T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESKİN 2-GEÇİŞLİ LİNEER GRUPLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASLI KAYA

Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ayşe Aslı Berkman

Temmuz 2022

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESKİN 2-GEÇİŞLİ LİNEER GRUPLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASLI KAYA

Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ayşe Aslı Berkman

Temmuz 2022

ÖNSÖZ

Tez çalışması boyunca kıymetli bilgileriyle ve inanılmaz sabrıyla her defasında bana yardımcı olan, benim için zamanını ayırıp emek veren sevgili hocam Prof. Dr. Ayşe Berkman'a sonsuz teşekkür ederim. Yalnızca bu tez çalışmasında değil zor olan her anımda yanımda olduğu, ilgisi ile desteğini esirgemediği ve öğretileriyle yol gösterici olduğu için ayrıca kendisine minnettarım.
Ayrıca jürimde yer almayı kabul eden, vakit ayırıp tezimi okuyan ve düzeltmeler yapan Dr. Öğr. Üyesi İpek Tuvay ile Dr. Öğr. Üyesi Pınar Uğurlu'ya içtenlikle teşekkür ederim.

Temmuz 2022 Aslı Kaya

KESKİN 2-GEÇİŞLİ LİNEER GRUPLAR

ÖZET

Bu tezin ana konusu keskin 2-geçişli lineer grupları sınıflandırma problemidir. Belli bazı koşulları sağlayan keskin 2-geçişli grupların sınıflandırılması yapılmış olmakla birlikte, son yıllarda inşa edilen örnekler sayesinde tüm keskin 2-geçişli grupların tahmin edilenden çok daha zengin bir sınıf oluşturduğu anlaşılmıştır. Bu tezde permütasyon karakteristiği 2 olmayan keskin 2-geçişli lineer gruplarla ilgilenilmiş ve sınıflandırma probleminin iki farklı çözümüne yer verilmiştir. Birinci çözümde cebirsel gruplardan, ikinci çözümde ise sonlu grup teori tekniklerinden yararlanılmıştır.

Anahtar Kelimeler : 2-Geçişli Grup Etkisi, Lineer Grup, Cebirsel Grup

Sayfa Sayısı : 44

SHARPLY 2-TRANSITIVE LINEAR GROUPS

ABSTRACT

The main subject of this thesis is the problem of classification of sharply 2-transitive linear groups. Although classification of sharply 2-transitive groups which satisfy some specific conditions has been made, recently constructed examples showed that the whole class of sharply 2-transitive groups is much richer than expected. In this thesis sharply 2-transitive linear groups with permutation characteristic not 2 are studied and two different solutions of the classification problem are presented. Algebraic groups are used in the first solution, and finite group theory techniques are used in the second solution.

Key Words : 2-Transitive Group Action, Linear Group, Algebraic Group

Page Number : 44

İçindekiler

Bölüm 1

Giriş

Her grubun kendi üzerine keskin geçişli bir etkisi olmakla beraber, $k \geq 2$ için bir grubun keskin k-geçişli (çoklu) etkisinin bulunması grubun yapısı üzerine bazı kısıtlamalar getirmektedir. Bu nedenle keskin çoklu geçişli grupların sınıflandırmasını yapmak her zaman matematikçilerin ilgisini çeken bir problem olmuştur. Zassenhaus 1936 yılında keskin 2-geçişli ve keskin 3-geçişli sonlu grupları sınıflandırmıştır. Jordan da simetrik veya alterne tipte olmayan sonlu bir grubun keskin 4-geçişli ise M_{11}, keskin 5-geçişli ise M_{12} Mathieu grubu olduğunu göstermiştir. Sonsuz grupların sınıflandırılmasında ise $k \geq 4$ olmak üzere keskin k-geçişli sonsuz grup olamayacağını birbirlerinden bağımsız olarak J. Tits ve M. Hall kanıtlamıştır.

Bu durumda keskin 2-geçişli ve keskin 3-geçişli sonsuz grupların nasıl bir sınıflandırmaya sahip olduğu sorusu ortaya çıkmıştır. Keskin 3-geçişli sonsuz grupların sınıflandırılması açık bir soru iken keskin 2-geçişli sonsuz gruplar için bilinen standart bir örnek vardır. Keskin 2-geçişli sonsuz grupların yalnızca standart örnekteki formda olup olmadığı ise karşı bir örneğin [17]'de sunulmasına kadar bilinmiyordu. Bu sebeple bu tezde temel olarak [4] ve [6] aracılığıyla keskin 2-geçişli sonsuz grupların sınıflandırma problemine yardımcı olabilecek bir çözüm oluşturmak amaçlanmıştır. Bunun için tezde *lineer grup olma* koşuluyla birlikte keskin 2-geçişli lineer grupların incelemesi yapılmıştır.

Tezin giriş bölümü dışında dört bölümü bulunmaktadır. Tez boyunca yardımcı olabilecek gerekli tanım ve teoremler tezin ikinci bölümünde yer almaktadır. Üçüncü bölümde ise ilk olarak yukarıda da bahsettiğimiz keskin 2-geçişli sonsuz grup örneği olan standart örnek ele alınmıştır. Ayrıca *involüsyon* tanımı ve ardından tezde çokça yer alacak olan $pc(G)$ olarak da gösterilen bir grubun *permütasyon karakteristiği* tanımı verilip bu tanımlarla ilgili gerekli lemmalar tezde yerini almıştır. Bu bölümün sonunda ise *yakın-cisim* tanımını ele alıp bu tanım ile birlikte gerekli koşulları sağlaması halinde keskin 2-geçişli bir grupta bir yakın-cisim inşa ediyoruz.

Dördüncü bölümde bu tezin amacı olan keskin 2-geçişli lineer grupların incelemesine başlayabilmek adına *lineer grup* ile *cebirsel grup* tanımları verilmiş ve bu gruplara ait birtakım yardımcı teoremler incelenmiştir. Beşinci bölümde ise [4] ile [6]'daki temel teoremler sayesinde $pc(G) \neq 2$ ve $G \leq GL_n(\mathbb{F})$ keskin 2-geçişli sonsuz bir grup olmak üzere önce $char(\mathbb{F}) \neq 2$ ise cebirsel grup yöntemi sayesinde G grubunun etkisinin *standart* olduğunu, ardından da genel durumda sonlu grup teorisi yöntemi ile G grubunun etkisinin standart olduğunu göstereceğiz. Son olarak G grubunun etkisinin standart olduğunu gösterdiğimiz teoremden $pc(G) \neq 2$ koşulunun kaldırılamayacağını [5] makalesinde inşa edilen karşıt örnek sayesinde söyleyeceğiz.

Bölüm 2

Gerekli Tanım ve Teoremler

Bu bölümde sonraki bölümlerde gerekli olan tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1. G bir grup ve X bir küme olsun. $G \times X$'ten X'e giden bir f fonksiyonu ele alalım. $g \in G$ ve $x \in X$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f\colon G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım.

1. Her $x \in X$ için $id \cdot x = x$

2. Her $g_1, g_2 \in G$ ve her $x \in X$ için $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$

şartları sağlanıyorsa *G grubu X kümesi üzerine etki eder* denir.

Notasyon. Bundan sonra $g \cdot x$ ifadesi gx olarak gösterilecektir. Ayrıca bazı durumlarda, G grubu X kümesi üzerine etki eder ifadesini, $G \curvearrowright X$ olarak göstereceğiz.

Tanım 2.2. G grubu X kümesi üzerine etki etsin.

a) Sabitleyici. Her $x \in X$ için $stab_G(x) = stab(x) = \{g \in G : gx = x\}$, x'i sabitleyen altgrup olarak tanımlayalım.

Her $g \in G$ için $fix_X(g) = fix(g) = \{x \in X : gx = x\}$, g'nin sabit bıraktığı elemanlar kümesi olarak tanımlayalım.
b) Yörünge. Her $x \in X$ için $orb_G(x) = orb(x) = \{gx : g \in G\}$, x'in G'nin etkisi altında gidebildiği yerlerin kümesi olarak tanımlayalım. Ayrıca $A \leq G$ için $orb_A(x) = \{ax : a \in A\}$ olur.

Lemma 2.3. *$stab(x) \leq G$.*

Kanıt. İlk olarak, $stab(x) \neq \emptyset$ çünkü $idx = x$. Şimdi $g, h \in stab(x)$ alalım. $(gh)x = g(hx) = gx = x$ olur. Yani, $gh \in stab(x)$ ve $stab(x)$ grup işlemi altında kapalıdır. Dahası eğer $gx = x$ ise, $x = idx = (g^{-1}g)x = g^{-1}(gx) = g^{-1}x$ olur ve $g^{-1} \in stab(x)$ dir. Bu da $stab(x)$'in G'nin altgrubu olduğunu kanıtlar. □

Lemma 2.4. *$G \curvearrowright X$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda bir $g \in G$ için $stab(gx) = gstab(x)g^{-1}$ olur.*

Kanıt. Öncelikle $a \in stab(x)$ olsun. Yani $ax = x$ sağlansın. Bu durumda, $gag^{-1}(gx) = gax = gx$ ve $gag^{-1} \in stab(gx)$ olur. Şimdi $b \in stab(gx)$ olsun. Yani $bgx = gx$ sağlansın. Bu durumda ise $g^{-1}bg(x) = g^{-1}gx = x$ ve $g^{-1}bg \in stab(x)$ olur. Ayrıca, $b = g(g^{-1}bg)g^{-1} \in gstab(x)g^{-1}$ olur. Bu durum ise $stab(gx) = gstab(x)g^{-1}$ olduğunu gösterir.

Benzer şekilde, $a = g^{-1}(gag^{-1})g \in g^{-1}stab(gx)g$ olur ve bu durum da $stab(x) = g^{-1}stab(gx)g$ olduğunu gösterir. □

Lemma 2.5. *G grubu X kümesi üzerine etki etsin, $A \leq G$ ve $[G : A] < \infty$ olsun. Bu durumda $x \in X$ ise öyle $x_i \in X$ vardır ki $orb_G(x) = orb_A(x) \cup orb_A(x_2) \cup \ldots \cup orb_A(x_k)$ olur.*

Kanıt. $g_i \in G$ olmak üzere G'nin koset parçalanışının $G = A \sqcup Ag_2 \sqcup \ldots \sqcup Ag_k$ olduğunu varsayalım. O halde

$$
\begin{aligned}
orb_G(x) &\doteq \{gx : g \in G\} \\
&= \{gx : g \in A \sqcup Ag_2 \sqcup \ldots \sqcup Ag_k\} \\
&= \{ax : a \in A\} \cup \{ag_2x : a \in A\} \cup \ldots \cup \{ag_kx : a \in A\} \\
&= orb_A(x) \cup orb_A(g_2x) \cup \ldots \cup orb_A(g_kx)
\end{aligned}
$$

olur. Şimdi $g_ix = x_i$ dersek $orb_G(x) = orb_A(x) \cup orb_A(x_2) \cup \ldots \cup orb_A(x_k)$ elde ederiz. □

Tanım 2.6. $G \curvearrowright X$ olsun. Eğer her $x, y \in X$ için G'de $gx = y$'yi sağlayan bir $g \in G$ varsa, G grubu X kümesi üzerine *geçişli (transitive) etki* eder denir. G grubu X kümesi üzerine geçişli etki etmiyorsa grup etkisi *geçişsiz*dir denir.

Ayrıca grup etkilerinin geçişli olması bir $x \in X$ için $orb(x) = X$'e denktir.

Teorem 2.7. *G bir grup ve $A \leq G$ olsun. Bu durumda G grubunun G/A kümesi üzerine etkisi geçişlidir.*

Kanıt. Etkinin geçişli olduğunu gösterebilmek adına $g_1, g_2 \in G$ olmak üzere her $g_1A, g_2A \in G/A$ için g_1A elemanını g_2A elemanına götüren bir $g \in G$ bulmamız yeterli olacaktır. Bu durumda $g = g_2g_1^{-1}$ şeklinde seçersek geçişli etki için aradığımız elemanı bulmuş oluruz. □

$G \curvearrowright X$ olsun. Δ genelleştirilmiş köşegeni göstermek üzere $X^k \backslash \Delta = \{(a_1, \ldots, a_k) : a_i \in X,\ a_i = a_j \text{ ise } i = j\}$ olarak tanımlayalım.

Tanım 2.8. $k \leq |X|$ için G grubunun, $X^k \setminus \Delta$ üzerine geçişli etki etmesi, G'nin X kümesi üzerine *k-geçişli* etki etmesi demektir. Buna denk olarak, eğer her farklı $a_1, \ldots, a_k \in X$ ve her farklı $b_1, \ldots, b_k \in X$ için $1 \leq i \leq k$ olmak üzere $ga_i = b_i$ eşitliklerini sağlayan bir $g \in G$ varsa, G grubu X kümesi üzerine k-geçişli etki eder denir.

Tanım 2.9. $G \curvearrowright X$ olsun. Bu durumda G grubu $X^k \setminus \Delta$ üzerine geçişli etki ediyor ve bir $x \in X^k \setminus \Delta$ için $stab(x) = \{id\}$ ise G grubu *keskin k-geçişli*dir. Etki geçişli olduğu için alternatif olarak her $x \in X^k \setminus \Delta$ için $stab(x) = \{id\}$ ise de G grubu *keskin k-geçişli*dir.

Keskin k-geçişli gruplarda en az k noktayı sabitleyen tek elemanın birim eleman olduğu kolaylıkla görülebilir.

Ayrıca dikkat etmek gerekirse keskin k-geçişli etkilerde her $id \neq g \in G$ için $|fix(g)| \leq k - 1$ olmalıdır.

Örnek 2.10. Her grubun kendi üzerine keskin geçişli etkileri bulunur. G bir grup ve $g, x \in G$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, x) &\longmapsto gx \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, x) &\longmapsto xg^{-1} \end{aligned}$$

ikisi de keskin geçişlidir.

Örnek 2.11. S_n grubu hem keskin n-geçişli hem de keskin $(n-1)$-geçişlidir. A_n grubu ise keskin $(n-2)$-geçişlidir. Bu örneklerin kanıtı için [16]'da 7.1.4.'e bakılabilir.

Önerme 2.12. *G grubu, X kümesi üzerine geçişli etki etsin. $|X| \geq k \geq 2$ verilsin, $a \in X$ olsun. G'nin (keskin) k-geçişli olması için gerek ve yeter koşul $stab(a)$'nın $X \setminus \{a\}$ üzerine etkisinin (keskin) $(k-1)$-geçişli olmasıdır.*

Kanıt. $(\Longrightarrow)$: $i, j = 2, \ldots, k$ olsun. $i \neq j$ ise $a_i \neq a_j$ ve $b_i \neq b_j$ olmak üzere $a_2, \ldots, a_k \in X \setminus \{a\}$ ve $b_2, \ldots, b_k \in X \setminus \{a\}$ alalım. G grubu k-geçişli olduğu için $ga = a$, $ga_2 = b_2, \ldots, ga_k = b_k$'yı sağlayan bir $g \in G$ vardır. $ga = a$ olduğu için $g \in stab(a)$ olur. Bu durumda $stab(a)$, $X \setminus \{a\}$ kümesi üzerine $(k-1)$-geçişli etki eder.

$(\Longleftarrow)$: $i, j = 1, \ldots, k$ olsun. $i \neq j$ ise $a_i \neq a_j$ ve $b_i \neq b_j$ olmak üzere $a_1, \ldots, a_k \in X$ ve $b_1, \ldots, b_k \in X$ olsun. Varsayalım ki $stab(a)$, $X \setminus \{a\}$ kümesi üzerine $(k-1)$-geçişli etki etsin. G, X kümesi üzerine geçişli etki ettiği için öyle $g, f \in G$ bulabiliriz ki $ga_1 = a$ ve $fa = b_1$ olur. Ayrıca öyle bir $h \in stab(a)$ bulabiliriz ki, $h(ga_1) = f^{-1}b_1$, $h(ga_2) = f^{-1}b_2, \ldots, h(ga_k) = f^{-1}b_k$ sağlanır. Yani $(f \circ h \circ g)(a_1) = b_1$ olmak üzere, $(f \circ h \circ g)(a_i) = b_i$ her $i = 2, \ldots, k$ için sağlanır. Böylece G'nin k-geçişli olması için gereken $f \circ h \circ g \in G$'yi bulmuş oluruz. □

Tanım 2.13. G bir grup olmak üzere G'deki her elemanın mertebesi sonlu ise G'ye *periyodik grup* denir.

Tanım 2.14. G bir grup olmak üzere,

(a) G'nin her sonlu üreteçli altgrubu sonlu ise G'ye *yerel sonlu grup* denir.

(b) G'nin her sonlu üreteçli altgrubu çözülebilir ise G'ye *yerel çözülebilir grup* denir.

Teorem 2.15. *Periyodik yerel çözülebilir her grup yerel sonludur.*

Kanıt. Herhangi bir G grubunun periyodik yerel çözülebilir ve $\{g_1, \ldots, g_n\} \subseteq G$ olduğunu varsayalım. O zaman tanım gereği $K = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ periyodik çözülebilir grup olur. Böylece $\{id\} = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_s = K$ ve $1 \leq i \leq s-1$ için K_{i+1}/K_i abelyan olan bir dizinin var olduğunu söyleyebiliriz. O zaman sonlu üreteçli abelyan grupların sınıflandırmasını bildiğimiz için K_s/K_{s-1} grubu sonlu olur. K_{s-1} grubu da sonlu üreteçli bir grubun içinde sonlu indeksli olduğu için sonlu üreteçli olur. Şimdi ise s üzerine tümevarım yapıldığında tüm K_i'lerin sonlu olduğu görülebilir. Bu durumda K sonlu ve sonuç olarak G grubu yerel sonludur. □

Tanım 2.16. A bir grup ve B de A'nın öz altgrubu olsun. Bu durumda A'nın *Frobenius grup* ve B'nin de *Frobenius tümleyeni* olması demek $a \in A$ için $a^{-1}Ba \cap B \neq \{id\}$ ise $a \in B$ olması demektir.

Örnek 2.17. Herhangi bir $x \in X$ için $B = stab(x)$ olmak üzere keskin 2-geçişli her A grubu Frobenius gruptur. Özel olarak, B iki elemanlı herhangi bir altgrup olmak üzere $A = S_3$ Frobenius gruptur.

Teorem 2.18. *A sonlu grup olmak üzere bir Frobenius grubu ve B de bir Frobenius tümleyeni olsun. O zaman $M \setminus \{id\} = A \setminus \big(\bigcup_{a \in A} a^{-1}Ba \big)$ normal altgrup olur ve M'ye Frobenius çekirdeği denir. Ayrıca, $A = B \ltimes M$ sağlanır.*

Kanıt. Kanıt için [16]'da 8.5.5.'e bakılabilir. □

Teorem 2.19. *A bir sonlu Frobenius grubu ve M de bir Frobenius çekirdeği olsun. Bu durumda $[A : M]$ indeksi çift ise M abelyandır.*

Kanıt. Kanıt için [9]'da Lemma 7.21'e bakılabilir. □

Bölüm 3

Keskin 2-Geçişli Gruplar

Bu bölümde keskin 2-geçişli grupların temel özellikleri incelenmiştir. Bunun için [4], [6] ve [18] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Ayrıca bu bölümde $|X| \geq 2$ olmak üzere G, X kümesi üzerine keskin 2-geçişli etki eden bir grubu göstermektedir. Yani her $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2 \in X$ için $ga_1 = b_1$ ile $ga_2 = b_2$ eşitlikleri sağlanır ve en az iki noktayı sabitleyen tek eleman birim elemandır.

Örnek 3.1. (Standart Örnek) $\mathbb{F}$ herhangi bir cisim olmak üzere, $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \text{ , } b \in \mathbb{F} \right\}$ ve $X = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{F} \right\}$ olsun. G grubunun X kümesi üzerine matris çarpımı ile etkisi keskin 2-geçişlidir.
G grubunun X kümesi üzerine etkisi matris çarpımı ile $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+b \\ 1 \end{bmatrix} \in X$ şeklinde olacaktır. Şimdi $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ olmak üzere $\begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in X$ ve $\begin{bmatrix} y_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in X$ alalım. $\left\{ \begin{matrix} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{matrix} \right\}$ denklem sistemine, $a \neq 0$ olacak şekilde ortak çözüm ararsak, $a(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$ olur. Bu durumda $a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \neq 0 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ ve $b = y_1 - ax_1 \in \mathbb{F}$ olacak şekilde tek bir çözüm vardır. Böylece $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ olmak üzere, X'in x_1, x_2 elemanlarını y_1, y_2 elemanlarına keskin 2-geçişli etki ile götürmüş olduk.

Ayrıca eğer $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ seçersek $G \cong \mathbb{Z}_2$ ve eğer $\mathbb{F} = \mathbb{F}_3$ seçersek de $G \cong S_3$ olur.

Not. Aslında yukarıdaki örneğin kanıtında $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ üzerindeki çarpmanın değişmeli olması ve çarpmanın sağdan toplama üzerine dağılması kullanılmamıştır. Bu nedenle $\mathbb{F}$ yakın-cisim olsa da örnek geçerlidir. (Yakın-cismin tanımı Tanım 3.24'te verilmiştir.) Bundan sonra $\mathbb{F}$ bir yakın-cisim olmak üzere bu örneğe standart örnek veya etkiye standart etki diyeceğiz.

Lemma 3.2. *G grubu X üzerine keskin 2-geçişli etki etsin. $g, h \in G \setminus \{id\}$ olmak üzere $gh = hg$ ise $fix(g) = fix(h)$ olur.*

Kanıt. İlk olarak $g, h \in G \setminus \{id\}$ olmak üzere $fix(g) \subseteq fix(h)$ olduğunu gösterelim. Bunun için rastgele bir $a \in fix(g)$ alalım, yani $ga = a$ olur. Şimdi $gh = hg$ olduğu için $gha = hga = ha$ olmalıdır. Bu durum ise $ha \in fix(g)$ olduğunu gösterir. Fakat aynı zamanda keskin 2-geçişlilikten dolayı $|fix(g)| \leq 1$ olmalıdır. Yani $a = ha$ elde ederiz. Sonuç olarak, $a \in fix(h)$ ve $fix(g) \subseteq fix(h)$ olur. Benzer şekilde $fix(h) \subseteq fix(g)$ olduğu gösterilebilir. $\square$

3.1 İnvolüsyonlar

Tanım 3.3. Mertebesi iki olan elemanlara *involüsyon* denir.

Örnek 3.4. Standart örneğimizdeki G grubunun involüsyon kümelerini inceleyelim. $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ ve $b \in \mathbb{F}$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab + b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. $a^2 = 1$ ise $a = \pm 1$ olmalıdır. Bu durumda $\mathbb{F}$ cisminin karakteristiğine göre G grubunun involüsyon kümelerini bulabiliriz.

(i) $char(\mathbb{F}) \neq 2$ olsun. $a = 1$ ise $b = 0$ olur. Bu durumda tek çözüm birim elemandır fakat o da involüsyon değildir. $a = -1$ ise $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{F} \right\}$ kümesi G'nin involüsyon kümesi olur.

(ii) $char(\mathbb{F}) = 2$ olsun. $a = 1$ olur. Bu durumda $ab + b = 0$ eşitliği her $b \in \mathbb{F}$ için doğru olur. G'nin involüsyon kümesi ise $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{F} \right\}$ olarak bulunur.

Lemma 3.5. *G grubunun involüsyonları vardır.*

Kanıt. G grubunda mertebesi 2 olan bir eleman bulmamız yeterli olacaktır. Biliyoruz ki G grubu X kümesi üzerine keskin 2-geçişli etki ediyor. Şimdi, farklı $x, y \in X$ alırsak 2-geçişlilikten dolayı $gx = y$ ve $gy = x$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. Bu durumda $g^2x = g(gx) = gy = x$ ve $g^2y = g(gy) = gx = y$ olur. O zaman keskin 2-geçişlilikten dolayı $g^2 = id$ olur. Sonuç olarak, $g \neq id$ olduğu için g mertebesi 2 olan bir elemandır. □

Notasyon. G'deki involüsyonların kümesini I ile gösterelim.

Lemma 3.6. *I tek bir eşlenik sınıfıdır.*

Kanıt. $i, j \in I$ olsun. $g \in G$ olmak üzere $g^{-1}ig = j$ olsun istiyoruz. Bu durumda öncelikle X iki elemanlı bir küme ise keskin geçişlilikten dolayı $|G| = 2$ olacağı için $G \cong \mathbb{Z}_2$ olur. Buradan da kolaylıkla G'de tek bir involüsyon olduğunu ve tek eşleniğinin de kendisi olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi X en az 3 elemanlı bir küme ise $x \in X$ alalım öyle ki $ix \neq x$ ve $jx \neq x$ sağlansın. G grubu 2-geçişli olduğu için bir $g \in G$ vardır öyle ki $gx = x$ ve $gjx = ix$ sağlanır. Yani $g = (x)(jx, ix, \ldots) \cdots$ formundadır. O zaman, $g^{-1}igj(x) = g^{-1}iix = g^{-1}x = x$ ve $g^{-1}igj(jx) = g^{-1}igx = g^{-1}ix = jx$

olur. Böylece $g^{-1}igj$ elemanı iki farklı noktayı sabitlemiş olur. Keskin 2-geçişlilikten dolayı da $g^{-1}igj = id$ olmalıdır. Sonuç olarak $g^{-1}ig = j$ olur. $\square$

Notasyon. Bundan sonra herhangi bir $x \in X$ elemanını sabitleyelim ve $stab(x)$'i H olarak gösterelim. Ayrıca tüm $stab(x)$'ler eşlenik olduğu için hangisine H dediğimizin bir önemi olmayacaktır.

Lemma 3.7. *N, G'nin aşikar olmayan normal altgrubu olsun. O zaman, $G = NH$ olur.*

Kanıt. $g \in G \setminus H$, $n \in N$ ve $y \in X \setminus \{x\}$ olsun öyle ki $ny \neq y$ sağlansın. Ayrıca $hx = y$ ve $hgx = ny$ olacak şekilde $h \in G$ olsun. Bu durumda $h^{-1}n^{-1}hgx = h^{-1}n^{-1}ny = h^{-1}y = x$ olur. Yani $h^{-1}n^{-1}hg \in H$'dir. O zaman $h^{-1}n^{-1}hg = h_1 \in H$ olarak yazarsak $g = h^{-1}nhh_1$ olur. $n \in N$ ve $N \trianglelefteq G$ olduğu için de $g \in NH$ olur. $id \in N$ olduğundan dolayı bütün $g \in G$ elemanları için bu durum sağlanır. $\square$

Lemma 3.8. *$z \in H$ olması için gerek ve yeter koşul $H \cap z^{-1}Hz \neq \{id\}$ olmasıdır.*

Kanıt. Öncelikle $z \in H$ alalım ve $z^{-1} \in H$ elemanını H ile soldan çarpalım. O halde $z^{-1}H \subseteq H$ elde ederiz. Ayrıca $z^{-1}H$'yi sağdan z ile çarparsak $z^{-1}Hz \subseteq H$ olmalıdır. Bu durumda $H \cap z^{-1}Hz = H \neq \{id\}$ olur.

Şimdi ise $H \cap z^{-1}Hz \neq \{id\}$ olsun. O zaman öyle bir $a \neq id$ elemanı vardır ki $a \in H$ ve $a \in z^{-1}Hz$ sağlanır. Böylece bir $b \in H$ için $a = z^{-1}bz$ yazabiliriz. $a \in H$ olduğu için $x \in X$ olmak üzere $ax = x$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $b \in H$ olduğundan dolayı $a(z^{-1}x) = z^{-1}bz(z^{-1}x) = z^{-1}x$ olur. Bu durumda keskin 2-geçişlilik gereği ve $a \neq id$ olduğu için $z^{-1}x = x$ olmalıdır. Yani $z \in H$ elde ederiz. $\square$

Lemma 3.9. *H'de en fazla bir involüsyon olabilir.*

Kanıt. $i, j \in H \cap I$, $y \in X \backslash \{x\}$ ve $g \in G$ alalım öyle ki $g = (y)(jy, iy, \ldots) \cdots$ olsun. Bu durumda, $jg^{-1}ig(y) = jg^{-1}iy = jjy = y$ ve $jg^{-1}ig(jy) = jg^{-1}iiy = jg^{-1}y = jy$ olur. Yine keskin 2-geçişlilikten dolayı $jg^{-1}ig = id$ olmalıdır. O zaman $j = g^{-1}ig$ ve $j \in H \cap g^{-1}Hg$ olur. Buradan da Lemma 3.8 gereği $g \in H$ olmalıdır. Yani bir $x \in X$ için $gx = x$ olur. Ayrıca $gy = y$ olduğunu da bildiğimize göre keskin 2-geçişlilikten $g = id$ olmalıdır. $j = g^{-1}ig$ olduğunu bildiğimiz için buradan $i = j$ olduğunu görebiliriz. □

Notasyon. F ile G'deki sabit noktası olmayan elemanların kümesini gösterelim.

Lemma 3.10. *$I^2 := \{ij : i \neq j \in I\}$ kümesindeki elemanlar X'in hiçbir noktasını sabitleyemez. Yani $I^2 \subseteq F$ sağlanır.*

Kanıt. Çelişki ile ispat edelim. $i \neq j \in I$ alalım öyle ki $ijx = x$ olsun. O zaman, $(ij)^{-1} = j^{-1}i^{-1} = ji = j^{-1}(ij)j$ ve $j^{-1}(ij)j \in H \cap j^{-1}Hj$ olur. Diğer taraftan Lemma 3.8 gereği $j \in H$ olmalıdır. O halde $ix = x$ ve $i, j \in H$ olur. Bu durum ise Lemma 3.9 ile çelişir. □

Lemma 3.11. *Eğer bir $r \in I$ için Ir'nin elemanları birbirleri ile yer değiştirir ise o zaman $I^2 \cup \{id\} \trianglelefteq G$ olur.*

Kanıt. Diğer koşullar açık olduğu için sadece çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlamamız yeterli olacaktır. $i, j, k, l \in I$ alalım ve $ijkl \in I^2$ olduğunu gösterelim. Öncelikle tek bir $r \in I$ için Ir'nin elemanları birbirleri ile yer değiştiriyorsa, Lemma 3.6 gereği her $r \in I$ için bu argümanın doğru olduğunu söyleyebiliriz. Bu sebeple özel olarak Ii için de bu argüman doğrudur. Ayrıca, $Ii = iI$ olduğunu göz önüne alırsak, o zaman buradan $(ijk)^2 = ijkijk =$

$kiijjk = id$ olur. Yani, $ijk \in I \cup \{id\}$ dir. ijk eğer bir involüsyonsa o zaman $ijkl \in I^2$ olur ve işimiz biter. Şimdi $ijk = id$ olduğunu varsayalım. Eğer H'nin involüsyonu varsa $ij = k$ olacağından Lemma 3.6 gereği bir $g \in G$ için $g^{-1}ijg = g^{-1}kg \in H$ olur. Ya da $g^{-1}ijg \in I^2$ elemanının x'i sabitlediğini de söylememiz aynı anlama gelecektir. Bu da Lemma 3.10 ile çelişir. Eğer H'nin involüsyonu yoksa $ijk = id$ olduğu için $ij = k \in I$ olur. Yani $I \subseteq I^2$ dir. Buradan, $ijkl = (id)l = l \in I \subseteq I^2$ olur. □

3.2 Permütasyon Karakteristiği

Lemma 3.12. *Eğer H'nin bir involüsyonu varsa o zaman G'nin X üzerine etkisi G'nin I üzerine eşlenik etkisine denktir.*

Kanıt. Öncelikle Lemma 3.9 gereği H'deki tek bir involüsyonu i_x ile gösterirsek $i_x x = x$ olmak üzere G'nin I üzerine etkisini aşağıdaki şekilde eşlenik etkisi olarak yazabiliriz.

$$G \times I \longrightarrow I$$
$$(g, i_x) \longmapsto g i_x g^{-1}$$

Bu durumda bu iki etkinin denk olabilmesi için G'den G'ye giden bir α otomorfizmasını $\alpha = id$ olarak seçelim. Ayrıca X'ten I'ya giden fonksiyonu ise β olarak adlandırırsak ve

$$\beta \colon X \longrightarrow I$$
$$x \longmapsto i_x$$

şeklinde seçersek, β fonksiyonu birebir ve örten olur. Çünkü ilk olarak her $x \in X$ için varsayım gereği H'de bir involüsyon olduğu için β iyi tanımlıdır.

Ayrıca $x \neq y \in X$ için x ve y elemanlarının aynı involüsyona gittiğini varsayalım. Bu durumda bu involüsyon aynı anda iki noktayı sabit bırakmış olur ve keskin 2-geçişlilik gereği bu involüsyonun birim elemana eşit olması gerekir. Bu da bir çelişkidir. Yani β birebirdir. Son olarak rastgele bir involüsyon aldığımızda bir tane sabit noktası olduğu için de β örtendir. O halde bu seçimler istediğimiz iki etkinin denkliği için yeterli olacaktır. Çünkü gerçekten $(gi_xg^{-1})(gx) = gx$ olacağı için $\beta(gx) = i_{gx}$ sağlanır. □

Lemma 3.13. *Eğer H'de tek bir involüsyon varsa I^2 tek bir eşlenik sınıfıdır.*

Kanıt. Lemma 3.12 gereği biliyoruz ki G'nin X üzerine etkisi G'nin I üzerine eşlenik etkisine denktir. O zaman $i \neq j, k \neq l \in I$ alalım. Bu durumda G grubu 2-geçişli olduğu için öyle bir $g \in G$ vardır ki $g^{-1}ig = k$ ve $g^{-1}jg = l$ sağlanır. O halde buradan $g^{-1}(ij)g = (g^{-1}ig)(g^{-1}jg) = kl$ elde ederiz. Sonuç olarak I^2 tek bir eşlenik sınıfı olur. □

Önerme 3.14. *G grubu keskin 2-geçişli bir grup olmak üzere H'nin bir involüsyon içerdiğini varsayalım. Bu durumda I^2'deki bütün elemanların mertebesi aynıdır. Dahası elemanların mertebesi ya sonsuz ya da bir $p > 2$ asal sayısı olur.*

Kanıt. I^2, Lemma 3.13 gereği tek bir eşlenik sınıfı olduğu için I^2 kümesindeki bütün elemanların mertebesi aynıdır. Ayrıca I^2 kümesi kuvvet alma altında kapalıdır. Bunu göstermek için herhangi bir $ij \in I^2$ ve $m \in \mathbb{N}$ alalım. Eğer m tek sayı ise $(ij)^m = i[(ji)^{\frac{m-1}{2}}j(ij)^{\frac{m-1}{2}}]$ iki involüsyonun çarpımı olur, eğer m çift sayı ise $(ij)^m = i[(j(ij)^{\frac{m}{2}-1})i(j(ij)^{\frac{m}{2}-1})]$ yine iki involüsyonun çarpımı olur. Yani I^2 kümesi kuvvet alma altında kapalıdır. Şimdi eğer I^2 kümesindeki elemanların mertebesi sonlu ise bu mertebeyi n ile gösterelim. Çelişki elde etmek için de n'nin asal olmadığını kabul edelim ve p asal sayı olmak üzere $p \mid n$ olduğunu varsayalım. Bu durumda I^2 kümesindeki bir $(ij)^p$ elemanının mertebesi $\frac{n}{p} \neq n$ olur ve bize istediğimiz çelişkiyi verir. $\square$

Dikkat. Eğer $p = 2$ ise öncelikle H'de involüsyon olduğunu düşünelim. Ayrıca I^2'den bir elemanı mertebesi 2 olacak şekilde seçelim. Bu durumda I^2'deki eleman involüsyon olur ve bir noktayı sabitler. Fakat Lemma 3.10 gereği böyle bir eleman seçemeyiz. Yani H'de involüsyon varsa $p = 2$ olamaz.

Tanım 3.15. G keskin 2-geçişli bir grup olmak üzere G'nin *permütasyon karakteristiği* $pc(G)$ ile gösterilip aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$pc(G) = \begin{cases} 2 & H\text{'de involüsyon yoksa,} \\ p & H\text{'de involüsyon var ve } I^2\text{'deki elemanların mertebesi } p \text{ ise,} \\ 0 & H\text{'de involüsyon var ve } I^2\text{'deki elemanların mertebesi } \infty \text{ ise.} \end{cases}$$

Tanım 3.16. G herhangi bir grup olmak üzere $A \leq G$ ve $N \trianglelefteq G$ olsun. Eğer $G = AN$ ve $A \cap N = \{id\}$ koşulları sağlanıyorsa G'ye N ve A'nın yarıdirekt çarpımı denir ve $G = N \rtimes A = A \ltimes N$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.17. G bir grup ve X bir küme olmak üzere, G grubu X üzerine keskin 2-geçişli etki etsin. Eğer $x \in X$ ve $N \trianglelefteq G$ için $G = N \rtimes stab(x)$ şeklinde yazılabiliyorsa G'ye *ayrılan (split)* grup denir.

Örnek 3.18. $pc(G) = 2$ için [14]'te ve $pc(G) = 0$ için [15]'te ayrılmayan grup örnekleri inşa edilmiştir.

Örnek 3.19. $pc(G) = 0$ için [1]'de basit grup örnekleri inşa edilmiştir.

Teorem 3.20. *Eğer $pc(G) = 3$ ise G grubu ayrılır.*

Kanıt. Kısaltma amacı ile, yalnızca bu kanıtta $I^2 \cup \{id\}$ yerine I^2 yazacağız. Şimdi G grubunun $G = I^2 \rtimes H$ şeklinde yazılabildiğini düşünelim. Eğer I^2 normal altgrup ise Lemma 3.7 gereği $G = I^2 H$ olur ve Lemma

3.10 gereği de I^2, X'te bir nokta sabitleyemeyeceği için $H \cap I^2 = \{id\}$ olur. Yani bu düşüncemizi kanıtlamak için sadece I^2'nin normal altgrup olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Lemma 3.11'e göre de $i \in I$ olmak üzere $Ii = iI$ olduğunu göstermek I^2'nin normal altgrup olabilmesi için yeterlidir. Şimdi $i \in H \cap I$, H'nin bir involüsyonu ve $j \neq k$ olmak üzere $ji, ki \in Ii$ olsun. Bu durumda G'nin keskin 2-geçişliliğinden dolayı $jiki$ ve $kiji$'nin farklı iki noktada aynı elemanı aynı elemana götürdüğünü göstermek yeterli olacaktır. Lemma 3.12 gereği, X'i I ve etkiyi de eşlenik etkisi alabiliriz. Bu durumda $(jiki)^{-1}j(jiki) = (kiji)^{-1}j(kiji)$ ve $(jiki)^{-1}k(jiki) = (kiji)^{-1}k(kiji)$ olduğunu gösterebilirsek $jiki$ ve $kiji$'nin farklı iki nokta olan j ve k'de aynı elemanı aynı elemana götürdüğünü göstermiş oluruz. Simetriden dolayı eşitliklerin birini göstermek yeterli olacaktır. Şimdi, $pc(G) = 3$ olduğu için $(ij)^3 = id$, $(ik)^3 = id$ ve $(jk)^3 = id$ olduğunu söyleyebiliriz. O zaman,

$(jiki)^{-1}j(jiki) = (ikij)j(jiki) = (iki)j(iki) = (ji)k(ij) = (ijij)k(jiji) = (iji)jkj(iji) = (iji)kjk(iji) = (ijik)j(kiji) = (kiji)^{-1}j(kiji)$

olduğu için göstermek istediğimizi elde etmiş oluruz. □

Lemma 3.21. *Eğer $pc(G) \neq 2$ ve her $i \in I$ için $ix = x$ olacak şekilde tek bir $x \in X$ varsa o zaman $C_G(i) = \{g \in G : gi = ig\}$ olmak üzere $C_G(i) = stab(x)$ olur.*

Kanıt. Öncelikle $x \in fix(i)$ ve $g \in C_G(i)$ olsun. O zaman Lemma 3.2 gereği $fix(i) = fix(g)$ olur ve $x \in fix(g)$ elde ederiz. Bu ise $g \in stab(x)$ demektir. Yani $C_G(i) \leq stab(x)$ olur.

Şimdi $g \in stab(x)$ olsun. O zaman $g^{-1}ig(x) = g^{-1}ix = g^{-1}x = x$ ve $ix = x$ olduğu için Lemma 3.9 gereği $g^{-1}ig = i$ olmalıdır. Yani $ig = gi$ ve $g \in C_G(i)$ olur. Sonuç olarak $C_G(i) = stab(x)$ elde ederiz. □

Lemma 3.22. *G grubu X kümesi üzerine keskin 2-geçişli etki etsin ve N, G'nin aşikar olmayan normal altgrubu olsun. Bu durumda N geçişlidir. Ayrıca, N grubu abelyansa N keskin geçişlidir.*

Kanıt. G grubu 2-geçişli olduğu için N'nin geçişli olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü $x \in X$, $g \in G$ ve $n \in N$ olmak üzere $orb_N(x) = \{nx : n \in N\} \subseteq X$ olsun. Şimdi $x \neq nx$ olmak üzere $x, nx \in orb_N(x)$ ve $y \in X \setminus orb_N(x)$ alalım. Bu durumda G grubu 2-geçişli olduğu için öyle bir $g \in G$ vardır ki $gx = x$ ve $gnx = y$ sağlanır. O zaman $y = gnx = gng^{-1}(gx) = gng^{-1}x \in orb_N(x)$ olur ve çelişki elde ederiz. Demek ki $orb_N(x) = X$ ve N geçişli olmalıdır.

Bu durumda N geçişli etki ettiğinden dolayı her $x, y \in X$ için $nx = y$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Şimdi N'nin abelyan olduğunu varsayalım, bu durumda Lemma 2.4 gereği her $n \in N$ için $stab_N(x) = n^{-1}stab_N(nx)n = stab_N(nx)$ olur. Şimdi ise $g \in stab_N(x) = stab_N(nx)$ alalım. O zaman $gy = g(nx) = nx = y$ olur. Yani g, her y elemanını sabitlemiş oldu. Bu durumda keskin 2-geçişlilikten $g = id$ olmalıdır. Sonuç olarak $stab_N(x) = \{id\}$ ve N, keskin geçişli olur. $\square$

Teorem 3.23. *G, X kümesi üzerine etki eden keskin 2-geçişli sonsuz bir grup ve N, G grubunun aşikar olmayan abelyan normal altgrubu olsun. Bu durumda p bir asal sayı olmak üzere*

(i) eğer $pc(G) = p \neq 2$ ise $N = I^2 \cup \{id\}$ elementer abelyan p-grup ve

(ii) eğer $pc(G) = 2$ ise $N = I \cup \{id\}$ elementer abelyan 2-grup olur.

Kanıt. (i) Öncelikle $pc(G) \neq 2$ olduğunu varsayalım ve $t \in I$ alalım. O zaman tanım gereği t, X kümesinde bir nokta sabitleyecektir, bu noktaya z diyelim. Ayrıca N aşikar olmayan abelyan normal altgrup olduğu için Lemma

3.22 gereği keskin geçişli etki edecektir. Bu durumda Lemma 3.21 gereği $C_N(t) = N \cap\ C_G(t) = N \cap stab(z) = \{id\}$ olur. Buradan da $[t, N] \neq \{id\}$ sağlanır.

O zaman, $n \in N$ olmak üzere $[t, n] = t^{-1}n^{-1}tn \neq id$ olur. Şimdi $s = n^{-1}tn$ dersek $[t, n] = t^{-1}s = ts \in I^2$ elde ederiz. Lemma 3.13'ten I^2 kümesindeki elemanların eşlenik olduğunu hatırlayalım. Bu durumda $[t, n] = t^{-1}n^{-1}tn = ts \in [t, N] \leq N \trianglelefteq G$ olur. Yani ts'nin tüm eşlenikleri N grubundadır. Böylece $I^2 \subseteq N$ olur. Ayrıca I^2'nin X kümesi üzerine etkisi geçişlidir. Çünkü farklı $x, y \in X$ için r, $stab(x)$'teki involüsyon olsun ve $s(x) = y$ olacak şekilde $s \in I$ seçelim. O zaman $(sr)(x) = s(rx) = s(x) = y$ olur.

Son olarak $a \in N \setminus I^2$ olsun. N keskin geçişli olduğu için $u, v \in X$ olmak üzere $au = v$ yazabiliriz. Ayrıca I^2 geçişli olduğu için $bu = v$ olacak şekilde bir $b \in I^2 \subseteq N$ vardır. Bu durumda $a \in N \setminus I^2$ ve $b \in I^2 \subseteq N$ olduğundan dolayı $a \neq b \in N$ olur. Öte yandan $au = v$ ve $bu = v$ olduğunu biliyoruz. Fakat N grubu keskin geçişli olduğu için $a = b$ olmak zorundadır. Bu durum ise çelişkidir. Yani $N = I^2 \cup \{id\}$ olmalıdır.

(ii) Şimdi ise $pc(G) = 2$ olduğunu varsayalım. Bir $x \in X$ için $H = stab_G(x)$ olsun. N, G'nin aşikar olmayan normal altgrubu olduğu için Lemma 3.7 gereği $G = NH$ şeklindedir. Şimdi $t \in I$ alalım. I, G'deki involüsyonların kümesi olduğu için bir $n \in N$ ve $h \in H$ için $t = nh$ yazabiliriz. O zaman, $id = t^2 = tt = nhnh = nhn(h^{-1}h)h = nhnh^{-1}h^2$ olur. Ayrıca, $h^2 = hn^{-1}h^{-1}n^{-1} \in N$ ve $H \cap N = \{id\}$ olduğu için $h^2 = id$ olmalıdır. Öte yandan, $pc(G) = 2$ olduğu için tanım gereği H'de involüsyon olmadığını biliyoruz. Yani $H \cap I = \emptyset$ olur ve buradan da $h = id$ olduğunu söyleyebiliriz. O zaman $t = nh = n.id = n \in N$ olduğundan dolayı $t \in N$ olur. Lemma 3.6 gereği de I, tek bir eşlenik sınıfı olduğu için $I \subset N$ elde ederiz. Ayrıca G, I kümesi üzerine eşlenik etkisi ile geçişli etki ettiği için $I \cup \{id\} \subseteq N$, G'nin geçişli altkümesi olur. Sonuç olarak yine yukarıdaki benzer sebeplerden dolayı $N = I \cup \{id\}$ elde ederiz. $\square$

3.3 Yakın-cisimler

Tanım 3.24. K kümesi en az iki elemanlı olmak üzere üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ işlemleri tanımlansın. Bu durumda

1. $(K, +)$ toplamsal birim elemanı 0 olan abelyan bir grup,
2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ çarpımsal birim elemanı 1 olan bir grup,
3. Her $a, b, c \in K$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
4. Her $a \in K$ için $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

özellikleri sağlanıyorsa $(K, +, \cdot)$ *yakın-cisim* olarak adlandırılır.

Ayrıca yakın-cisim ile cisim arasındaki farkın, yakın-cisimdeki çarpmanın soldan toplama üzerine dağılması ve cisimdeki çarpmanın değişmeli olması olduğuna dikkat edelim.

Örnek 3.25. Her bölme halkası ve her cisim bir yakın-cisimdir. Bölme halkası olmayan en küçük yakın-cisim örneği 9 elemanlıdır.

Teorem 3.26. *$|X| \geq 2$ ve $G \leq Sym(X)$ aşikar olmayan abelyan normal bir N altgrubuna sahip olan keskin 2-geçişli grup olsun. Bu durumda bir K yakın-cismi vardır öyle ki $K \setminus \{0\} = K^\times$ olmak üzere $G \curvearrowright X$ denktir $K^\times \ltimes K \curvearrowright K$ (ve $G \cong K^\times \ltimes K$) olur. Ayrıca G grubunun etkisi standart olarak adlandırılır.*

Kanıt. Öncelikle K kümesini $K = X$ şeklinde seçelim ve ardından rastgele $0, 1 \in K$ seçelim. Lemma 3.22 gereği N'nin keskin geçişli ve $N \setminus \{id\} \subseteq F$ olduğunu söyleyebiliriz. O halde $n \in N$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_1 \colon N &\longrightarrow K \\ n &\longmapsto n(0) \end{aligned}$$

birebir ve örten olur. Çünkü $n_1 \neq n_2 \in N$ alalım. $f(n_1) = f(n_2)$ olsun. Bu durumda $n_1(0) = n_2(0)$ olur. N keskin geçişli olduğundan dolayı iki farklı eleman 0'ı aynı yere götüremeyeceği için $n_1 = n_2$ ve f_1 birebir olmalıdır. Ayrıca N geçişli olduğu için de f_1 örtendir. Şimdi $m \in N$ olmak üzere K üzerindeki toplamayı $n(0) + m(0) = nm(0)$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $f_1(n \cdot m) = nm(0) = n(0) + m(0) = f_1(n) + f_1(m)$ olduğu için $(K, +)$ bir grup olur ve f_1 fonksiyonu N ile $(K, +)$ arasında izomorfizmaya dönüşür. Yani yakın-cisim tanımındaki birinci özellik sağlanır.

Ayrıca Önerme 2.12 gereği, $stab(0)$'ın keskin geçişli olduğunu söyleyebiliriz. O zaman $K \setminus \{0\} = K^\times$ ve $g \in stab(0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_2 \colon stab(0) &\longrightarrow K^\times \\ g &\longmapsto g(1) \end{aligned}$$

fonksiyonu da birebir ve örten olur. Çünkü $g_1 \neq g_2 \in stab(0)$ olmak üzere $f_2(g_1) = f_2(g_2)$ olsun. Bu durumda $g_1(1) = g_2(1)$ olur. Yine $stab(0)$ keskin geçişli olduğu için $g_1 = g_2$ ve f_2 birebir olmalıdır. Ayrıca yine $stab(0)$ geçişli olduğu için de f_2 örtendir. Şimdi $K^\times$ üzerindeki çarpmayı $g, h \in stab(0)$ olmak üzere $g(1) \cdot h(1) = gh(1)$ şeklinde tanımlayalım. Bu tanım sayesinde $f_2(g \cdot h) = gh(1) = g(1) \cdot h(1) = f_2(g) \cdot f_2(h)$ olduğu için $(K^\times, \cdot)$ grup ve $stab(0)$ ile $(K^\times, \cdot)$ da izomorfik olur. Yani yakın-cisim tanımındaki ikinci özellik sağlanır.

Ayrıca her $a \in K$ için $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ olarak tanımlayalım. O halde, yakın-cisim tanımındaki dördüncü özellik sağlanır.

N grubu normal olduğu için her $n \in N$ ve $g \in stab(0)$ için $g^{-1}ng \in N$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $g(1) \cdot n(0) = gng^{-1}(0)$ olur. Çünkü eğer $n = id$ ise $gng^{-1} = id$ olur ve buradan da $g(1) \cdot n(0) = g(1) \cdot 0 = 0 = id(0) = gng^{-1}(0)$ olmalıdır. Eğer $n \neq id$ ise o zaman öyle tek bir $h \in stab(0)$ vardır ki $n(0) = h(1)$ olur ve yine $g \in stab(0)$ olduğu için de $g(1) \cdot n(0) = g(1) \cdot h(1) = gh(1) = gn(0) = gng^{-1}(0)$ olmalıdır.

Şimdi herhangi $a, b, c \in K$ alalım. Bu durumda eğer $a = 0$ ise $a \cdot (b + c) = 0 \cdot (b+c) = 0 = 0+0 = 0 \cdot b + 0 \cdot c$ olur. Eğer $a \neq 0$ ise $g \in stab(0)$ ve $n, m \in N$ olmak üzere $a = g(1)$, $b = n(0)$ ve $c = m(0)$ olsun. O zaman $a \cdot (b + c) = g(1) \cdot (n(0) + m(0)) = g(1) \cdot nm(0) = g(nm)g^{-1}(0) = (gng^{-1})(gmg^{-1})(0) = gng^{-1}(0) + gmg^{-1}(0) = g(1) \cdot n(0) + g(1) \cdot m(0) = a \cdot b + a \cdot c$ olur. Yani yakın-cisim tanımındaki üçüncü özellik de sağlanır ve K'nın yakın-cisim olduğunu kanıtlamış oluruz.

Dahası yine $n \in N$ ve $a \in K$ olmak üzere, $a = m(0)$ eşitliğini sağlayan bir $m \in N$ vardır ve N grubu K üzerine $n(a) = nm(0) = n(0) + m(0) = n(0) + a$ şeklinde etki eder. Benzer şekilde $g \in stab(0)$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $a = h(1)$ eşitliğini sağlayan bir $h \in stab(0)$ vardır ve bu durumda $stab(0)$ da K üzerine $g(a) = gh(1) = g(1) \cdot h(1) = g(1) \cdot a$ şeklinde etki eder. Eğer $a = 0$ ise $g \in stab(0)$ olduğu için $g(0) = 0 = g(1) \cdot 0$ olur.

Son olarak Lemma 3.7 sayesinde biliyoruz ki $G = N \cdot stab(0)$ ve ayrıca $N \subseteq F$ olduğu için de $N \cap stab(0) = \{id\}$ olur. Bu durumda $G = N \rtimes stab(0)$ şeklinde ve $n \in N$, $g \in stab(0)$ olmak üzere her $\alpha \in G$, $\alpha = gn$ şeklinde yazılabilir. Böylece $\alpha(a) = gn(a) = g(n(0) + a) = g(1) \cdot (n(0) + a) = g(1) \cdot n(0) + g(1) \cdot a$

elde ederiz. Öyleyse $\alpha = gn$ ve $X = K$ olmak üzere

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (\alpha, a) &\longmapsto g(1) \cdot n(0) + g(1) \cdot a \end{aligned}$$

etkisi ile $g(1) \cdot n(0) = y$ ve $g(1) = x$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (K^{\times} \ltimes K) \times K &\longrightarrow K \\ ((x, y), a) &\longmapsto ax + y \end{aligned}$$

etkisi denktir ve doğal olarak $G \cong K^{\times} \ltimes K$ olur. $\square$

Bölüm 4

Lineer Gruplar

Bu bölümde tezin son bölümü için gerekli olan *lineer grup* ile *cebirsel grup* tanımlarına ve gerekli teoremlere yer vereceğiz.

4.1 Tanımlar ve Özellikler

Tanım 4.1. $\mathbb{F}$ bir cisim olmak üzere $GL_n(\mathbb{F}) = \{M \in \mathbb{F}^{n\times n} : det(M) \neq 0\}$ bir gruptur ve bu gruba *genel lineer grup* denir. $GL_n(\mathbb{F})$ grubunun her altgrubuna ise *lineer grup* denir.

Örnek 4.2. $GL_n(\mathbb{F})$ ve $SL_n(\mathbb{F}) = \{M \in \mathbb{F}^{n\times n} : det(M) = 1\}$ grupları lineer gruba örnek olarak verilebilir.

Tanım 4.3. $\mathbb{F}$ bir cisim ve $u \in GL_n(\mathbb{F})$ olsun. Bu durumda $r \in \mathbb{F}^{n\times n}$ nilpotent (diğer bir deyişle bir $m \in \mathbb{Z}^+$ için $r^m = 0$) olmak üzere eğer $u = I + r$ şeklinde yazılabiliyorsa u, *unipotent* olarak adlandırılır.

Lemma 4.4. *$\mathbb{F}$ bir cisim olmak üzere $G \leq GL_n(\mathbb{F})$ altgrubu unipotent ise nilpotenttir.*

Kanıt. Kanıt için [8]'de 17.5.'teki Sonuç'a bakılabilir. □

Lemma 4.5. $\mathbb{F}$ *bir cisim ve* p *asal sayı olmak üzere* $char(\mathbb{F}) = p > 0$ *ise bu durumda* $g \in GL_n(\mathbb{F})$ *unipotent olması için gerek ve yeter şart bir* $n \in \mathbb{Z}^+$ *için* $g^{p^n} = I$ *olmasıdır.*

Kanıt. $\mathbb{F}$ bir cisim ve p asal sayı olmak üzere $char(\mathbb{F}) = p > 0$ olsun.

$(\Longrightarrow)$: $g \in GL_n(\mathbb{F})$ unipotent olduğunu varsayalım. O halde tanım gereği $g-I$ nilpotenttir. Yani bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $(g-I)^k = 0$ olur. Şimdi $p^n \geq k$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ seçelim. Bu durumda $(g-I)^{p^n} = 0$ olur ve $char(\mathbb{F}) = p$ olduğu için de g, $(x-1)^{p^n} = x^{p^n} - 1 = 0$ denklemini sağlar. O zaman $g^{p^n} - I = 0$ olmalıdır. Yani $g^{p^n} = I$ olur.

$(\Longleftarrow)$: Şimdi ise $g \in GL_n(\mathbb{F})$ olmak üzere bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $g^{p^n} = I$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $g^{p^n} - I = 0$ olur ve g, $x^{p^n} - 1 = 0$ denklemini sağlar. O halde $char(\mathbb{F}) = p$ olduğu için $x^{p^n} - 1 = (x-1)^{p^n} = 0$ olur. Yani $(g-I)^{p^n} = 0$ elde ederiz. Bu durum ise $g-I$'nın nilpotent olduğunu gösterir. O zaman $r \in \mathbb{F}^{n\times n}$ için $g - I = r$ yazabiliriz. Sonuç olarak $g = I + r$ ve g unipotent olur. □

Lemma 4.6. $\mathbb{F}$ *bir cisim olmak üzere* $id \neq g \in GL_n(\mathbb{F})$ *olsun. Her* $k \in \mathbb{Z}^+$ *için* g*'nin* $GL_n(\mathbb{F})$*'de* g^k*'ya eşlenik olduğunu varsayalım. O zaman* g *unipotent olur. Ayrıca,* $char(\mathbb{F}) = 0$ *elde edilir.*

Kanıt. Öncelikle genelliği kaybetmeden $\mathbb{F}$ cisminin cebirsel kapalı olduğunu varsayalım. Böylece $GL_n(\overline{\mathbb{F}})$ üzerinde çalışabiliriz. Şimdi λ, g'nin özdeğeri olsun. Bu durumda g terslenebilir olduğu için λ özdeğeri sıfırdan farklı olmalıdır.

Lemma varsayımımızı kullanırsak her pozitif k tamsayısı için λ^k, g^k'nın özdeğeri olur ve g, g^k'ya eşlenik olduğu için λ^k, g'nin de özdeğeri olmalıdır. Bu durum ise $\lambda^{m_\lambda} = 1$ olacak şekilde bir m_λ'nın varlığını gerektirir. Şimdi, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$

g'nin farklı özdeğerleri olsun ve $m := m_{\lambda_1} \cdot m_{\lambda_2} \cdots m_{\lambda_k}$ şeklinde seçelim. Bu durumda, g^m'nin tüm özdeğerleri $\{\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_k^m\} = \{1\}$ olur. Öte yandan g^m de g'ye eşleniktir. Yani g'nin tek özdeğeri 1 olmalıdır. Demek ki g unipotenttir. Şimdi g'nin mertebesine k diyelim. Bu durumda $g^k = id$ olur. Fakat aynı zamanda biliyoruz ki g, g^k'ya eşlenik ve $g \neq id$'dir. Böylece çelişki elde ederiz ve $|g| = \infty$ olur. Bu durumda, g unipotent olduğu için p asal sayı olmak üzere eğer $char(\mathbb{F}) = p \neq 0$ ise Lemma 4.5 gereği bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $g^{p^n} = id$ olmalıdır yani $|g| \mid p^n$. Fakat $|g| = \infty$ olduğu için $char(\mathbb{F}) = 0$ olmak zorundadır. □

Teorem 4.7. *G lineer bir grup, D eşlenik alma altında kapalı ve G'yi üreten G'deki involüsyonların kümesi olsun. Eğer her $c, d \in D$ için $o(cd)$ tekse G çözülebilir ve periyodik bir grup olur.*

Kanıt. Kanıt için [6]'da yer alan Teorem 1.1.'in özel bir durumu olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıntılı olarak [6]'ya bakılabilir. □

Teorem 4.8. *Y, $GL_n(\mathbb{F})$'deki $n \times n$'lik değişmeli köşegenleştirilebilir matrislerden oluşan bir küme olsun. O zaman öyle bir tersinir $P \in GL_n(\mathbb{F})$ matrisi vardır ki her $A \in Y$ için $P^{-1}AP$ köşegen matris olur.*

Kanıt. Kanıt için [7]'de Bölüm 6.5. Teorem 8'e bakılabilir. □

Teorem 4.9. *$\mathbb{F}$ bir cisim ve $G \leq GL_n(\mathbb{F})$ olsun. Bu durumda p, q asal olmak üzere $char(\mathbb{F}) = q \neq p$ ise G grubunda sonsuz elementer abelyan p-grup olamaz.*

Kanıt. $A \leq G$ maksimal elementer abelyan p-grup olsun. $a \in A \setminus \{id\}$ alalım. Bu durumda $o(a) = p$ olur.

İddia. $a \in A \leq G \leq GL_n(\mathbb{F})$ köşegenleştirilebilirdir.

İddia'nın Kanıtı. Öncelikle $a^p = I$ olduğu için a, $x^p - 1 = 0$ denklemini sağlar. O halde $\delta_a(x)$, a'nın minimal polinomu olmak üzere $\delta_a(x) \mid x^p - 1 = f(x)$ olur. Bu durumda $f'(x) = px^{p-1}$ olmak üzere $(f(x), f'(x)) = (x^p - 1, px^{p-1}) = 1$ olmalıdır. Yani f'de katlı kök yoktur. $\delta_a(x) \mid f(x)$ olduğundan dolayı $\delta_a(x)$'de de katlı kök yoktur ve $a \in A$ köşegenleştirilebilirdir. $\diamond$

O zaman şimdi herhangi $a_1, a_2 \in A$ elemanlarını alırsak A grubu abelyan olduğu için $a_1a_2 = a_2a_1$ olur. Bu durumda Teorem 4.8 gereği A'daki her eleman aynı anda köşegenleştirilebilirdir. Yani öyle bir $g \in GL_n(\mathbb{F})$ vardır ki $g^{-1}Ag \leq \left\{ \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_n \end{bmatrix}_{n\times n} : b_i \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \right\}$ grubu köşegenleştirilebilir altgrup olur. Ayrıca $\begin{bmatrix} {b_1}^p & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & {b_n}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_n \end{bmatrix}^p = I$ olacaktır. Yani b_i'ler $x^p - 1 = 0$ denkleminin köküdür. Biliyoruz ki bu denklemin $\mathbb{F}$ üzerinde en fazla p tane kökü olabilir. Dolayısıyla $A \leq \left\{ \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_n \end{bmatrix}_{n\times n} : {b_i}^p = 1 \right\}$ ve $A \leq \bigoplus_n \mathbb{Z}_p$ olur. Yani A grubu sonsuz olamaz.

Not. Eğer $G = GL_n(\mathbb{F})$ ise yukarıdaki teoremin diğer yönü de sağlanır. Bunu göstermek için $char(\mathbb{F}) = p$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\bigoplus^{\infty} \mathbb{Z}_p \cong \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} : c \in \mathbb{F} \right\} \leq G$ olur. Yani G grubu sonsuz elementer abelyan p-grup içerir. $\square$

4.2 Cebirsel Gruplar

Tanım 4.10. k cebirsel kapalı bir cisim ve $n \geq 1$ olmak üzere k^n'deki sonlu tane polinomun ortak sıfırlarından oluşan kümeye k üzerinde *afin varyete* denir. Bu kümeyi V ile, polinomları $1 \leq i \leq t$ olmak üzere P_i ile gösterirsek $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n : P_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, P_t(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ olur.

Tanım 4.11. X bir afin varyete olsun. $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_k]$ olmak üzere eğer

$$\begin{aligned} f\colon X^k &\longrightarrow X^m \\ (x_1, \ldots, x_k) &\longmapsto (f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_k)) \end{aligned}$$

ise f'ye *morfizm* denir.

Tanım 4.12. G, hem k üzerinde bir afin varyete hem de bir grup olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \alpha\colon G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} \beta\colon G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonları morfizm ise G'ye k üzerinde *cebirsel grup* denir.

Örnek 4.13. k cebirsel kapalı cisim olmak üzere $SL_n(k)$ cebirsel bir gruptur. Çünkü determinant, matris çarpması ve matrisin adjointi polinomlarla verilebilir.

Tanım 4.14. k^n bir afin varyete olmak üzere kapalı kümeleri afin varyeteler olan topolojiye k^n üzerinde *Zariski topoloji* denir.

Teorem 4.15. *k cebirsel kapalı cisim olmak üzere her cebirsel grup k üzerinde lineerdir, dahası $GL_n(k)$'nın kapalı bir altgrubuna izomorfiktir.*

Kanıt. Kanıt için [8]'de Teorem 8.6.'ya bakılabilir. □

Tanım 4.16. Eğer bir afin varyete boş olmayan iki kapalı öz altkümenin birleşimi şeklinde yazılamıyorsa bu afin varyeteye *indirgenemez* denir.

G cebirsel grup olsun. G grubuna indirgenemez yerine *bağlantılı grup* denir.

Önerme 4.17. *G cebirsel grup ve G° da G'nin birim elemanını içeren en büyük indirgenemez bileşeni olsun. Bu durumda G°, G'nin sonlu indeksli bir normal altgrubu olur. Ayrıca G° grubunun kosetleri de indirgenemezdir.*

Kanıt. Kanıt için [8]'de 7.3.'e bakılabilir. $\square$

Teorem 4.18. *k cebirsel kapalı bir cisim olmak üzere G, k üzerinde cebirsel grup ve N, G'nin kapalı normal altgrubu olsun. Bu durumda $G/N = \{gN : g \in G\}$ cebirsel grup olur. Ayrıca G grubu bağlantılı ise G/N de bağlantılıdır.*

Kanıt. Kanıt için [2]'de Teorem 6.8'e bakılabilir. $\square$

Tanım 4.19. G cebirsel bir grup, X bir afin varyete olsun. f morfizmasını

$$f\colon G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto g \cdot x$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda f'ye *cebirsel etki* denir.

Bundan sonra cebirsel grupların etkisini cebirsel etki olarak kabul edeceğiz.

Lemma 4.20. *Bağlantılı grupların afin varyete üzerindeki cebirsel etkisi altında, tüm yörüngeler indirgenemezdir.*

Kanıt. G, X afin varyetesi üzerine etki eden bağlantılı bir grup olsun. $orb(x) = O \subseteq X$ yörüngesini ele alalım. Eğer O indirgenemez değilse o zaman kapalı öz altkümelerin birleşimidir. Yani $O = O_1 \sqcup \ldots \sqcup O_k$ şeklinde yazılabilir. Şimdi herhangi bir $x \in O_1$ alalım ve $1 \leq i \leq k$ olmak üzere

$A_i = \{g \in G : gx \in O_i\}$ şeklinde tanımlayalım. O zaman $G = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$ olur.

Şimdi ise

$$\theta \colon G \longrightarrow X$$
$$g \longmapsto gx$$

morfizmini tanımlayalım. Bu durumda $(A_i) = \theta^{-1}(O_i)$ olur. Ayrıca O_i'lerin her biri kapalı olduğu için A_i'lerin de her biri kapalı olmalıdır. O halde G grubu A_i kapalı altkümelerinin ayrık birleşimidir. Fakat G bağlantılı olduğu için $G = A_1$ olmalıdır. Böylece $O = O_1$ olur. Yani O yörüngesi indirgenemezdir. □

Tanım 4.21. G cebirsel bir grup olmak üzere G'nin unipotent elemanları normal altgrup oluşturur. Bu altgruba G'nin *unipotent radikali* denir.

$R_u(G)$, G'nin unipotent radikalini göstersin. O zaman $R_u(G) = \{I\}$ ise G'ye *indirgeyici grup* denir.

Gözlem 4.22. *$G/R_u(G)$ grubu indirgeyicidir.*

Örnek 4.23. $\mathbb{F}$ bir cisim, $n \geq 2$ ve $G = \{M \in \mathbb{F}^{n\times n} : M_{ij} = 0 \text{ eğer } i > j \text{ ise}\}$ olmak üzere $R_u(G) = \{M \in \mathbb{F}^{n\times n} : M_{ii} = 1 \text{ ve } M_{ij} = 0 \text{ eğer } i > j \text{ ise}\} \neq I$ olduğu için üst üçgensel matrislerden oluşan bir grup indirgeyici değildir.

Teorem 4.24. *A bağlantılı indirgeyici grup ve $B < A$ indirgeyici öz altgrup olsun. O zaman, A'da yoğun (B, B)-çift koseti yoktur.*

Kanıt. Kanıt için [3]'e bakılabilir. □

Teorem 4.25. *G cebirsel grubu, boş olmayan X afin varyetesi üzerine cebirsel etki etsin. O zaman her yörünge kapanışında açıktır.*

Kanıt. Kanıt için [8]'de 8.3.'e bakılabilir. □

Teorem 4.26. *G bağlantılı indirgeyici grup ve $s \in G$ köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda $C_G(s)$ indirgeyici olur.*

Kanıt. Kanıt için [11]'de Teorem 14.2'ye bakılabilir. □

Aşağıdaki teorem ile birlikte keskin 2-geçişli cebirsel gruplar sınıflandırılmıştır. Ayrıca, bu teoremi tezde kullanmayacağımız için kanıtsız olarak veriyoruz.

Teorem 4.27 ([10], Sonuç 3)**.** *G cebirsel grup olmak üzere eğer bir afin varyete üzerine keskin 2-geçişli etki ediyorsa bu etki standarttır.*

Kanıt. Kanıt için [10]'daki makaleye bakılabilir. □

Bölüm 5

Keskin 2-Geçişli Lineer Gruplar

Bu bölümde tezin temelini oluşturan [4] ve [6] makalelerinin ana teoremleri yer almaktadır.

5.1 Permütasyon Karakteristiği ve Cisim Karakteristiği 2'den Farklı Olan Keskin 2-Geçişli Lineer Gruplar

Biliyoruz ki bir G grubunun $X^k \setminus \Delta$ kümesi üzerine geçişli etki etmesi demek G grubunun X kümesi üzerine k-geçişli etki etmesi demektir. Bu bölümde ise k-geçişli etki koşulunu hafifletip G'nin *jenerik k-geçişli etkisi* tanımından bahsedeceğiz.

Tanım 5.1. G cebirsel grup, X afin varyete olmak üzere $\alpha : G \times X \to X$ cebirsel etki olsun. Bu durumda $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere eğer X^k üzerinde G'nin α^k etkisi açık ve yoğun bir yörünge içeriyorsa α'ya *jenerik k-geçişli etki* denir. Eğer α etkisi açık ve yoğun bir yörünge içermiyorsa α'ya jenerik 0-geçişli etki diyeceğiz.

α, jenerik k-geçişli cebirsel etki olmak üzere α etkisinin *jenerik geçişlilik de-*

recesi (jgd), $jgd(\alpha) = \max\{k : \alpha$ jenerik k-geçişli$\}$ şeklinde tanımlanır.
G cebirsel grubunun *jenerik geçişlilik derecesi* ise $jgd(G) = \max\{jgd(\alpha) : \alpha$ G'nin cebirsel etkisi$\}$ şeklinde tanımlanır.

Lemma 5.2. *G bağlantılı cebirsel grup ve $i = 1, 2$ olmak üzere X_i indirgenemez afin varyete olsun. G'nin X_i üzerine etkisine α_i diyelim. $\varphi : X_1 \to X_2$ olmak üzere φ'nin örten morfizm ve $g \in G$, $x \in X_1$ için $g\varphi(x) = \varphi(gx)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $jgd(\alpha_1) \leq jgd(\alpha_2)$ olur.*

Kanıt. Kanıt için [13]'te Lemma 2'ye bakılabilir. □

Sonuç 5.3. *A bağlantılı cebirsel grup olmak üzere, $C < B < A$ olacak şekilde kapalı iki grup alırsak $jgd(A : A/C) \leq jgd(A : A/B)$ olur.*

Kanıt. A bağlantılı cebirsel grup ve $B < A$ olsun. O zaman $A \curvearrowright A/B$ geçişli olduğunu biliyoruz. Bu durumda $C < B$ için $A \curvearrowright A/C$ de geçişli olur. Şimdi

$$\begin{aligned} \varphi\colon A/C &\longrightarrow A/B \\ aC &\longmapsto aB \end{aligned}$$

şeklinde seçelim. Öncelikle φ iyi tanımlıdır. Çünkü $a_1, a_2 \in A$ olmak üzere $a_1C = a_2C$ olduğunu varsayalım. O zaman $C = a_1^{-1}a_2C$ ve $a_1^{-1}a_2 \in C$ olur. Aynı zamanda $C < B$ olduğu için $a_1^{-1}a_2 \in B$ olmalıdır. Buradan ise $B = a_1^{-1}a_2B$ ve $a_1B = a_2B$ olduğunu söyleyebiliriz. Yani $\varphi(a_1C) = \varphi(a_2C)$ elde ederiz. Lemma 5.2 gereği de $jgd(A : A/C) \leq jgd(A : A/B)$ olur. □

Bu bölümde ele alınan kapanışlar Zariski kapanışı olacaktır.

Teorem 5.4. *$B \leq A$ cebirsel gruplarının her ikisi de indirgeyici grup ise $jgd(A : A/B) = 1$ olur.*

Kanıt. Kanıtımızı yaparken $jgd(A : A/B) = 1$ olduğu sonucundan biraz daha fazlasını göstermiş olacağız. Yani aynı koşullar altında $A/B \times A/B$ kümesinde hiç açık yörünge bulamayacağımızı göstereceğiz. $A \curvearrowright A/B$ geçişli olduğu için $jgd(A : A/B) \geq 1$ olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi çelişki ile ispat etmek için B'nin $A/B \times A/B$ üzerine etki ettiğini ve O açık bir yörünge olmak üzere $O \subseteq A/B \times A/B$ olduğunu varsayalım.

İlk olarak Önerme 4.17 gereği $A^\circ \trianglelefteq A$ ve $B^\circ \trianglelefteq B$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca yine Önerme 4.17 gereği $[B : B^\circ] < \infty$ olduğu için her B-yörüngesi özellikle de ele aldığımız O açık yörüngesi, Lemma 2.5 gereği B° yörüngelerinin sonlu birleşimlerinden oluşur. Böylece B° yörüngelerinden en az biri, ki bu yörüngeye $a \in A$ olmak üzere $O_1 = B^\circ aB$ diyelim, açık olur. Bu durumda, B° bağlantılı olduğu için Lemma 4.20 gereği yörüngeleri indirgenemezdir. Bu yüzden $X = A^\circ aB^\circ$ olmak üzere, O_1 yörüngesi A/B'nin bağlantılı bileşeni olan $\overline{X} = A^\circ aB$ tarafından içerilir. Şimdi,

$$\begin{aligned} \phi\colon A/B^\circ &\longrightarrow A/B \\ aB^\circ &\longmapsto aB \end{aligned}$$

fonksiyonunu ele alalım ve bu fonksiyonu $X = A^\circ aB^\circ$ bağlantılı bileşenine kısıtlayalım. O zaman $[B : B^\circ] < \infty$ olduğundan dolayı $\phi : X \longrightarrow \overline{X}$ örtü fonksiyonu olur. Böylece, $O \doteq B^\circ aB^\circ = \phi^{-1}(O_1) \cap X$ kümesi X'te hala açıktır ve X bağlantılı olduğu için bu küme ayrıca yoğundur. Sonuç olarak $B^\circ aB^\circ$, A°'da açık yoğun çift koset olur. Bu durum ise Teorem 4.24 ile çelişir. $\square$

Önerme 5.5. *$G < GL_n(\mathbb{F})$ keskin 2-geçişli grup ve $pc(G) \neq 2$ olsun. G'nin aşikar olmayan abelyan normal bir altgrubu yoksa o zaman bir k cebirsel kapalı cismi ve $\rho : G \longrightarrow GL_n(k)$ birebir grup homomorfizması vardır ve $\overline{\rho(G)}$ indirgeyici olur.*

Kanıt. $\overline{\mathbb{F}}$, $\mathbb{F}$'nin cebirsel kapanışı olmak üzere $GL_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\overline{\mathbb{F}})$ ve $\rho_0 : G \longrightarrow GL_n(\overline{\mathbb{F}})$ birebir grup homomorfizması olsun. $\overline{\rho_0(G)}$ Zariski kapanışı ve R de bu kapanışın unipotent radikali olsun. $N = \rho_0(G) \cap R$ olsun. Bu durumda Lemma 4.4 gereği R nilpotenttir ve buradan N de nilpotent olur. N nilpotent olduğu için, eğer aşikar değilse N'nin alt merkezi serisinin sondan bir önceki elemanı $\rho(G)$'nin abelyan normal altgrubu olur. Bu durum ise varsayımımız ile çelişir. Buradan anlaşılacağı üzere $N = \{id\}$ olmalıdır. O zaman tanım gereği $R \trianglelefteq \overline{\rho_0(G)}$ olduğu için $R\rho_0(G) \leq \overline{\rho_0(G)}$ olur. Böylece $R\rho_0(G)/R \leq \overline{\rho_0(G)}/R$ olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi $R\rho_0(G)/R$ indirgeyici ve $\overline{\rho_0(G)}/R$ cebirsel grubu da Teorem 4.15 gereği lineer olduğu için $\overline{\rho(G)}$ Zariski kapanışını indirgeyici yapan yeni bir ρ birebir grup homomorfizması bulabiliriz. □

Önerme 5.6. *$G < GL_n(\mathbb{F})$ keskin 2-geçişli bir grup olmak üzere $char(\mathbb{F}) \neq 2$ ve $pc(G) \neq 2$ olsun. k, $\mathbb{F}$'nin cebirsel kapanışı; $S < GL_n(k)$, G'nin Zariski kapanışı; $stab_G(x) = H$ olmak üzere $T < GL_n(k)$, H'nin Zariski kapanışı ve i, H'deki tek involüsyon olsun. Bu durumda*

(a) $T \leq C_S(i)$,

(b) i köşegenleştirilebilir,

(c) $jgd(S : S/T) \geq 2$

olur.

Kanıt. (a) Lemma 3.9'dan dolayı i, H'deki tek involüsyondur. O zaman Lemma 3.21 gereği $H = C_G(i)$ olur. Buradan $C_G(i) \leq C_S(i)$ olacağı için ve $C_S(i)$ kapalı olduğu için $T \leq C_S(i)$ elde ederiz.

(b) Ayrıca, $char(k) = char(\mathbb{F}) \neq 2$ olduğu için $i \in H$ köşegenleştirilebilirdir. Çünkü i involüsyonunu $A \in GL_n(k)$ matrisi olarak ele alırsak $A^2 = I$ olur. Buradan $A^2 - I = 0$ olacağı için A matrisi $x^2 - 1 = 0$ denklemini sağlar. $\delta_A(x)$, A'nın minimal polinomu olmak üzere $\delta_A(x) \mid x^2 - 1$ olur. O zaman $\delta_A(x) = x + 1$ veya $x - 1$ veya $x^2 - 1$ olmalıdır. $\delta_A(x) = x + 1$ ise $A = -I$ olur ve köşegenleştirilebilirdir. $\delta_A(x) = x - 1$ ise $A = I$ olur ve A involüsyon olmaz. Son olarak $\delta_A(x) = x^2 - 1$ ise A yine köşegenleştirilebilirdir.

(c) Şimdi ise S'nin jenerik 2-geçişli olduğunu göstermek için bir $g \in G \setminus H$ seçelim.

İddia. $O = orb_S(T, gT) \subseteq S/T \times S/T$ açık ve yoğun bir yörüngedir.

İddia'nın Kanıtı. Teorem 4.25 gereği O'nun $S/T \times S/T$'de yoğun olduğunu göstermek yeterlidir. O zaman, $G = H \sqcup HgH$ olarak yazalım. Her iki tarafın Zariski kapanışını alırsak $S = \overline{G} = \overline{H} \sqcup \overline{HgH} \gneqq T \sqcup TgT$'dir. Buradan, $GT = (H \sqcup HgH)T = T \sqcup HgT$ olduğundan $G \leq GT = T \sqcup HgT \leq T \sqcup TgT$ olur. G grubu $\overline{G} = S$'de yoğun olduğu için $T \sqcup TgT$ kümesi de S'de yoğun olur.

$T \sqcup TgT$ kümesi yine Teorem 4.25 gereği kapanışında açık olmalıdır. Yani bu durumda $T \sqcup TgT$ kapanışı olan S'de açık olur. T tanım gereği kapalıdır. Bu yüzden TgT, S'de açık olur.

Şimdi,

$$\begin{aligned} \pi \colon S/T \times S/T &\longrightarrow S/T \\ (aT, bT) &\longmapsto aT \end{aligned}$$

ilk bileşene göre izdüşüm fonksiyonu olsun. Bu durumda, $orb_S(T, gT) = \{(aT, agT) : a \in S\}$ ve $\pi^{-1}(T) = \{T\} \times S/T$ olur. O zaman kesişimleri de $\{(aT, agT) : a \in T\} = \{(T, TgT)\} = \{T\} \times TgT$ olur. Böylece, yukarıdaki iki paragraftan dolayı $\{T\} \times TgT$ kümesi, $\{T\} \times S/T = \pi^{-1}(T)$'de açık ve yoğun olmalıdır. $S \curvearrowright S/T$ geçişli olduğu için O, her $g \in S$ için her $\pi^{-1}(gT)$'de açık ve yoğundur. Bu durumda O yörüngesi, $\bigcup \pi^{-1}(gT) \subseteq S/T \times S/T$ kümesinde yoğun olur. Yani S'nin S/T üzerine etkisi jenerik 2-geçişlidir. Bu da iddiamızı ispatlar ve kanıtımızı bitirir. $\square$

Teorem 5.7. *$G \leq GL_n(\mathbb{F})$ keskin 2-geçişli grup, $char(\mathbb{F}) \neq 2$ ve $pc(G) \neq 2$ olsun. Bu durumda aşikar olmayan abelyan normal bir $N \trianglelefteq G$ altgrubu vardır.*

Kanıt. Bu teoremi çelişki ile ispat edelim. Varsayalım ki G grubunun aşikar olmayan abelyan normal bir altgrubu olmasın. O zaman, Önerme 5.5 gereği k cebirsel kapalı bir cisim olmak üzere $G < GL_n(k)$ olduğunu varsayıp $\overline{G} = S$ Zariski kapanışının indirgeyici olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi, H keskin 2-geçişli etkide bir noktanın sabitleyicisi olsun. $\overline{H} = T$ ve $i \in H$ de H'deki tek involüsyon olsun. $pc(G) \neq 2$ olduğunu kabul ettiğimiz için böyle bir involüsyonun var olduğunu biliyoruz. Önerme 5.6'dan dolayı, $S \curvearrowright S/T$ üzerine jenerik 2-geçişli etkisi vardır. $C_S(i) = \mathcal{C}$ olarak yazarsak Sonuç 5.3 gereği, $jgd(S : S/\mathcal{C}) \geq jgd(S : S/T) \geq 2$ olur. Önerme 5.6'daki cisim üzerine olan karakteristik varsayımını kullandığımızda ise i'nin köşegenleştirilebilir olduğunu ve böylece Teorem 4.26 gereği $C_S(i) = \mathcal{C}$'nin de indirgeyici olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda ise Teorem 5.4 gereği $jgd(S : S/\mathcal{C}) = 1$ olacağı için çelişki elde ederiz ve kanıtımız tamamlanır. $\square$

Teorem 5.8. *$\mathbb{F}$ bir cisim ve $G \leq GL_n(\mathbb{F})$ keskin 2-geçişli bir grup olsun. $char(\mathbb{F}) \neq 2$ ve $pc(G) \neq 2$ olsun. Bu durumda K yakın-cisim olmak üzere $G \cong K^\times \ltimes K$ olur.*

Kanıt. Teorem 5.7 gereği G'nin aşikar olmayan abelyan normal bir $N \trianglelefteq G$ altgrubu olduğunu biliyoruz. Bu durumda, Teorem 3.26'yı uygularsak kanıtımız tamamlanır. $\square$

5.2 Permütasyon Karakteristiği 2'den Farklı Olan Keskin 2-Geçişli Lineer Gruplar

Bu bölümde bir önceki bölümden farklı olarak cisim karakteristiğinin 2 olduğu durumlar da dahil olmak üzere yeni bir kanıt verilerek keskin 2-geçişli lineer gruplar incelenmiştir.

Önerme 5.9. *$G \leq GL_n(\mathbb{F})$ keskin 2-geçişli (sonsuz) bir grup ve $pc(G) = 0$ olsun. O zaman $char(\mathbb{F}) = 0$ olur ve G aşikar olmayan abelyan normal bir altgrup içerir.*

Kanıt. Öncelikle $pc(G) = 0$ olduğu için H'de involüsyon vardır ve Lemma 3.13 gereği de biliyoruz ki I^2, G'de eşlenik sınıfıdır. O zaman Önerme 3.14 gereği her $g \in I^2$ ve her $k \geq 1$ tamsayısı için $g^k \in I^2$ olur. Yani g, g^k'ya eşleniktir. Bu durumda Lemma 4.6 gereği $char(\mathbb{F}) = 0$ olur ve Teorem 5.7 gereği de G'nin aşikar olmayan abelyan normal bir altgrubu vardır. □

Lemma 5.10. *G en az üç elemanlı bir kümeye etki eden keskin 2-geçişli bir grup, p tek asal sayı ve $pc(G) = p$ olmak üzere G'deki her üç involüsyon sonlu bir grup üretir.*

Kanıt. İlk olarak $E \subset I$ üç involüsyondan oluşan bir küme olsun. $L = \langle E \rangle$ diyelim. Bu durumda $pc(G) = p$ olduğundan dolayı $L^{-1}EL$, birbirinden farklı $c, d \in L^{-1}EL$ için $o(cd) = p$ olacak şekilde L'deki involüsyonların bir eşlenik sınıfı olur. Şimdi eğer L lineer ise Teorem 4.7 gereği L çözülebilir ve ayrıca periyodik olur. Böylece L çözülebilir, periyodik ve üç üreteçli olduğu için Teorem 2.15 gereği L sonlu olur. □

Teorem 5.11 ([12], Teorem 1, (2))**.** *G, X kümesi üzerine etki eden keskin 2-geçişli bir grup olsun. G'deki her üç involüsyonun G'de sonlu bir altgrup ürettiğini varsayalım. O zaman G grubunun etkisi standarttır.*

Kanıt. Yukarıdaki varsayımlar altında aslında $pc(G) > 0$ olduğunu göz önünde bulunduralım. Fakat burada p tek asal sayı olmak üzere sadece ihtiyacımız olan $pc(G) = p$ olması durumuyla ilgileneceğiz.

O zaman p tek asal sayı olmak üzere $pc(G) = p$ olduğunu varsayalım. Rastgele bir $0 \in X$ alalım ve $stab(0)$'daki tek involüsyona da t diyelim. G'deki involüsyonların kümesini I ile gösterdiğimizi hatırlayalım.

Şimdi eğer tI'nın çarpma altında kapalı olduğunu gösterebilirsek kanıtımızı tamamlayabiliriz. İlk olarak rastgele $i, j \in I$ alalım. Göstermek istediğimiz $titj \in tI$ olduğudur. $U = \langle t, i, j \rangle$ olsun. U'nun sonlu bir altgrup olduğunu biliyoruz. Bu durumda $U_0 = stab_U(0)$ Frobenius tümleyeni olmak üzere U'nun bir Frobenius grup olduğunu gösterelim. Şimdi bir $u \in U$ için $u^{-1}U_0u(u^{-1}(0)) = u^{-1}(0)$ olur ve $u^{-1}U_0u \cap U_0$ kümesi, $u^{-1}(0)$ ile 0'ı sabitler. Eğer $u^{-1}U_0u \cap U_0 \neq \{id\}$ ise $u^{-1}(0) = 0$ olur. Ayrıca $u^{-1}(0) = 0$ ise $u(0) = 0$ olacağı için $u \in U_0$ olur. Yani gerçekten de U bir Frobenius gruptur. O zaman buradan U sonlu Frobenius grup olduğu için Teorem 2.18 gereği $M \setminus \{id\} = U \setminus \big(\bigcup_{u \in U} u^{-1}U_0u \big)$ olmak üzere $U = U_0 \ltimes M$ olur. Yukarıda belirttiğimiz üzere t, $stab(0)$'daki tek involüsyondur. Yani U_0 involüsyon içerir ve mertebesi çifttir. Ayrıca, Teorem 2.19 gereği de M abelyan olmalıdır.

Biliyoruz ki $tI \subseteq I^2 \subseteq F$'de de yer alıyor. O zaman bu durumda tI sabit nokta içermeyeceği için ti ve tj M'de olmalıdır ve bu yüzden yer değiştirmelidir.

Şimdi t ile eşlenik almanın tI'nın elemanlarını ters çevirdiğini söyleyebiliriz. Çünkü $a \in I$ için herhangi bir $ta \in tI$ alalım. Bu durumda $t^{-1}(ta)t = at = a^{-1}t^{-1} = (ta)^{-1}$ olur. Ayrıca, eğer t herhangi bir x elemanını ters çevirirse yani $txt = x^{-1}$ ise o zaman $tx = x^{-1}t^{-1} = (tx)^{-1}$ olur. Böylece $tx \in I \cup \{id\}$ olur. Bu da $x = t$ veya $x \in tI$ demektir. O zaman $titj$'yi t ile sağdan ve soldan çarparsak ve elemanların yer değiştirmesini kullanırsak

$t(titj)t = itjt = jtit = (titj)^{-1}$ elde ederiz. Buradan $titj \in tI$ olduğunu görürüz ve tI'nın çarpma altında kapalı olduğu sonucuna ulaşırız.

Son olarak, $ij \in I^2$ alırsak doğal olarak $(ij)^{-1} = j^{-1}i^{-1} = ji \in I^2$ olur ve I^2'nin ters alma altında kapalı olduğunu görebiliriz. Ayrıca, tI'nın çarpma altında kapalı olduğunu bildiğimizden dolayı herhangi bir $ij \in I$ için $ij = (tt)i(tt)j = t(tit)tj = ti^t tj = tI$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece $tI = I^2$ olur ve I^2 normal altgrup olduğu için de Teorem 3.26 gereği kanıtımız tamamlanır.

□

Teorem 5.12. $\mathbb{F}$ *bir cisim,* $G \leq GL_n(\mathbb{F})$ *keskin 2-geçişli sonsuz bir grup ve* $pc(G) \neq 2$ *olsun. Bu durumda* G *grubunun etkisi standart olur.*

Kanıt. Öncelikle $pc(G) = 0$ ve G lineer grup olsun. Bu durumda, Önerme 5.9 gereği teorem sağlanır.

Şimdi ise $pc(G) = p > 2$ asal sayı olsun. G'deki her üç involüsyonun sonlu bir grup ürettiğini Lemma 5.10 gereği biliyoruz. Bu durumda, Teorem 5.11 sayesinde teorem sağlanır.

Sonuç olarak her iki durumda da G'nin aşikar olmayan abelyan normal bir altgrubu vardır ve G grubunun etkisi standart olur. □

Not. Yukarıdaki teorem $pc(G) = 2$ olduğu durumda geçersizdir. Karşıt örnek için [5]'e bakılabilir.

Sonuç 5.13. $G \leq GL_n(\mathbb{F})$ *keskin 2-geçişli sonsuz bir grup ve* $pc(G) \neq 2$ *olsun. O zaman* $pc(G) = char(\mathbb{F})$ *olur.*

Kanıt. İlk olarak $pc(G) = 0$ ise Önerme 5.9 gereği $char(\mathbb{F}) = 0$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $pc(G) = p > 2$ asal sayı olsun. O zaman Teorem 5.12 gereği $\{id\} \neq N \trianglelefteq G$ abelyan olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda Teorem 3.23

sayesinde N, sonsuz elementer abelyan p-grup olduğu için Teorem 4.9 gereği de $char(\mathbb{F}) = pc(G) = p$ olmak zorundadır. Aksi halde, G grubu sonsuz elementer abelyan p-grup içeremezdi. $\square$

Not. Yukarıdaki sonuç $pc(G) = 2$ olduğu durumda geçersiz olur. Çünkü $G \leq SL_3(\mathbb{R})$ ve $pc(G) = 2$ olan karşıt örnek [5]'te inşa edilmiştir. Örnekte $char(\mathbb{R}) = 0$ olduğu için $char(\mathbb{R}) \neq pc(G)$ olduğunu görürüz.

Kaynakça

[1] André, S. ve Tent, K. (2021). *Simple Sharply 2-Transitive Groups*, https://arxiv.org/pdf/2111.09580.pdf

[2] Borel, A. (1991). *Linear Algebraic Groups*, Second Enlarged Edition, Springer.

[3] Brundan, J. (1995). *Double Coset Density in Reductive Algebraic Groups*, Journal of Algebra, Cilt 177, Sayı 3, 755-767.

[4] Glasner, Y. ve Gulko, D. D. (2014). *Sharply 2-Transitive Linear Groups*, International Mathematics Research Notices, Cilt 2014, Sayı 10, 2691-2701.

[5] Glasner, Y. ve Gulko, D. D. (2021). *Non-split Linear Sharply 2-Transitive Groups*, Proceedings of the American Mathematical Society, Cilt 149, Sayı 6, 2305-2317.

[6] Glauberman, G., Mann, A. ve Segev, Y. (2015). *A Note on Groups Generated by Involutions and Sharply 2-Transitive Groups*, Proceedings of the American Mathematical Society, Cilt 143, Sayı 5, 1925-1932.

[7] Hoffman, K. ve Kunze, R. (1971). *Linear Algebra*, Second Edition, Prentice-Hall.

[8] Humphreys, J. E. (1981). *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag.

[9] Isaacs, I. M. (1976). *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press.

[10] Knop, F. (1983). *Mehrfach Transitive Operationen Algebraischer Gruppen*, Archiv der Mathematik, Cilt 41, 438-446.

[11] Malle, G. ve Testerman, D. (2011). *Linear Algebraic Groups and Finite Groups of Lie Type*, Cambridge University Press.

[12] Mazurov, V. D. (1997). *On Sharply 2-Transitive Groups* [translation of Proceedings of the Institute of Mathematics, 30 (Russian), 114–118, Izdat. Ross. Akad. Nauk, Sibirsk. Otdel., Inst. Mat., Novosibirsk, 1996], Siberian Advances in Mathematics, no. 3, 91–97.

[13] Popov, V. L. (2007). *Generically Multiple Transitive Algebraic Group Actions*, Algebraic Groups and Homogeneous Spaces, Narosa Publ. House, Cilt 19, Bölüm 17, 481-523. https://arxiv.org/pdf/math/0409024.pdf

[14] Rips, E., Segev, Y. ve Tent, K. (2017). *A Sharply 2-Transitive Group Without a Non-Trivial Abelian Normal Subgroup*, Journal of the European Mathematical Society 19, no. 10, 2895–2910.

[15] Rips, E. ve Tent, K. (2019). *Sharply 2-Transitive Groups in Characteristic 0*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 750, 227–238. https://arxiv.org/pdf/1604.00573.pdf

[16] Robinson, D.J.S. (1996). *A Course in the Theory of Groups*, Second Edition, Springer-Verlag.

[17] Tent, K. (2016). *Infinite Sharply Multiply Transitive Groups*, Jahresber. Dtsch. Math., Ver. 118, 75–85.

[18] Türkelli, S. (2004). *Splitting of Sharply 2-Transitive Groups of Characteristic 3*, Turkish J. Math, Cilt 28, Sayı 3, 295-298.