{(N)}) - \frac{1}{2}(\omega_{k,1}, \omega_{k,2}, \ldots, \omega_{k,N})\| +$$

$$\|\frac{1}{2}({\lambda_{1,1}}^{n_k} + {\lambda_{2,1}}^{n_k}, \lambda_{1,2}^{n_k} + {\lambda_{2,2}}^{n_k}, \ldots, \lambda_{1,N}^{n_k} + {\lambda_{2,N}}^{n_k}) - \frac{1}{2}(\omega_{k,1}, \omega_{k,2}, \ldots, \omega_{k,N})\| <$$

$$N^{\frac{1}{2}} \frac{2\pi}{4^{n_k}} + N^{\frac{1}{2}} \frac{4\pi}{2^{n_k}} \tag{4.2.4}$$

eşitsizliği sağlanır. (n_k) dizisinin sınırsız, pozitif tamsayı terimli, kesin artan bir dizi olduğunu hatırlatalım. Bu sebeple, (4.2.4) esitsizliğinden $d\text{-}norb((x, x^*), T_1, T_2, \ldots, T_N)$ kümesinin $\{(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}, \ldots, z_k^{(N)}) \in \mathbb{C}^N : |z_k^{(l)}| < 2^{n_k},\ l = 1, 2, \ldots, N\}$ kümesinde yoğun olduğu görülür. $\{(z_k^{(1)}, z_k^{(2)}, \ldots, z_k^{(N)}) \in \mathbb{C}^N : |z_k^{(l)}| < 2^{n_k},\ l = 1, 2, \ldots, N\}$ kümesi $\mathbb{C}^N$ uzayında yoğun olduğundan, $d\text{-}norb((x, x^*), T_1, T_2, \ldots, T_N)$ kümesi de $\mathbb{C}^N$ uzayında yoğun olacaktır. Bundan dolayı, $T_1, T_2, \ldots, T_N$ operatörleri d-nümerik aşırı-dönüşseldir.

□

4.3 c_0 ve $c_0(\mathbb{Z})$ Uzaylarında D-Nümerik Aşırı-Dönüşsel Sola Kaydırmalar

İlk olarak, c_0 (sırasıyla $c_0(\mathbb{Z})$) uzayında verili iki adet tek taraflı (çift taraflı) ağırlıklı sola kaydırma operatörün d-nümerik aşırı-dönüşsel olması için yeterli bir koşul öne süreceğiz.

Teorem 4.3.1. *$X = c_0$ (veya $c_0(\mathbb{Z})$) uzayında tanımlı ve ağırlıkları sırasıyla sınırlı $\omega_1 = (\omega_\nu^{(1)})$ ve $\omega_2 = (\omega_\nu^{(2)})$, $\nu \in \mathbb{N}$ (veya $\nu \in \mathbb{Z}$), dizileriyle tanımlanmış olan B_1 ve B_2 tek taraflı (veya çift taraflı) ağırlıklı sola kaydırma operatörlerini tanımlayalım. Eğer terimleri pozitif tamsayılar olan kesin artan bir $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ dizisi varsa ki*

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{\nu=n_0}^{n_k} |\omega_\nu^{(1)}| = +\infty, \tag{4.3.1}$$

koşulu sağlansın ve elemanları her $k \geq 1$ tamsayısı için

$$\alpha_k = \prod_{\nu=n_0}^{n_k} \frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}}$$

olarak tanımlanan $\{\alpha_k : k \geq 1 \text{ tamsayı }\}$ kümesi $\mathbb{C}$ uzayında yoğun olsun, o zaman B_1 ve B_2 operatörleri d-nümerik aşırı-dönüşseldir.

Kanıt. $\{(a_k, b_k) \in \mathbb{C}^2 : 0 < |a_k| < k \text{ ve } 0 < |b_k| < k, k \geq 1 \text{ tamsayı }\}$ sayılabilir kümesi $\mathbb{C}^2$ uzayında yoğun olsun.

(4.3.1) koşulunu göz önünde bulundurmakla görülür ki (n_k) dizisinin aşağıdaki eşitsizliği sağlayan öyle $\hat{m}_1$ terimi vardır ki her $m > \hat{m}_1$, $m \in (n_k)$ için

$$\Big|\Big(\prod_{\nu=n_0}^{m} \omega_\nu^{(1)}\Big)^{-1} a_1\Big| < 1.$$

eşitsizliği sağlanır.

$\{\alpha_k : k \geq 1 \text{ tamsayı }\}$ kümesi $\mathbb{C}$ uzayında yoğun bir küme olması nedeniyle, $B(\frac{b_1}{a_1}, \frac{1}{|a_1|})$ açık küresinde $\{\alpha_k : k \geq 1 \text{ tamsayı }\}$ kümesinin sonsuz tane elemanını bulabiliriz. O halde (n_k) dizisinin öyle $m_1 > \hat{m}_1$ terimi vardır ki

$$\Big|\prod_{\nu=n_0}^{m_1} \frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}} - \frac{b_1}{a_1}\Big| < \frac{1}{|a_1|}$$

eşitsizliği sağlanır. Ek olarak, $m_1 > \hat{m}_1$ olduğundan aşağıdaki eşitsizlik de sağlanır

$$\Big|\Big(\prod_{\nu=n_0}^{m_1} \omega_\nu^{(1)}\Big)^{-1} a_1\Big| < 1.$$

Yukarıdakilere benzer şekilde ilerleyerek, tümevarımla kanıtlayabiliriz ki verili her k pozitif tamsayısı için (n_k) dizisinin öyle $m_k > m_{k-1}$ terimi vardır ki

$$\Big|\prod_{\nu=n_0}^{m_k} \frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}} - \frac{b_k}{a_k}\Big| < \frac{1}{k|a_k|} \tag{4.3.2}$$

ve

$$\Big|\Big(\prod_{\nu=n_0}^{m_k} \omega_\nu^{(1)}\Big)^{-1} a_k\Big| < \frac{1}{k} \tag{4.3.3}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

$x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ (veya $j \in \mathbb{Z}$) dizisi terimleri aşağıdaki kuralla belirlenmiş olsun;

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{, eğer } j = n_0 - 1 \\ \frac{a_k}{\prod_{\nu=n_0}^{m_k} \omega_\nu^{(1)}} & \text{, eğer } j = m_k, k \text{ pozitif tamsayı} \\ 0 & \text{, geriye kalan durumlarda.} \end{cases}$$

(4.3.3) eşitsizliğinden görülür ki verili $k \geq 1$ tamsayısı için

$$\Big|\Big(\prod_{\nu=n_0}^{m_k} \omega_\nu^{(1)}\Big)^{-1} a_k\Big| < \frac{1}{k} \leq 1$$

olur. Bu eşitsizlikten $x \in c_0$ (veya $c_0(\mathbb{Z})$) ve $\|x\| = 1$ olduğu kolayca görülür. Buna ek olarak kanonik baz elemanları aracılığıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmış $e^*_{n_0-1} \in (c_0)^*$ (veya $(c_0(\mathbb{Z}))^*$) fonksiyonelini göz önüne alalım

$$e^*_{n_0-1}(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{, eğer } j = n_0 - 1, \\ 0 & \text{, eğer } j \neq n_0 - 1. \end{cases}$$

Doğrudan hesaplamayla görülür ki $\|e^*_{n_0-1}\| = 1$ ve $e^*_{n_0-1}(x) = 1$. Yani $(x, e^*_{n_0-1}) \in \Pi(c_0)$ (veya $\Pi(c_0(\mathbb{Z}))$). Ayrıca verili k pozitif tamsayısı için $B_1^{m_k-n_0+1}x$ vektörünün $n_0 - 1$. teriminin a_k ve $e^*_{n_0-1}(B_1^{m_k-n_0+1}x) = a_k$ olduğu görülür. Dolayısıyla herhangi k pozitif tamsayısı için

$$\Big|e^*_{n_0-1}(B_1^{m_k-n_0+1}x) - a_k\Big| = 0 \tag{4.3.4}$$

olduğunu görürüz.

Ayrıca gene doğrudan hesaplamayla $(B_2^{m_k-n_0+1}x)$ dizisinin n_0-1. teriminin $\prod_{\nu=n_0}^{m_k}\frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}}a_k$ ve $e_{n_0-1}^*(B_2^{m_k-n_0+1}x) = \prod_{\nu=n_0}^{m_k}\frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}}a_k$ olduğu görülür. Sonuç olarak, verili k pozitif tamsayısı için

$$\left|e_{n_0-1}^*(B_2^{m_k-n_0+1}x) - b_k\right| = |a_k|\left|\prod_{\nu=n_0}^{m_k}\frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}} - \frac{b_k}{a_k}\right| < |a_k|\frac{1}{k|a_k|} = \frac{1}{k} \tag{4.3.5}$$

olduğu görülür. (4.3.4) ve (4.3.5) eşitsizliklerinden ise $d\text{-}norb((x, e_{n_0-1}^*), B_1, B_2)$ kümesinin $\{(a_k, b_k) \in \mathbb{C}^2 : 0 < |a_k| < k \text{ ve } 0 < |b_k| < k, k \geq 1 \text{ tamsayı}\}$ kümesinde yoğun olduğu sonucuna ulaşılır. $\{(a_k, b_k) \in \mathbb{C}^2 : 0 < |a_k| < k \text{ ve } 0 < |b_k| < k, k \geq 1 \text{ tamsayı}\}$ kümesinin $\mathbb{C}^2$ uzayında yoğun olmasından, $d\text{-}norb((x, e_{n_0-1}^*), B_1, B_2)$ kümesinin $\mathbb{C}^2$ uzayında yoğun bir küme olduğu sonucunu alırız. Dolayısıyla B_1, B_2 operatörleri d-nümerik aşırı-dönüşseldir. □

4.4 ℓ^p ve $\ell^p(\mathbb{Z})$ Uzaylarında D-Nümerik Aşırı-Dönüşsellik İçin Bir Koşul

Şimdi ise ℓ^p ve $\ell^p(\mathbb{Z})$, $p \in [1, \infty]$, uzaylarında sırasıyla tek taraflı ve cift taraflı ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin diyagonal nümerik aşırı-dönüşselliği için yeterli bir koşul verelim.

Teorem 4.4.1. *$X = \ell^p$ (veya $\ell^p(\mathbb{Z})$), $p \in [1, \infty]$, uzayında tanımlı ve ağırlıkları sırasıyla sınırlı $\omega_1 = (\omega_\nu^{(1)})$ ve $\omega_2 = (\omega_\nu^{(2)})$, $\nu \in \mathbb{N}$ (veya $\nu \in \mathbb{Z}$), dizileriyle verilmiş olan B_1 ve B_2 tek taraflı (veya çift taraflı) ağırlıklı sola kaydırma operatörlerini tanımlayalım. Eğer terimleri pozitif tamsayılar olan kesin artan (m_k) ve (n_k) dizileri varsa ki*

1. $\sup_k \min\{m_k - n_k, n_k - m_{k-1}\} = +\infty$,
2. $\lim_{k\to\infty} \prod_{\nu=n_k}^{m_k} |\omega_\nu^{(1)}| = +\infty$,
3. $\left\{\alpha_k = \prod_{\nu=n_k}^{m_k} \omega_\nu^{(2)}/\omega_\nu^{(1)} : k \geq 1\right\}$ *kümesi $\mathbb{C}$ uzayında yoğun,*

koşulları sağlansın, o zaman B_1, B_2 operatörleri d-nümerik aşırı-dönüşseldir.

Kanıt. $\{(a_k, b_k) \in \mathbb{C}^2 : 0 < |a_k| < k \text{ ve } 0 < |b_k| < k, k \geq 1 \text{ tamsayı}\}$ kümesi $\mathbb{C}^2$ uzayında yoğun olsun. Teoremin koşularını kullarak (m_k) ve (n_k) dizilerinin sırası ile öyle $(\hat{m}_k)$ ve $(\hat{n}_k)$ altdizilerini bulabiliriz ki her $k \geq 1$ için $\hat{n}_1 \geq 2$, $\hat{m}_{k+1} - \hat{n}_{k+1} > \hat{m}_k$ ve $\hat{n}_{k+1} - \hat{m}_k > \hat{m}_k - \hat{n}_k + 2$ koşulları ve

$$\Big|\prod_{\nu=\hat{n}_k}^{\hat{m}_k}\frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}}-\frac{b_k}{a_k}\Big|<\frac{1}{2^k|a_k|} \tag{4.4.1}$$

ile

$$\Big|\big(\prod_{\nu=\hat{n}_k}^{\hat{m}_k}\omega_\nu^{(1)}\big)^{-1}a_k\Big|<\frac{1}{2^k} \tag{4.4.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

1.durum: İlk önce $X=\ell^\infty$ ve $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ durumu için savı kanıtlayalım. Terimleri aşağıdaki kurallarla belirlenmiş $y=(y_j)$ ve $y^*=(y_j^*)$ dizilerini göz önüne alalım.

$$y_j=\begin{cases}\frac{2^k a_k}{\prod_{\nu=\hat{n}_k}^{\hat{m}_k}\omega_\nu^{(1)}} & \text{eğer } j=\hat{m}_k,\ k \text{ pozitif tamsayı}\\ 0 & \text{, geriye kalan durumlarda}\end{cases}$$

$$y_j^*=\begin{cases}\frac{1}{2^k} & \text{eğer } j=\hat{n}_k-1,\ k \text{ pozitif tamsayı}\\ 0 & \text{, geriye kalan durumlarda}\end{cases}$$

$y\in X$ ve $y^*\in\ell^1$ (sırasıyla $\ell^1(\mathbb{Z})$) olduğu kolayca görülür. Ayrıca $\{j:y_j\neq 0\}\cap\{j:y_j^*\neq 0\}=\emptyset$ olduğundan $y^*(y)=\sum_j y_j\overline{y_j^*}=0$ olur. $\xi=(\xi_j)\in X$ terimleri aşağıdaki kuralla verilmiş dizi olsun.

$$\xi_j=\begin{cases}1 & \text{,eğer } j=\hat{n}_k-1,\ k \text{ pozitif tamsayı}\\ 0 & \text{, geriye kalan durumlarda}\end{cases}$$

$\tilde{y}=y+\xi=(y_i+\xi_i)\in X$ olarak verilmiş dizi olsun. Doğrudan hesaplamayla $(\tilde{y},y^*)\in\Pi(X)$ olduğu görülecektir. Ek olarak, verili k pozitif tamsayısı için $B_1^{\hat{m}_k-\hat{n}_k+1}\tilde{y}$ dizisinin $\hat{n}_k-1$. teriminin a_k olduğu ve böylece $y^*\big(B_1^{\hat{m}_k-\hat{n}_k+1}\tilde{y}\big)=a_k$ olduğu görülür. İlaveten $B_2^{\hat{m}_k-\hat{n}_k+1}\tilde{y}$ dizisinin $\hat{n}_k-1$. teriminin $\prod_{\nu=\hat{n}_k}^{\hat{m}_k}\frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}}a_k$ olduğu ve böylece

$$y^*\big(B_2^{\hat{m}_k-\hat{n}_k+1}\tilde{y}\big)=\prod_{\nu=\hat{n}_k}^{\hat{m}_k}\frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}}a_k$$

olduğu görülür. O halde (4.4.1) ve (4.4.2) eşitsizliklerini göz önüne alarak $d\text{-}norb((\tilde{y},y^*),B_1,B_2)$ kümesinin $\mathbb{C}^2$ uzayında yoğun olduğu açıkça görülür. Yani B_1, B_2 operatörleri d-nümerik aşırı-dönüşseldir.

2.durum: Verili $p\in(1,\infty)$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ eşitliğini sağlayan q reel sayısı olsun. $\lambda>0$ ileride belirlenecek bir sayı olup, terimleri aşağıdaki kuralla verilmiş $y=(y_j)$ dizisini göz önüne alalım:

$$y_j = \begin{cases} \lambda 2^{\frac{-kq}{p}} & , \text{eğer } j = \hat{n}_k - 1, \\ \frac{2^k a_k}{\prod_{\nu=\hat{n}_k}^{\hat{m}_k} \omega_\nu} & , \text{eğer } j = \hat{m}_k, \\ 0 & , \text{geriye kalan durumlarda.} \end{cases}$$

Şimdi y dizisinin p-normunu hesaplayalım:

$$\|y\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda 2^{\frac{-kq}{p}}\right)^p + \sum_{k=1}^{\infty} |2^k \frac{a_k}{\prod_{\nu=n_k}^{m_k} \omega_\nu}|^p < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda 2^{\frac{-kq}{p}}\right)^p + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2^k}\right)^p.$$

Bu eşitsizliğin en sağındaki seri toplamlarından ilkinin yakınsaklığı $\frac{1}{2^q} < 1$ olmasından, ikinci serinin yakınsaklığı ise seriler için oran testi kullanılarak görülür. Sonuç olarak $y \in \ell^p$ (sırasıyla $\ell^p(\mathbb{Z})$) olur.

$y^* = (y_j^*)$ dizisinin terimleri aşağıdaki kuralla verilmiş olsun

$$y_j^* = \begin{cases} 2^{-k} & , \text{eğer } j = \hat{n}_k - 1, \\ \lambda^{\frac{-p}{q}} (y_{\hat{m}_k})^{\frac{p}{q}} \overline{\beta_k}^{\frac{p}{q}-1} & , \text{eğer } j = \hat{m}_k, \\ 0 & , \text{geriye kalan durumlarda.} \end{cases}$$

Burada $\beta_k = \frac{y_{\hat{m}_k}}{|y_{\hat{m}_k}|}$ olarak tanımlanmıştır. Kolayca görülür ki $\|y^*\|_q^q = \lambda^{-p}\|y\|_p^p$. Dolayısıyla $\lambda = \|y\|_p$ olarak alırsak, $\|y^*\|_q = 1$ olur. $x = \frac{y}{\|y\|_p}$ ve $x^* = y^*$ olarak tanımlarsak

$$\begin{aligned} x^*(x) &= \|y\|_p^{-1} y^*(y) \\ &= \|y\|_p^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda 2^{-k(1+\frac{q}{p})} + \sum_{k=1}^{\infty} y_{\hat{m}_k} \overline{y_{\hat{m}_k}}^* \right) \\ &= \|y\|_p^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda 2^{-k(1+\frac{q}{p})} + \sum_{k=1}^{\infty} y_{\hat{m}_k} \lambda^{\frac{-p}{q}} \overline{y_{\hat{m}_k}}^{\frac{-p}{q}} \left(\frac{y_{\hat{m}_k}}{|y_{\hat{m}_k}|} \right)^{\frac{p}{q}-1} \right) \\ &= \lambda^{\frac{-p}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{1+\frac{p}{q}} 2^{-k(1+\frac{p}{q})} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_{\hat{m}_k}|^{1+\frac{p}{q}} \\ &= \|y\|_p^{-1} \lambda^{\frac{-p}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} |y_{\hat{m}_k}|^{1+\frac{p}{q}} \\ &= \|y\|_p^{-1} \lambda^{\frac{-p}{q}} \|y\|_p^p = 1 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

O halde $(x, x^*) \in \Pi(\ell^p)$ (sırasıyla $(x, x^*) \in \Pi(\ell^p(\mathbb{Z})$) olduğu görülür. Bildiğimiz üzere $\{(a_k, b_k) \in \mathbb{C}^2 : 0 < |a_k| < k$ ve $0 < |b_k| < k, k \geq 1$ tamsayı $\}$ $\mathbb{C}^2$ uzayında yoğun bir kümedir. Kolayca gösterilir ki $\{(\frac{a_k}{\|y\|_p}, \frac{b_k}{\|y\|_p}) : \ 0 < |a_k| < k$ ve $0 < |b_k| < k, k$ pozitif tamsayı$\}$ kümesi de $\mathbb{C}^2$ uzayında yoğun bir kümedir. Doğrudan hesaplamayla görülür ki $x^*(B_1^{\hat{m}_k-\hat{n}_k+1}x) = \frac{a_k}{\|y\|_p}$ ve $x^*(B_2^{\hat{m}_k-\hat{n}_k+1}x) = (\prod_{\hat{n}_k}^{\hat{m}_k} \frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}})\frac{a_k}{\|y\|_p}$ olur. (4.4.1) eşitsizliğini $\frac{|a_k|}{\|y\|_p}$ sayısıyla çarpmakla

$$\left| \prod_{\nu=\hat{n}_k}^{\hat{m}_k} \frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}} \frac{|a_k|}{\|y\|_p} - \frac{b_k}{\|y\|_p} \right| < \frac{1}{2^k \|y\|_p} \tag{4.4.3}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde (4.4.3) eşitsizliğini göz önüne alarak $d\text{-}norb((\hat{y}, y^*), B_1, B_2)$ kümesinin $\mathbb{C}^2$ uzayında yoğun olduğunu görebiliriz. Yani B_1 ve B_2 operatörleri d-nümerik aşırı-dönüşseldir.

3.durum: ℓ^1 (sırasıyla $\ell^1(\mathbb{Z})$) uzayında önermeyi kanıtlayacağız. Terimleri aşağıdaki kurallarla verilmiş $y = (y_j)$ ve $y^* = (y_j^*)$ dizilerinin sırasıyla ℓ^1 (sırasıyla $\ell^1(\mathbb{Z})$) ve ℓ^∞ (sırasıyla $\ell^\infty(\mathbb{Z})$)'nin elemanları olduğunu doğrudan hesaplamayla görebiliriz:

$$y_j = \begin{cases} 2^{-k} & ,\text{eğer } j = \hat{m}_k, \\ 0 & , \text{geriye kalan durumlarda,} \end{cases}$$

$$y_j^* = \begin{cases} \frac{2^k \overline{a_k}}{\overline{\prod_{\nu=\hat{n}_k}^{\hat{m}_k} \omega_\nu^{(1)}}} & , \text{eğer } j = \hat{n}_k - 1, \\ 1 & ,\text{eğer } j = \hat{m}_k, \\ 0 & , \text{geriye kalan durumlarda.} \end{cases}$$

Doğrudan hesaplamayla $\|y\| = 1$, (4.4.2) eşitsizliğinden $\|y^*\| = 1$ ve $y^*(y) = \sum_j y_j \overline{y_j^*} = 1$ olduğu görülür. Başka deyişle $(y, y^*) \in \Pi(\ell^1)$ (sırasıyla $(y, y^*) \in \Pi(\ell^1(\mathbb{Z}))$) ilişkisi sağlanır. Dahası $y^*\big(B_1^{\hat{m}_k-\hat{n}_k+1}y\big) = a_k$ ve $y^*\big(B_2^{\hat{m}_k-\hat{n}_k+1}y\big) = \prod_{\nu=\hat{n}_k}^{\hat{m}_k} \frac{\omega_\nu^{(2)}}{\omega_\nu^{(1)}} a_k$ olduğu doğrudan hesaplamayla görülür. O halde (4.4.1) eşitsizliğini göz önüne alarak görebiliriz ki $d\text{-}norb((y, y^*), B_1, B_2)$ kümesi $\mathbb{C}^2$ uzayında yoğun bir kümedir. Yani B_1 ve B_2 operatörleri d-nümerik aşırı-dönüşseldir. $\square$

Sonuç ve Öneriler

Bu tezin konusu nümerik aşırı-dönüşsel operatörlerdir. Yeni ve az incelenmiş bir kavram olan nümerik aşırı-dönüşselliğin ve on yıldan daha fazla bir süredir üzerine onlarca makale çıkmış ve çok çalışılmış bir kavram olan diyagonal aşırı-dönüşselliğin doğal bir birleşimi olan diyagonal nümerik aşırı-dönüşsellik kavramı öne sürülmüştür. Sonlu boyutlu normlu vektör uzaylarında diyagonal nümerik aşırı-dönüşsel operatörlerin varlığı gösterilmiş ve klasik dizi uzaylarında tanımlı ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin diyagonal nümerik aşırı-dönüşselliği için yeterli koşullar verilmiştir. İlk bölümlerde aşırı-dönüşsellik, diyagonal aşırı-dönüşsellik ve nümerik aşırı-dönüşsellik kavramları tanıtılmış ve temel sonuçlar kanıtlanmıştır. Bununla birlikte c_0 dizi uzayında ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin aşırı-dönüşselliği ve diyagonal aşırı-dönüşselliği için yeterli koşullar, sırasıyla aşırı-dönüşsel ve diyagonal aşırı-dönüşsel vektörler inşa edilerek de kanıtlanmıştır.

Diyagonal nümerik aşırı-dönüşsellik kavramının daha derin bir incelemesinin ve öncelikle ağırlıklı sola kaydırma operatörlerinin diyagonal nümerik aşırı-dönüşselliğinin tam bir karakterizasyonunun ilerleyen çalışmalarda yapılması amaçlanmaktadır.

Kaynakça

[1] J. Bès, A. Peris. *Disjointness in hypercyclicity*, J. Math. Anal. Appl. 336, 297-315, 2007.

[2] J. Bès, Ö. Martin and R. Sanders. *Weighted Shifts and Disjoint Hypercyclicity*, J. Operator Theory 72:1, 15-40, 2014.

[3] F. F. Bonsall, J.Duncan. *Numerical Ranges II*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 10, Cambridge Univ. Press, 1973.

[4] K. C. Chan, R. Sanders. *A Weakly Hypercyclic Operator That Is Not Norm Hypercyclic*, J. Operator Theory 52, 39-59 , 2004.

[5] N.P. Dekker 1969. *Joint numerical range and spectrum of Hilbert space operators*, Ph. D Thesis, Amsterdam, 1969.

[6] I. Gohberg, S. Goldberg, *Basic Operator Theory*, Birkhäuser, 2001.

[7] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris. *Linear Chaos*, Universitext, Springer-Verlag, 2011.

[8] S. G. Kim, A. Peris and H. G. Song. *Numerically Hypercyclic Operators*, Integr. Equ. Oper. Theory 72, 393-402, 2012.

[9] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, 1989.

[10] C. Pearcy, *Topics in Operator Theory*, Math. Surveys Monogr., 13, 1979.

[11] H. L. Royden. *Real Analysis*, Macmillan, 2nd Edition, 1968.

[12] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Inc., 2nd Edition, 1991.

[13] H. N. Salas. *Hypercyclic Weighted Shifts*, Trans. Amer. Math. Soc., 347, Number 3, March 1995.

[14] A. Seddik. *On The Numerical Range and Norm of Elementary Operators*, Linear Multilinear A., 2004, Vol. 52, No's. 3–4, pp. 293-302.

[15] S. Shkarin. *On Numerically Hypercyclic Operators*, `arXiv:1302.2483v1 [math.FA]`, 2013, arxiv.org.

Özgeçmiş

Umutcan Erdur 13.02.1987 tarihinde İstanbul- Bakırköy'de doğdu. 2010 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü'nden Matematik lisans derecesi ile mezun oldu. 2010-2013 yılları arasında aynı yüksek öğretim kurumunda Matematik yüksek lisans programı öğrencisi olup programı tamamlamadan ayrılmıştır. 2018 yılında Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ana bilim dalı'nda yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.