T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİMİT GRUPLARIN MODEL TEORİ İLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KAAN DOĞANAY

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Matematik

Tez Danışmanı: PROF. DR. AYŞE BERKMAN
İkinci Danışman: PROF. DR. DAVID PIERCE

Haziran 2022

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİMİT GRUPLARIN MODEL TEORİ İLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KAAN DOĞANAY

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Matematik

Tez Danışmanı: PROF. DR. AYŞE BERKMAN
İkinci Danışman: PROF. DR. DAVID PIERCE

Haziran 2022

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü tez yazım klavuzuna uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ücret karşılığı başka kişilere yazdırmadığımı (dikte etme dışında), uygulamalarımı yaptırmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca bana rehberlik eden, iyi bir insan, iyi bir akademisyen ve iyi bir matematikçi olmanın ne olduğunu hayata karşı duruşları ve yapıp ettikleriyle öğreten değerli hocalarım Prof. Dr. Ayşe Berkman'a ve Prof. Dr. David Pierce'a bu süreçte bana verdikleri emek, gösterdikleri sabır için ve her düştüğümde beni yerden kaldırdıkları için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez jürisinde bulunmayı kabul eden Dr. Öğr. Üyesi Fatma Altunbulak Aksu ve Doç. Dr. Özlem Beyarslan'a teşekkür ederim.

Bu süreçte beni hep destekledikleri ve yanımda oldukları için aileme çok teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Yüksek lisans öğrenimim boyunca verdikleri maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

LİMİT GRUPLARIN MODEL TEORİ İLE İNCELENMESİ

ÖZET

Bu tezde limit gruparın cebirsel özellikleri incelenmiş, limit gruplar için çeşitli karakterizasyonlar gösterilmiş ve bu cebirsel özelliklerden ve karakterizasyonlardan yararlanılarak limit grup örnekleri verilmiştir. Limit grupların burulmasız, değişmesi geçişli ve CSA olma özellikleri incelenen cebirsel özelliklerin en önemlileridir. Gösterilen karakterizasyonlardan ilki sonlu üreteçli limit grupların tamamen artık serbest gruplara denk olduğudur. Bir diğer karakterizasyonda ise sonlu üreteçli abelyan olmayan limit grupların, abelyan olmayan serbest grupların evrensel teorisi ile aynı evrensel teoriye sahip olduğu kanıtlanmıştır. Gösterilen üçüncü karakterizasyon ise F_2 serbest grubunun ultragücünün sonlu üreteçli altgruplarının limit grup olduğu ve tüm limit grupların F_2 grubunun ultragücünün sonlu üreteçli altgrupları olarak görülebileceği olmuştur.

Anahtar Kelimeler : Limit gruplar, Tamamen artık serbest gruplar, Evrensel teori

A MODEL THEORETIC APPROACH TO LIMIT GROUPS

ABSTRACT

In this thesis, we examine the algebraic properties of limit groups; we explain various characterizations for limit groups; and, by using these algebraic properties and characterizations, we give examples of limit groups. The examined properties of limit groups are being torsion-free, commutative transitive, and CSA. The first of the characterizations that we give is that the finitely generated limit groups are precisely the fully residually free groups. In another characterization, we prove that finitely generated non-abelian limit groups have the same universal theory as the non-abelian free groups. The third characterization is that every finitely generated subgroup of an ultrapower of the free group F_2 is a limit group, and every limit group can be obtained in this way.

Key Words : Limit groups, Fully residually free groups, Universal theory

İçindekiler

Bölüm 1

Giriş

Alfred Tarski'nin 1945 yılında sorduğu abelyan olmayan serbest grupların elementer teorilerinin aynı olup olmadığı sorusu bu yüzyılın başında Zlil Sela ve ayrıca Kharlampovich ve Myasnikov tarafından birbirinden bağımsız çalışmalarla olumlu olarak cevaplandı. Zlil Sela'nın bu soruyu ve daha fazlasını cevaplayan makaleler dizisinin ilki olan [12] makalesinde limit gruplar tanımlanmış ve limit grupların abelyan olmayan serbest grupların evrensel teorisinin bir modeli olduğu gösterilmiştir.

Christophe Champetier ve Vincent Guirardel [4] makalesinde limit gruplar için Grigorchuk tarafından 1980'lerde tanımlanan işaretli gruplar uzayında Sela'nın tanımına denk olan başka bir tanım yaparak limit grupları incelemek için farklı bir bakış açısı ve çeşitli yöntemler geliştirmişlerdir. Bu tezde [4] makalesi temel kaynak olarak kullanılarak limit grupların cebirsel özelliklerini incelemek, çeşitli limit grup örnekleri vermek ve limit grup olmaya denk karakterizasyonlar vermek amaçlanmıştır.

Limit gruplar işaretli gruplar uzayında serbest gruplar dizilerinin limiti olarak tanımlanmıştır. İncelenen önemli cebirsel özellikleri limit grupların burulmasız, değişmesi geçişli, CSA olması ve limit grupların alt gruplarının yine limit grup olması olarak sıralanabilir.

Limit grupların ilk örnekleri olarak serbest gruplar verilmiştir. Ardından Bass-Serre teorisi, grupların birleştirilmiş çarpımı ve HNN genişlemesi kullanılarak limit grupların merkezleyicisi ile serbest genişlemesinin ve limit grupların basit çizgesinin yine limit grup olduğu gösterilmiştir.

Sonlu üreteçli limit grupların karakterizasyonları model teori kullanılarak yapılan karakterizasyonlar ve cebirsel karakterizasyonlar olarak iki başlıkta incelenmiştir. Bu karakterizasyonlardan ilki sonlu üreteçli limit grupların tamamen artık serbest gruplara denk olduğunu kanıtladığımız cebirsel karakterizasyondur. Abelyan olmayan sonlu üreteçli limit grupların evrensel teorisinin abelyan olmayan serbest grupların evrensel teorisi ile aynı olduğu gösterilen karakterizasyonlardan bir diğeridir. Gösterilen bir başka karakterizasyon ise sonlu üreteçli bir limit grup olmanın gerek ve yeter koşulunun F_2 grubunun ultragücünün sonlu üreteçli altgruplarından biri olmak olduğudur.

Bölüm 2

Model Teori

Bu bölümde model teorinin bazı temel tanımlarını vereceğiz, ultrafiltre ve ultraçarpımların temel teoremlerini kanıtlayacağız. Bu bölüm [10] ve [2] kaynaklarından yararlanılarak oluşturulmuştur.

Öncelikle model teorinin temel kavramları olan dilin ve yapının ne olduğunu tanımlayarak başlayalım.

Tanım. Bir $\mathcal{L} = (F, R, C)$ dizisi F fonksiyonlar sembolleri kümesinden, R ilişki sembolleri kümesinden ve C sabit sembolleri kümesinden oluşan bir semboller dizisidir. Öyle ki $f \in F$ için değişken sayısını belirten n_f derecesi ve her bir $r \in R$ ilişkisi için kaçlı ilişki olduğunu belirten n_r derecesi vardır.

Derecesi 1 olan ilişki yerine tekli ilişki ve derecesi iki olan ilişki yerine ikili ilişki denilmektedir. İlk dil örneği olarak hiçbir fonksiyon sembolü, ilişki sembolü ve sabit sembolü içermeyen boş dili düşünebiliriz. Boş dil dışında örnekler vermek istersek,

(1) $\mathcal{L}_O = \{<\}$ sıralamanın dili,

(2) $\mathcal{L}_G = \{\cdot, ^{-1}, e\}$ grupların dili,

(3) $\mathcal{L}_R = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ halkaların dili,

(4) $\mathcal{L}_{OR} = \mathcal{L}_O \cup \mathcal{L}_R$ sıralı halkaların dili

akla gelen ilk örneklerdir. Bu verdiğimiz örneklerde $<$ bir ikili ilişki sembolü, $^{-1}$ ve $-$ bir tekli fonksiyon sembolleri, $+$ ve $\cdot$ ise ikili fonksiyon sembolleridir. e, 0 ve 1 ise sabit sembolleridir.

Dillerin, sadece sembollerden oluşan kümeler oldukları için, tek başlarına bir anlam ifade etmedikleri söylenebilir. Ancak dil matematiksel bir yapı içinde anlam kazanır ve esasında dil matematiksel yapıların doğasını belirler. Bahsettiğimiz yapı kavramının matematiksel tanımını yapalım.

Tanım. $\mathcal{L}$ bir dil olsun. $\mathcal{M} = (M, F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$ bir $\mathcal{L}$-yapısıdır. Öyle ki

(1) M boş olmayan bir kümedir,

(2) Her bir $f \in F$ fonksiyon sembolü için bir $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \to M$ fonksiyonu,

(3) Her bir $r \in R$ ilişki sembolü bir $r^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_r}$ ilişkisi,

(4) Her bir $c \in C$ sabit sembolü bir $c^{\mathcal{M}} \in M$ sabiti

vardır.

Örneğin dil olarak $\mathcal{L}_G$ grupların dilini alalım. Bir G kümesi ile birlikte $\mathbb{G} = (G, \cdot^{\mathbb{G}}, e^{\mathbb{G}})$, $\cdot^{\mathbb{G}}$ ikili fonksiyonu ve $e^{\mathbb{G}}$ sabiti ile bir $\mathcal{L}_G$-yapısıdır.

Bizler dilleri kullanarak yapılar içinde doğru veya yanlış olan formüller yazmak istiyoruz. Bu cümleler, yapının içerdiği $\mathcal{L}$ dilinin sembollerini, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ gibi değişkenlerden, $\vee$(veya), $\wedge$(ve), $\neg$(değil) bağlaçlarından, $\exists$ ve $\forall$ niceleyicilerinden, $=$ eşittir sembolünden ve () parantezlerden oluşur. Cümleleri yazmak için terimlere ihtiyaç duyarız. Terimler, yapının kümesinin elemanları, dilin ilişki sembolü olmayan sembolleri ile oluşur. Örneğin yukarıda tanımladığımız $\mathbb{G}$ yapısında x_1, $(x_1 \cdot x_2)$ ya da $(x_1 \cdot x_2^{-1})$ birer terimdir. $\mathcal{T}$ ile bir $\mathcal{M}$ yapısındaki tüm terimlerin kümesini gösterelim. $\mathcal{T}$ kümesi tüm sabit elemanları, tüm değişken sembollerini ve bu değişken sembolleri ile yazılabilecek tüm fonksiyonları içerir. Şimdi bu terimler ile fonksiyonları tanımlayabiliriz.

Tanım. Atomik $\mathcal{L}$-formülleri kümesi $t_1, t_2, \dots, t_n$ terimler olmak üzere, $t_1 = t_2$ eşitliğinden ve $r \in R$ olmak üzere $r(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ilişkilerinden oluşur.

$\mathcal{L}$-formüller kümesi ise atomik formülleri içerir ve aşağıdaki özellikleri sağlar;

(1) Eğer ϕ bir formül ise $\neg\phi$ de bir formüldür.

(2) Eğer ϕ ve ψ birer formülse o halde $(\phi \vee \psi)$ ve $(\phi \wedge \psi)$ birer formüldürler.

(3) Eğer ϕ bir formül ise $\exists x_i \phi$ ve $\forall x_i \phi$ birer formüldür.

Örnek verecek olursak $\mathbb{G}$ grup yapısında $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 x_2 = x_3)$ ve $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 x_2 = e)$ birer formüldür. İlk formülde x_3 değişkenin niceleyicisi yoktur. Niceleyicisi olmayan değişkenlere serbest değişken denir. Her bir değişkenin niceleyicisinin olduğu formüllere ise cümle denir. Biz cümleler ile ilgileneceğiz. Eğer bir ϕ cümlesi $\mathcal{M}$ yapısı içinde doğru ise $\mathcal{M} \vDash \phi$ ile gösterilir. $\mathcal{M}$ yapısında doğru olan tüm cümlelerin kümesine $\mathcal{M}$'nin elementer teorisi diyeceğiz ve $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ ile göstereceğiz.

Tanım. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ iki $\mathcal{L}$-yapı olsunlar. Eğer $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$=$\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ ise bu iki yapı elementer denktir denir.

Bir evrensel formül, $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p)$ niceleyicisiz formülü için

$$\forall x_1 \dots \forall x_p \varphi(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

şeklinde yazılan formüle denir. $\mathcal{M}$ yapısının sağladığı tüm evrensel formüllerin kümesine $\mathcal{M}$'nin evrensel teorisi denir ve $Th_\forall(\mathcal{M})$ ile gösterilir. Benzer biçimde $\mathcal{M}$'nin varoluşsal teorisi de yazılabilir ve $Th_\exists(\mathcal{M})$ ile gösterilir. Eğer iki yapının evrensel teorisi aynı ise varoluşsal teoriside aynıdır, çünkü varoluşsal cümleler evrensel cümlelerin değillemesi olarak okunabilir.

Eğer $\mathcal{N}$ yapısı $\mathcal{M}$'nin bir altyapısı ise $\mathcal{M}$ yapısında doğru olan her evrensel cümle $\mathcal{N}$ yapısında da doğru olacağından $Th(\mathcal{M}) \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ olur. Bu durumun güzel bir sonucu olarak $n \geqslant 2$ olmak üzere F_n serbest grupları için $F_2 \leqslant F_n$ ve $F_n \leqslant F_2$ olduğundan $\mathrm{Th}_\forall(F_2) = \mathrm{Th}_\forall(F_n)$ eşitliği sağlanır.

Tanım. X bir küme ve $\mathcal{P}(X)$ X'in kuvvet kümesi olsun. Bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise, $\mathcal{F}$'ye X'in bir filtresidir denir;

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ve $X \in \mathcal{F}$;

(2) Eğer $A \in \mathcal{F}$ ise ve $A \subseteq B$ ise, o halde $B \in \mathcal{F}$;

(3) Eğer $A, B \in \mathcal{F}$ ise o halde $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Gözlem. *Filtrelerin sonlu kesişim özelliği vardır. Eğer $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ ise o halde $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F}$ olduğu üçüncü özellikten kolayca söylenebilir. Dolayısı ile $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ özelliği sağlanır.*

Lemma 2.1. *$S \subseteq \mathcal{P}(X)$ kümesi sonlu kesişim özelliğine sahip olan, boş olmayan bir küme olsun. O halde S kümesini içeren bir $\mathcal{F}$ filtresi vardır.*

Kanıt. $\mathcal{F}$ kümesini $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \exists S_1, S_2 \ldots, S_n \in S,\ S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \subseteq A\}$ olarak tanımlayalım. Eğer $\mathcal{F}$ filtre ise S kümesini içerdiğinden kanıt biter. Kontrol edelim, herhangi bir $S_1 \in S$ için $S_1 \subseteq X$ olacağından $X \in \mathcal{F}$. Sonlu kesişim özelliği sağlandığından $\emptyset \notin S$ olmalıdır, boş kümenin tek altkümesi kendisi olduğundan $\emptyset \notin \mathcal{F}$ olur. Eğer $S_1, S_2, \ldots, S_n \in S$ için

$S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \subseteq A \in \mathcal{F}$ ise o halde herhangi bir $A \subseteq B$ için $S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \subseteq B$ olacağından $B \in \mathcal{F}$ olur. Eğer $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ ise bu demektir ki $S_{i_1}, S_{i_2} \ldots, S_{i_m} \in S$ için $S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_m} \subseteq A_1$ ve $S_{j_1}, S_{j_2} \ldots, S_{j_k} \in S$ için $S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \cdots \cap S_{j_k} \subseteq A_2$ sağlanıyor. O halde $S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_m} \cap S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \cdots \cap S_{j_k} \subseteq A_1 \cap A_2$ olur, yani $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$ sağlanır. Demek ki tanımladığımız küme gerçekten bir filtre. ■

Örnek 1. X bir küme ve $A \subseteq X$ boş olmayan bir altküme olsun. O halde $\mathcal{F} = \{B \subseteq X | A \subseteq B\}$ kümesi A kümesi tarafından üretilen bir filtredir. Bu şekildeki filtreleri başat filtreler olarak adlandıracağız. Başat olmayan filtreleri ise serbest filtre olarak adlandıracağız.

Örnek 2 (Fréchet Filtresi)**.** X sonsuz elemanlı bir küme olsun. O halde $\mathcal{F} = \{A \subseteq X | X \setminus A \text{ sonlu}\}$ kümesi bir serbest filtredir.

Tanım. Maksimal olan filtrelere ultrafiltre denir.

Aksiyom 2.2 (Zorn Lemma)**.** *X kümesi her bir zincirinin bir üst sınırının olduğu bir yarı-sıralı küme olsun. O halde X kümesinin bir maksimal elemanı vardır.*

Önerme 2.3. *X boş olmayan bir küme olsun. X kümesinin herhangi bir $\mathcal{F}$ filtresi bir ultrafiltre tarafından içerilir.*

Kanıt. $\mathcal{M}$ kümesi $\mathcal{F}$ filtresini içeren tüm filtrelerin kümesi olsun. Bu küme içerilme($\subseteq$) ilişkisi ile yarı-sıralıdır. Eğer bu kümeden herhangi bir C zinciri alırsak bu zincirdeki tüm elemanların birleşiminin yani $\bigcup C$ nin bir filtre olacağını gösterelim. Hiçbir filtre boş kümeyi içermediği için $\emptyset \notin \bigcup C$ ve her filtre X'i içerdiği için $X \in \bigcup C$ sağlanıyor. Eğer $A \in \bigcup C$ ise o halde bir $\mathcal{F}$ filtresi için $A \in \mathcal{F}$ sağlanıyor. Dolayısıyla $A \subseteq B$ ise $B \in \mathcal{F}$, ki bu demektir ki $B \in \bigcup C$ sağlanıyor. Son olarak $A, B \in \bigcup C$ olsun. O halde bir

$\mathcal{F} \subset \bigcup C$ filtresi için $A, B \in \mathcal{F}$ ve $A \cap B \in \mathcal{F}$. Bu durumda $A \cap B \in \mathcal{F}$. Yani $\bigcup C$ bir filtre. Dolayısı ile $\bigcup C$ bu zincir için üst sınır olacak. O halde Zorn Lemma'dan dolayı $\mathcal{M}$ kümesinin bir maksimal elemanı vardır. ■

Önerme 2.4. *$\mathcal{F}$ kümesi X kümesinin bir filtresi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.*

(1) $\mathcal{F}$ bir ultrafiltredir.

(2) Her $A \subseteq X$ için ya $A \in \mathcal{F}$ ya da $X \setminus A \in \mathcal{F}$ sağlanır.

(3) Eğer $A \cup B \in \mathcal{F}$ ise o halde ya $A \in \mathcal{F}$ ya da $B \in \mathcal{F}$ olmalıdır.

(4) Her $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$ için öyle bir A_i, $i \leq n$ vardır ki $A_i \in \mathcal{F}$ sağlanır.

Kanıt. ($2 \Rightarrow 1$) Her $A \subseteq X$ için ya $A \in \mathcal{F}$ ya da $X \setminus A \in \mathcal{F}$ sağlansın. Varsayalım ki $\mathcal{F}$ bir ultrafiltre olmasın. O halde bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ filtresi vardır. Bu demektir ki $\mathcal{U}$ kümesinde $\mathcal{F}$ kümesinde içerilmeyen bir eleman vardır. Yani bir $B \in \mathcal{U}$ için $B \notin \mathcal{F}$ olur. Biz eğer $B \notin \mathcal{F}$ ise o halde $X \setminus B \in \mathcal{F}$ olacağını kabul etmiştik. Ancak bu durumda $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ olduğundan $X \setminus B \in \mathcal{U}$ olur. Hem $B \in \mathcal{U}$ hem de $X \setminus B \in \mathcal{U}$ olduğundan $\emptyset \in \mathcal{U}$ olur. Çelişki elde ederiz. O halde $\mathcal{F}$ bir ultrafiltredir.

($1 \Rightarrow 3$) $\mathcal{F}$ bir ultrafiltre olsun. Diyelim ki $A \cup B \in \mathcal{F}$ sağlansın ancak $A \notin \mathcal{F}$ ve $B \notin \mathcal{F}$ olsun. Bir $\mathcal{F}' = \{K \subset X \mid K \cup A \in \mathcal{F}\}$ kümesi tanımlayalım. İlk olarak $\mathcal{F}'$ kümesinin bir filtre olduğunu göstererek başlayalım.

(i) $A \notin \mathcal{F}$ olduğu için $\emptyset \notin \mathcal{F}'$ olmalı ve $X \cup A \in \mathcal{F}$ olduğu için $X \in \mathcal{F}'$ olmalı.

(ii) Eğer $K \in \mathcal{F}'$ ise bu demektir ki $K \cup A \in \mathcal{F}$ sağlanır. Bu durumda herhangi bir $K \subseteq L$ için F filtre olduğundan, $K \cup A \subseteq L \cup A \in \mathcal{F}$ olur. Dolayısıyla $L \in \mathcal{F}'$ olur.

(iii) $K, L \in \mathcal{F}'$ olsun. Bu durumda $K \cup A \in \mathcal{F}$ ve $L \cup A\mathcal{F}$ sağlanıyor. O halde $\mathcal{F}$ filtre olduğu için $(K \cup A) \cap (L \cup A) = (K \cap L) \cup A \in \mathcal{F}$ sağlanır. Bu demektir ki $K \cap L \in \mathcal{F}'$ sağlanır.

Böylece $\mathcal{F}'$ kümesinin bir filtre olduğunu göstermiş olduk. Ancak bu durumda $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ olur. Bu durum $\mathcal{F}$'nin ultrafiltre olması ile çelişir. Aynı durum B kümesi ile de gösterilebilirdi. Bu sebeple eğer $A \cup B \in \mathcal{F}$ ise ya $A \in \mathcal{F}$ ya da $B \in \mathcal{F}$ olmalıdır.

$(3 \Rightarrow 4)$ $A \cup B \in \mathcal{F}$ ise $A \in \mathcal{F}$ ya da $B \in \mathcal{F}$ olduğunu kabul edelim. Eğer $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$ ise $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1} \in \mathcal{F}$ ya da $A_n \in \mathcal{F}$ olmalı. Bu durumda $A_n \notin \mathcal{F}$ ise $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-2} \in \mathcal{F}$ ya da $A_{n-1} \in \mathcal{F}$ olmalıdır. Bu şekilde devam edilirse, kolayca A_i kümelerinden biri için $A_i \in \mathcal{F}$ olması gerektiği söylenebilir.

$(4 \Rightarrow 2)$ $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$ ise bir A_i için $A_i \in \mathcal{F}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $A \cup (X \setminus A) = X \in \mathcal{F}$ olduğundan $A \in \mathcal{F}$ ya da $X \setminus A \in \mathcal{F}$ olmalıdır. ■

Tanım (Ultraçarpım)**.** $\mathcal{L}$ bir dil ve U, X kümesi üzerine bir ultrafiltre olsun ve her $a \in X$ için $\mathfrak{U}_a$ bir $\mathcal{L}$-yapısı olsun. Öncelikle $\prod_{a \in X} \mathfrak{U}_a$ çarpımını tanımlayalım. Bu çarpım yapıların kümeleri üzerinden direkt çarpım olarak, yani

$\prod_{a \in X} \mathfrak{U}_a = \{g : X \to \bigcup_{a \in X} \mathfrak{U}_a \mid \forall a \in X, g(a) \in \mathfrak{U}_a\}$ olarak tanımlanır.

Şimdi bu küme üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlayalım. $g \sim g'$ ancak ve ancak $\{a \in X \mid g(a) = g'(a)\} \in U$ ise. Bunun bir denklik bağıntısı olduğunu görelim.

- Alınan bir g elemanı için $\{a \in X \mid g(a) = g(a)\} = X \in U$ olduğu için $g \sim g$ olur.

- $g \sim g'$ ise $g' \sim g$ olacağı aşikar.

- Eğer $g_1 \sim g_2$ ise ve $g_2 \sim g_3$ ise o halde $\{a \in X \mid g_1(a) = g_2(a)\} \in U$ ve $\{a \in X \mid g_2(a) = g_3(a)\} \in U$ olur. U bir filtre olduğundan bu iki kümenin kesişimi yine filtrede olmalıdır. O halde $\{a \in X \mid g_1(a) = g_2(a) = g_3(a)\} \in U$ olur. $\{a \in X \mid g_1(a) = g_2(a) = g_3(a)\} \subseteq \{a \in X \mid g_1(a) = g_3(a)\}$ olduğundan $\{a \in X \mid g_1(a) = g_3(a)\} \in U$. Yani $g_1 \sim g_3$ sağlanır.

Bir g elemanının " $\sim$ " altındaki denklik sınıfını $[g]$ ile gösterelim. Bu denklik sınıfları altında $\prod_{a\in X} \mathfrak{U}_a/\sim = \mathfrak{U}$ bir yapı oluşturur. Bu yapının ilişkileri ve fonksiyonları aşağdaki gibi tanımlanır.

- Sabit semboller için $a \in X$ için $c^{\mathfrak{U}}(a) = c^{\mathfrak{U}_a}$

- İlişkiler için $R^{\mathfrak{U}}([g_1], [g_2], \dots, [g_n])$ bir ilişkidir ancak ve ancak $[\{a \in X | R^{\mathfrak{U}}(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a))\} \in U]$ ise

- Fonksiyon sembolleri için $f^{\mathfrak{U}}([g_1], [g_2], \dots, [g_n]) = [g_0]$ ancak ve ancak $[\{a \in X | f^{\mathfrak{U}_a}(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a)) = g_0(a)\} \in U]$ ise.

İşte bu $\prod_{a\in X} \mathfrak{U}_a/\sim = \mathfrak{U}$ yapısına ultraçarpım denir.

Teorem 2.5 (Łoś). *X bir indeks kümesi, $\mathcal{F}$, X üzerine bir ultrafiltre ve $\{\mathcal{U}_a | a \in X\}$ kümesi ise L-yapılardan oluşan bir küme olsun. $\varphi(\overline{x})$ n-değişkenli bir formül olsun ve $\overline{[g]}$ ise $\mathfrak{U} = \prod_{a\in X} \mathcal{U}_a/\sim$ ultraçarpımında n elemanlı bir dizi olsun. $\varphi(\overline{[g]})$ formülü $\mathfrak{U}$ yapısında sağlanır ancak ve ancak $\{a \in X | \mathcal{U}_a \models \varphi((\overline{g(a)})\}$ kümesi $\mathcal{F}$ ultrafiltresinin bir elemanı ise.*

Kanıt. Bu teoremi kanıtlamak için birinci dereceden $\mathcal{L}$-formüller üzerinden tümevarım yapacağız.

İlk olarak en basit durumda φ bir atomik formül ya da bir ilişki olabilir. φ bir atomik formül olsun yani $\varphi : \bar{x} = \bar{x'}$ şeklinde bir formül olsun.

$\mathfrak{U} \vDash \overline{[g]} = \overline{[g']}$

$\Leftrightarrow \overline{g} \sim \overline{g'} \Leftrightarrow \{a \in X | g(a) = g'(a)\} \in \mathcal{F}$

$\Leftrightarrow \{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash \overline{(g(a))} = \overline{(g'(a))}\} \in \mathcal{F}$, o halde teorem atomik formüller için doğrudur.

φ bir ilişki olsun, yani $\varphi : R(\overline{x})$ olsun. O halde yukarıda yaptığımız ultraçarpım için ilişki tanımından dolayı $\mathfrak{U} \vDash R(\overline{[g]}) \Leftrightarrow \{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash R(\overline{(g(a))})\} \in \mathcal{F}$ olur. Bu durumda teorem ilişki için de sağlanır.

Şimdi tümevarım hipotezi olarak diyelim ki φ ve ψ iki formül olsunlar ve teoremi sağlasınlar.

(1) İlk olarak $\varphi \wedge \psi$ için doğru olduğunu gösterelim.
$\mathfrak{U} \vDash (\varphi \wedge \psi)(\overline{[g]}) \Leftrightarrow \mathfrak{U} \vDash \varphi(\overline{[g]}) \wedge \mathfrak{U} \vDash \psi(\overline{[g]})$
$\Leftrightarrow \{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash \varphi\overline{(g(a))}\} \in \mathcal{F} \wedge \{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash \psi\overline{(g(a))}\} \in \mathcal{F}$ (Tümevarım hipotezi)
$\Leftrightarrow \{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash \varphi\overline{(g(a))}\} \cap \{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash \psi\overline{(g(a))}\} \in \mathcal{F}$ (Filtre olma özelliği)
$\Leftrightarrow \{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash (\varphi \wedge \psi)\overline{(g(a))}\} \in \mathcal{F}$

(2) Şimdi ifadenin $\neg\varphi$ için sağlandığını gösterelim.

$\mathfrak{U} \vDash \neg\varphi(\overline{[g]}) \Leftrightarrow \mathfrak{U} \nvDash \varphi(\overline{[g]})$
$\Leftrightarrow \{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash \varphi\overline{(g(a))}\} \notin \mathcal{F}$ (Tümevarım hipotezi)
$\Leftrightarrow \{a \in X | \mathfrak{U}_a \nvDash \varphi\overline{(g(a))}\} \in \mathcal{F}$ (Ultrafiltre olma özelliği)
$\Leftrightarrow \{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash \neg\varphi\overline{(g(a))}\} \in \mathcal{F}$

(3) Son olarak $(\exists x\varphi)(\overline{[g]})$ için sağlandığını gösterelim.

$\mathfrak{U} \vDash (\exists x\varphi)(\overline{[g]}) \Leftrightarrow$ bir $[f] \in \mathfrak{U}$ vardır ki $\mathfrak{U} \vDash \varphi([f], \overline{[g]})$

$\Leftrightarrow$ bir $[f] \in \mathfrak{U}$ vardır ki $\{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash \varphi(f(a), \overline{(g(a))})\} \in \mathcal{F}$

Herhangi bir $[f] \in \mathfrak{U}$ için $\{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash \varphi(f(a), \overline{(g(a))})\} \subseteq \{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash (\exists x\varphi)(\overline{g(a)})\}$ olduğu açık. Diğer taraftan öyle bir f vardır ki, $\mathfrak{U}_a \vDash (\exists x\varphi)(\overline{g(a)})$ sağlandığında seçim aksiyomu kullanılarak her $a \in X$ değerinde x için bir $h_a \in \mathfrak{U}_a$ seçilebilir. Yani f fonksiyonu

$$f(a) = \begin{cases} h_a & \mathfrak{U}_a \vDash (\exists x\varphi)(\overline{g(a)}) \; ise \\ rastgele & diger \; durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir. O halde bir $[f] \in \mathfrak{U}$ vardır ki $\{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash \varphi(f(a), \overline{(g(a))})\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \{a \in X | \mathfrak{U}_a \vDash (\exists x\varphi)(\overline{g(a)})\} \in \mathcal{F}$ sağlanır.

Kanıtı $\forall$, $\Rightarrow$ veya $\vee$ için devam ettirmeye gerek yok çünkü yukarıda gösterdiklerimizle geri kalan tüm cümleleri yazabiliriz. ■

Eğer tüm $\mathfrak{U}$ yapıları aynı yapı ise ultraçarpıma ultragüç denir ve $^*\mathfrak{U}$ ile gösterilir.

Sonuç 2.6. *$\mathfrak{U}$ bir yapı olsun. O halde $Th(\mathfrak{U}) = Th(^*\mathfrak{U})$ sağlanır.*

Örnek 3. G bir grup olsun bu grubun ultragücü $^*G$ ile elementer teorisi aynıdır. Dolayısı ile $^*G$ yapısı bir gruptur.

Bölüm 3

Gerekli Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde çalışmamızın temelini oluşturacak olan işaretli grupları ve bazı temel teoremlerde kullanacağımız yapıları tanımlayacağız. Tez boyunca temel yapımız olacak olan serbest grubun tanımı için [3] kitabında Definition 3.1'e bakılabilir. İlk olarak ilerde birkaç defa kullanacağımız bir teoremi yazalım. Bu teorem bilinen bir teorem olduğu için kanıtsız vereceğiz.

Teorem 3.1. *Serbest grupların altgrupları serbest gruptur.*

Kanıt. Kanıt için [9], Corollary 4.2.8'e bakılabilir. ■

3.1 Birleştirilmiş Çarpım ve HNN genişlemesi

Bu bölümde ilerde kullanacağımız birleştirilmiş çarpımı ve HNN genişlemesini açıklayacağız ve Bass-Serre teoremini kanıtlayacağız. Bu bölüm için [3] kitabından yararlanılmıştır.

Tanım (Birleştirilmiş Çarpım)**.** G ve H iki grup ve $A \leqslant G$ ve $B \leqslant H$ iki izomorfik altgrup olsunlar. A ve B grupları arasındaki izomorfizma $\varphi : A \to B$ olsun. G ve H gruplarının φ izomorfizması altında A ve B grupları ile birleştirilmiş çarpımı $G * H$ serbest çarpımının $\{\varphi(a)a^{-1}|a \in A\}$ kümesinin normal kapanışına bölünmesi ile oluşturulan bölüm grubudur. Grubun gösterimini $\langle G * H|a = \varphi(a), a \in A\rangle$, $G *_{A=B} H$ ya da $G *_A H$ notasyonları ile yapacağız.

Tanım. T_A ile A grubunun G içindeki sağ kosetlerinin bir temsilciler kümesini belirtelim, T_B ile ise B grubunun H içindeki sağ kosetlerinin bir temsilciler kümesini belirtelim, T_A içinde A'nın T_B içinde B'nin temsilcisini 1 olarak seçelim. Bir birleştirilmiş çarpım A-normal formu aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde oluşturulmuş $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ dizisidir.

- $x_0 \in A$
- Her $i \geq 1$ için $x_i \in T_A \setminus 1$ ya da $x_i \in T_B \setminus 1$ olmalı. Ayrıca x_i ve x_{i+1} elemanları farklı temsilci kümelerinden olmalılar.

Önerme 3.2. *$G_1 *_{A=B} G_2$ birleştirilmiş çarpımındaki her elemanın bir birleştirilmiş çarpım A-normal form dizisi ile biricik bir yazımı vardır.*

Kanıt. [3], Teorem 11.3'e bakılabilir. ■

Sonuç 3.3. *$G = G_1 *_{A=B} G_2$ bir birleştirilmiş çarpım olsun. O halde G_1 ve G_2 gruplarını G grubunun içine gömebileceğimiz bir $\phi : G_1 *_{A=B} G_2 \to G$ homomorfizması vardır. Öyle ki $\phi(G_1)$ ve $\phi(G_2)$ altgrupları G grubunu üretirler ve iki altgrubun kesişimi $\phi(A) = \phi(B)$ grubunu verir.*

Tanım. G bir grup, A ve B bu grubun izomorfik iki altgrubu olsun. Altgruplar arasındaki izomorfizma $\varphi : A \to B$ olsun ve $\langle t\rangle$ ise G'nin elemanı olmayan bir t elemanı tarafından üretilmiş sonsuz devirli grup olsun. O halde G grubunun A ve B grupları ile HNN genişlemesi $G * \langle t\rangle$ serbest çarpım grubu ve $\{t^{-1}at(\varphi(a))^{-1} = 1|a \in A\}$ kümesini normal kapanışı ile oluşturulan bölüm grubudur. HNN genişlemesi ile oluşturulan grubu $\langle G, t | t^{-1}at = \varphi(a), a \in A\rangle$ ya da $G*_{A=B}$ ya da $G*_A$ notasyonları ile göstereceğiz.

Tanım. T_A ve T_B ile A ve B gruplarının G içindeki sağ kosetlerinin birer temsilciler kümesini belirtelim. Bir $(g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \ldots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$ dizisi aşağıdaki şartları sağlıyorsa HNN genişlemesi bir normal formudur,

- $g \in G$ ise;
- Eğer $\varepsilon_i = -1$ ise $g_i \in T_A$, eğer $\varepsilon_i = 1$ ise $g_i \in T_B$ ise;
- Dizi $t^{\varepsilon}, 1, t^{-\varepsilon}$ şeklinde bir ardışık alt dizi içermiyorsa.

Önerme 3.4. *$G*_{A=B}$ HNN genişlemesindeki her bir elemanın biricik bir HNN genişlemesi normal form yazılışı vardır.*

Kanıt. [3], Teorem 14.3' e bakılabilir. ∎

Sonuç 3.5. *$G = G_1*_{A=B} = \langle G_1, t | t^{-1}at = \varphi(a), a \in A\rangle$ bir HNN genişlemesi olsun. O halde G_1 ve $\langle t\rangle$ gruplarını G grubunun içine gömebiliriz. Aynı zamanda A ve B gruplarının homomorfizma altındaki görüntüleri eşleniktirler.*

Ağaçlar ve Çarpımlar

Bu bölümde birleştirilmiş çarpım ve HNN genişlemesi gruplarının ağaçlar üzerine etkilerini inceleyeceğiz.

Bunun için önce çizgeler ile ilgili ve grupların çizgeler üzerine etkisi ile ilgili genel tanımları verelim.

Tanım. Bir çizge X^0 köşeler kümesi, X^1 kenarlar kümesi ve bu kümeler arasındaki $\alpha : X^1 \to X^0$ (başlangıç), $\omega : X^1 \to X^0$ (bitiş) ve $^{-} : X^1 \to X^1$ (bir kenarın tersi) göndermelerinden oluşur. Öyle ki her $e \in X^1$ için $\bar{\bar{e}} = e$,

$\bar{e} \neq e$ ve $\alpha(e) = \omega(\bar{e})$ sağlanır. $\alpha(e)$ ve $\omega(e)$ e kenarının başlangıç ve bitiş köşeleri olarak adlandırılır.

Tanım. Bir G grubu X^0 ve X^1 kümeleri üzerine (soldan) etki ediyorsa ve her $g \in G$, $e \in X^1$ için $g\alpha(e) = \alpha(ge)$ ve $g\bar{e} = \bar{g}e$ ise G grubu X çizgesine (soldan) etki ediyor denir.

Eğer her $g \in G$ ve $e \in X^1$ için $ge \neq \bar{e}$ ise G kenarları terse çevirmeden etki ediyor denir.

Tanım. Bir G grubu X çizgesine kenarları terse çevirmeden etki etsin. Herhangi $x \in X^0 \sqcup X^1$ için $orb(x) = \{gx | g \in G\}$ elemanın yörüngesini göstersin. $v \in X^0$ ve $e \in X^1$ olmak üzere $orb(v)$ ve $orb(e)$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan, köşeleri $orb(v)$ ve kenarları $orb(e)$ olan bir $G \setminus X$ bölüm çizgesi tanımlanabilir;

- Bir e kenarının başlangıcı olan gv varsa $orb(v)$ de $orb(e)$'nin başlangıcı olmalı.

- Herhangi $orb(e)$ kenarının tersi $orb(\bar{e})$ olmalı.

$orb(e)$ ve $orb(\bar{e})$ kenarları $G \curvearrowright X$ kenarları terse çevirmeyen etki olduğu için asla aynı olmayacak. X çizgesi ile $G \setminus X$ arasında $x \in X^0 \sqcup X^1$ için $p(x) = orb(x)$ olacak şekilde bir $p : X \to G \setminus X$ morfizması tanımlanabilir, bu morfizmaya projeksiyon diyelim. y elemanı $G \setminus X$ çizgesinin bir kenarı veya köşesi olsun, y'nin ön görüntüsüne y elamanının X çizgesine yükselmesi diyeceğiz. Sadece iki köşe ve bir kenardan oluşan bağlantılı çizgeye segment diyeceğiz.

Teorem 3.6. *$G = G_1 *_{A=B} G_2$ bir birleştirilmiş çarpım olsun. O halde G grubu $G \setminus X$'in bir segment olduğu bir X ağacına kenarları terse çevirmeden* *etki eder. Dahası bu segment X ağacına yükseltilebilir öyle ki köşelerinin sabitleyicileri G_1 ve G_2 ve kenarının sabitleyicisi A olur.*

Kanıt. X çizgesini inşa etmek için çizgenin köşelerini ve kenarlarını oluşturarak başlayalım. X çizgesinin köşelerini G_1 ve G_2 gruplarının G'deki sol kosetleri oluştursun, $X^0 = G/G_1 \cup G/G_2$. X çizgesinin kenarlarını ise A grubunun G'deki sol kosetleri oluştursun, $X^1 = G/A$. Başlangıç ve bitiş göndermeleri $\alpha(gA) = gG_1$ ve $\omega(gA) = gG_2$ olarak tanımlansın. Bu durumda A kenarının başlangıcı G_1 ve bitişi G_2 oluyor, bu segmenti $\tilde{T}$ ile gösterelim. G grubunun X çizgesine soldan çarpma ile bir etkisinin olduğu aşikar.

İlk olarak X çizgesinin bağlantılı olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için herhangi bir gG_1 köşesini G_1 köşesine bağlayan bir yol olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Önerme 3.2'den biliyoruz ki g elemanını bir G_1-normal form olacak biçimde $g = g_1g_2 \ldots g_n$ şeklinde yazabiliriz ve bu yazım biriciktir. Bu yazımda $g_1 \in G_1$ olduğunu ve herhangi bir $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $g_i \in G_1$ ya da $g_i \in G_2$ olduğunu biliyoruz. Eğer $g_i \in G_1$ ise $g_iG_1 = G_1$ olacağından $g_1g_2 \ldots g_{n-1}G_1 = g_1g_2 \ldots g_iG_1$ olur dolayısıyla $g_1g_2 \ldots g_{n-1}G_1$ köşesi ile $g_1g_2 \ldots g_iG_1$ köşesi aynı köşe olurlar. Eğer $g_i \in G_2$ ise bu sefer $g_iG_2 = G_2$ olacağından bu demektir ki $g_1g_2 \ldots g_{n-1}G_1$ ve $g_1g_2 \ldots g_iG_1$ köşelerinin her ikisinin $g_1g_2 \ldots g_{i-1}G_2$ köşesi ile aralarında kenar vardır, yani bu iki köşe bağlantılıdır. Bu şekilde devam ederek n üzerinden tümevarımla gG_1 köşesinin G_1 köşesine bağlı olduğu gösterilebilir.

Şimdi X çizgesinin bir döngü içermediğini gösterelim. Bir çelişki elde etmek için X çizgesindeki $e_1e_2 \ldots e_n$ yolunun bir döngü olduğunu varsayalım. Genelliği kaybetmeden e_1 kenarının başlangıcının G_1 olduğunu varsayalım. Komşu olan köşelerin farklı altgrupların kosetleri olması gerektiğinden n sayısı çift olmalı. Yine aynı sebepten $\alpha(e_2) = x_1G_2$, $\alpha(e_3) = x_1y_1G_1, \ldots,$

$\alpha(e_n) = x_1y_1\ldots x_{n/2}G_2$ sağlayan $x_i \in G_1 \setminus A$ ve $y_i \in G_2 \setminus A$ elemanları vardır. Bu durumda e_n kenarının sonu $\omega(e_n) = x_1y_1\ldots x_{n/2}y_{n/2}G_1$ olur. Ancak bu yol bir döngü olduğuna göre $\omega(e_n) = \alpha(e_1) = G_1$ olmalı. Bu durum bir elemanın iki farklı A-normal formu olmasını gerektirir, ancak bu Önerme 3.2 ile çelişir.

Şimdi herhangi bir e kenarını ele alalım, bu kenarın yörüngesi $orb(e) = \{ge|g \in G\}$ kümesidir. Her bir kenar bir A'nın koseti olduğu için $e = g_iA$ şeklinde yazılabilir ve koset ise $orb(e) = \{gA|g \in G\} = G \setminus A$ olur. Her bir kenar için aynı durum geçerli olduğundan $G \setminus X$ çizgesinin bir kenarı vardır $G \setminus A$, aynı şekile köşeler ise $G \setminus G_1$ ve $G \setminus G_2$ olur. Şimdi $p : G \to G \setminus X$ projeksiyonuna bakalım. Projeksiyon ile yükseltildiğinde bu kenarların sabitleyicileri sırasıya A, G_1 ve G_2 olur. ■

Teorem 3.7. *$G = H*_A = \langle H, t|t^{-1}at = \varphi(a), a \in A\rangle$ bir HNN genişlemesi olsun. O halde G grubu $G \setminus X$ in bir döngü olduğu bir X ağacına kenarları terse çevirmeden etki eder. Dahası, X çizgesinde öyle bir $\tilde{Y}$ segmenti vardır ki köşelerinin ve kenarının sabitleyicileri sırasıyla H, tHt^{-1} ve A olur.*

Kanıt. Bu sefer X çizgesinin köşelerini H grubunun G'deki kosetleri olarak, kenarlarını ise A grubunun G'deki kosetleri olarak oluşturalım. Başlangıç ve bitiş göndermelerini ise $\alpha(gA) = gH$ ve $\omega(gA) = gtH$ olarak tanımlayalım. $\tilde{Y}$ segmentini köşeleri H ve tH olan kenarı ise A olan segment olarak seçelim. G grubunun X üzerine soldan çarpma ile etkisi vardır ve bu etki altında H grubunun sabitleyicisi H, tH'nin tht^{-1} ve A'nın A olduğundan istenen sağlanır.

İspatın geri kalanı bir önceki ispatın yöntemi uygulanarak benzer bir şekilde tamamlanabilir. ■

Grupların Çizgesi

Bu bölümde köşeleri ve kenarları birer grup belirten çizgeleri ve onların esas gruplarını inceleyeceğiz.

Tanım. $\mathbb{G}$ gruplardan oluşan bir küme olsun ve bir Y bağlantılı çizgesinin her köşesi ve kenarı bu kümeden bir grubu temsil etsin, bu grupları G_v ve G_e ile gösterelim. Her e kenarı için $\alpha_e : G_e \to G_{\alpha(e)}$ monomorfizması olsun ve $G_e = G_{\bar{e}}$ olsun. Bu durumda $(\mathbb{G}, Y)$'ye grupların çizgesi denir.

Tüm G_v köşe gruplarını ve T, Y'nin maksimal ağacı olmak üzere üreteci $\{t_e | e \in T^1\}$ olan serbest grubun serbest çarpımını alalım ve bu grubun $t_e^{-1}\alpha_e(g)t_e(\alpha_{\bar{e}}(g))^{-1}$ ve $t_e t_{\bar{e}}$ kümesinin normal kapanışına bölünmesi ile oluşan grubu $F(\mathbb{G}, Y)$ ile gösterelim.

Tanım. $(\mathbb{G}, Y)$ bir grupların çizgesi ve T de Y çizgesinde bir maksimal alt ağaç olsun. O halde $(\mathbb{G}, Y)$ grupların çizgesinin esas grubu $\pi_1(\mathbb{G}, Y, T)$, $F(\mathbb{G}, Y)$ grubunun $e \in T^1$ olmak üzere t_e elemanlarının kümesinin normal kapanışına bölünmesi olarak tanımlanır.

Tanım. $(\mathbb{G}, Y)$ bir grupların çizgesi ve T bir maksimal ağaç olsun. $u, v \in Y^0$ olmak üzere $g \in G_v$ ve $g' \in G_u$ alalım. Eğer T ağacı üzerinde $g' = \omega_{e_k}{\alpha_{e_k}}^{-1} \cdots {\alpha_{e_1}}^{-1} g$ sağlayacak $e_1, \ldots, e_k$ yolu varsa g ve g' denktirler denir. Y çizgesi üzerinde bir oryantasyon sabitleyelim. O halde herhangi $x \in \pi_1(\mathbb{G}, Y, T)$ elemanını her bir g_i bir köşe grubuna ya da bir $t_i \in Y^1 \setminus T^1$ elemanına denk gelecek şekilde $g_1 \ldots g_n$ biçiminde yazabiliriz. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu yazıma sadeleştirilmiş yazım diyeceğiz;

- İki komşu eleman aynı köşe grubunun elemanına denk değilse,
- Eğer yazım $t_e t_e^{-1}$ ve $t_e^{-1} t_e$ biçiminde elemanlar içermiyorsa,

- g elemanı $\alpha_e(G_e)$ grubundan bir elemana denk bir eleman olmak üzere $t_e^{-1} g t_e$ biçiminde bir eleman içermiyorsa,

- g elemanı $\omega_e(G_e)$ grubundan bir elemana denk bir eleman olmak üzere $t_e g t_e^{-1}$ biçiminde bir eleman içermiyorsa.

Teorem 3.8. *Eğer bir $g \in \pi_1(\mathbb{G}, Y, T)$ sadeleştirilmiş yazımı birimden farklı ise o halde g birim değildir. Özel olarak G_v grubu $\pi_1(\mathbb{G}, Y, T)$ grubuna gömülebilir.*

Kanıt. [3], Teorem 16.10'a bakılabilir. ■

Grupların Ağaçlara Etkisi

Tanım. X bir ağaç Y bir bağlantılı çizge ve T, Y'nin bir maksimal alt ağacı olsun ve $p : X \to Y$ bir morfizma olsun. Eğer $\tilde{T} \subset \tilde{Y}$ ise ve
1) $\tilde{Y}^1 \setminus \tilde{T}^1$ kenarlarından her birinin $\tilde{T}$'de bir başlangıç ya da bitiş köşesi varsa
2) $\tilde{T}$ ile T, p altında izomorfik ise ve p göndermesi $\tilde{Y}^1 \setminus \tilde{T}^1$ ile $Y \setminus T$ arasında birebir-örten ise,

O halde $(\tilde{Y}^1, \tilde{T}^1)$ ikilisine (Y, T)'nin yükseltme ikilisi denir.

Teorem 3.9. *(Bass-Serre) $G = \pi_1(\mathbb{G}, Y, T)$, $(\mathbb{G}, Y)$ grupların çizgesinin esas grubu olsun. O halde G grubunun G/X bölüm çizgesi Y çizgesine izomorfik olan ve köşelerinin ve kenarlarının sabitleyicilerinin G grubunun kanonik görüntüleri olan G_v ve $\alpha_e(G_e)$ elemanlarıyla eşlenik olduğu bir X ağacı üzerine kenarları terse çevirmeyen etkisi vardır.*

Dahası (T, Y)'nin $p : X \to Y$ yukarıdaki etkiye denk düşen gönderme olmak üzere aşağıdakileri sağlayan bir $(\tilde{Y}^1, \tilde{T}^1)$ yükseltme ikilisi vardır.

- *G'de herhangi bir $\tilde{v} \in \tilde{T}^0$ elemanın sabitleyicisi G_v grubuna eşittir. Aynı şekilde herhangi bir $\tilde{e} \in \tilde{Y}^1$ elemanın sabitleyicisi $\alpha_e(G_e)$ grubuna eşittir.*

- *Eğer bir $\tilde{e} \in \tilde{Y}^1$ kenarının bitiş köşesi $\tilde{T}^0$ içinde değilse o halde bu elemanı t_e^{-1} $\tilde{T}^0$ içine taşır.*

Kanıt. [3], Teorem 18.2'ye bakılabilir. ■

3.2 İşaretli Gruplar

Bu bölümde işaretli grupları ve işaretli gruplar uzayını tanımlayacağız.

Tanım. G sonlu üreteçli bir grup ve $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ sıralı kümesi G grubunun üreteç kümesi olsun. (G, S) ikilisinden oluşan gruba işaretli grup denir. S kümesinde tekrar eden elemanlar olabilir.

$(G, (s_1, \ldots, s_n))$ ve $(G', (s'_1, \ldots, s'_n))$ işaretli grupları izomorfiktir ancak ve ancak her $1 \leq i \leq n$ için $\phi(s_i) = s'_i$ sağlayan bir $\phi : G \to G'$ izomorfizması varsa.

Notasyon. İzomorfizma altında birbirlerinden farklı n üreteçli işaretli grupların kümesini $\mathcal{G}_n$ olarak gösterelim.

Aşağıda yukarıdaki tanıma denk üç tanım verilmiştir.

1. (G, S) işaretli grubunun her bir kenarı $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinden bir sayıyla etiketlenmiş bir Cayley çizgesi vardır. İki işaretli grup izomorfiktir ancak ve ancak grupların etiketli Cayley çizgeleri izomorfik ise. Dolayısıyla $\mathcal{G}_n$ kümesi bu izomorfizma altında farklı olan çizgelerin kümesi olarak görülebilir.

2. Bir $\{s_1, \ldots, s_n\}$ kümesini sabitleyelim ve $S = (s_1, \ldots, s_n)$ üreteci ile işaretli $F_n = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ serbest grubunu ele alalım. Bir G grubu için grubun n elemanlı üreteç kümeleri ile F_n grubundan G grubuna yazılabilecek epimorfizmalar arasında birebir eşleme vardır. Bu bağlamda, $h_1 : F_n \to G_1$ ve $h_2 : F_n \to G_2$ epimorfizmaları iki izomorfik gruba karşılık gelir ancak ve ancak $h_2 = f \circ h_1$ sağlayan bir $f : G_1 \to G_2$ izomorfizması varsa.

3. G_1 ve G_2 grupları izomorfiktir ancak ve ancak $h_1 : F_n \to G_1$ ve $h_2 : F_n \to G_2$ epimorfizmalarının çekirdekleri aynı ise. Dolayısıyla $\mathcal{G}_n$ kümesi F_n grubunun normal altgruplarının kümesi olarak görülebilir.Benzer biçimde $\mathcal{G}_n$ kümesinin elemanları F_n grubunun bölüm grupları olarak görülebilir. F_n/N grubu $(F_n/N, S')$ grubuna denk gelir, burada S' kümesi S kümesinin bölüm altındaki görüntüsüdür.

$\mathcal{G}_n$ Üzerinde Topoloji

Bu bölümde $\mathcal{G}_n$ uzayı üzerinde iki denk topoloji tanımlayacağız. Bu bölümde [11] notlarından yararlanılmıştır.

Yukarıda tanımladığımız denk tanımlardan yararlanarak farklı yaklaşımlar geliştirmeye çalışacağız.

Üreteç kümesi S olan bir (G, S) işaretli grubu alalım. Bu grup üzerine bir kelime metriği tanımlanabilir. Bu metrikteki birim merkezli R yarıçaplı bir topu $B_{(G,S)}(R)$ ile gösterelim. F_n grubunun tüm altkümelerinden oluşan kuvvet kümesini 2^{F_n} ile gösterelim.

Herhangi iki C,$D \in 2^{F_n}$ için bu iki kümenin çakıştığı maksimum yarıçaplı topun yarıçapını $v(C, D)$ ie gösterelim. Başka bir deyişle

$$v(C, D) = \max\{R \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} | C \cap B_{(F_n,(s_1,\ldots,s_n))}(R) = B_{(F_n,(s_1,\ldots,s_n))}(R) \cap D\}$$

kümesini ele alalım. 2^{F_n} kümesi üzerinde $d(C,D) = e^{-v(C,D)}$ göndermesi bir metrik belirtir.

Diğer taraftan 2^{F_n} kümesi üzerinde sonlu ve ayrık olan A ve B kümeleri alalım ve $U_{A,B} = \{C \in 2^{F_n} | A \subseteq C \text{ ve } C \cap B = \emptyset\}$ kümesini tanımlayalım. Bu şekildeki kümeler bir $\mathscr{B}$ bazı oluşturur ve $\mathscr{T} = \left\{ \bigcup U_{A,B} : U_{A,B} \subseteq \mathscr{B} \right\}$ bir topoloji belirtir. $2^{F_n} \setminus U_{A,B} = U_{B,A}$ olduğu için $U_{A,B}$ kümeleri hem açık hem de kapalı olurlar, dolayısıyla bu topoloji ayrık topolojidir. Eğer 2^{F_n} kümesini $\{0,1\}^{F_n}$ olarak ele alırsak ve $\{0,1\}$ üzerinde ayrık topoloji tanımlarsak bu küme üzerindeki çarpım topolojisi tam olarak bizim tanımladığımız topolojiye denk gelir. Dolayısıyla Tychonoff teoreminden dolayı bu topoloji kompakttır.

Şimdi $\mathcal{G}_n$ kümesine F_n grubunun normal altgruplarının kümesi olarak bakalım.

Önerme 3.10. *$\mathcal{G}_n$ kümesi yukarıda tanımladığımız Tychonoff topolojisine göre 2^{F_n} kümesinin kapalı bir altkümesidir.*

Kanıt. Rastgele bir $A \in 2^{F_n} \setminus \mathcal{G}_n$ kümesi alalım.

Eğer $A = \emptyset$ ise e birim elemanı için $A \in U_{\emptyset,\{e\}}$ sağlanır. Ancak bu kümedeki hiçbir eleman bir grup olamaz. Yani $U_{\emptyset,\{e\}} \in 2^{F_n} \setminus \mathcal{G}_n$ olur.

Diyelim ki A boş olmasın ve F_n'in bir altgrubu olmasın. O halde öyle $a, b \in A$ elemanları vardır ki $ab^{-1} \notin A$ sağlanır. Bu durumda $A \in U_{\{a,b\},\{ab^{-1}\}}$ sağlanır. Bu kümedeki hiçbir eleman kapalılık özelliğini sağlamadığı için grup olamaz.

Diyelim ki A bir altgrup olsun ama normal altgrup olmasın. O halde bir $a \in A$ için öyle bir $g \in F_n$ vardır ki $g^{-1}ag \notin A$ sağlanır. Bu durumda $A \in U_{\{a\},\{g^{-1}ag\}}$ olur ve bu kümedeki hiçbir eleman normal altgrup olamaz. Sonuç olarak $2^{F_n} \setminus \mathcal{G}_n$ kümesi açıktır. ■

2^{F_n} kümesinin kompakt olduğunu söylemiştik. Kompakt kümelerin kapalı altkümeleri kompakt olduğundan $\mathcal{G}_n$ kümesi kompakttır.

Şimdi (G, S) grubunu S üreteç elemanları ile yazılıp birim elemana denk olan kelimelere eşitlik diyelim. Yani $w(s_1, \ldots, s_n) = 1$ kelimeleri eşitliklerimiz olsunlar. (G, S) grubunu S kümesinin elemanları ile oluşturulan bir Cayley çizgesi olduğunu biliyoruz. Bu durumda her bir $w(s_1, \ldots, s_n) = 1$ eşitliği bu çizgede birim elemandan başlanarak okunabilir. Dolayısıyla iki (G, S) ve (G', S') grubu R yarıçaplı bir topta aynı eşitlikleri içeriyorlarsa yukarıdaki metriğe göre $d((G, S), (G', S')) \leq e^{-R}$ sağlanır.

E sonlu üreteçli bir grup olsun. Benzer şekilde $\mathcal{G}(E)$ için üç denk tanım vereceğiz.

İlk olarak $\mathcal{G}(E)$ kümesini E grubunun normal alt gruplarının kümesi olarak görebiliriz.

G_1 ve G_2 gruplarını alalım. E grubundan her iki gruba da epimorfizmalar vardır. $\alpha_1 : E \twoheadrightarrow G_1$ ve $\alpha_2 : E \twoheadrightarrow G_2$ olsun eğer bir $\beta : G_1 \to G_2$ homomorfizması varsa ve $\alpha_1 \circ \beta = \alpha_2$ ise G_1 ve G_2 grupları izomorfik olurlar.

E grubu n elemanlı S_0 üreteç kümesi ile işaretlenmiş olsun. O halde $\mathcal{G}(E)$ kümesi $\mathcal{G}_n$ kümesinin kapalı bir altkümesi olarak görülebilir. Çünkü $\mathcal{G}(E)$ kümesinin elemanları (E, S_0) grubundaki tüm eşitlikleri sağlayan $(G, S) \in \mathcal{G}_n$ grupları olarak görülebilir.

$\mathcal{G}(E)$ kümesi de E grubunun normal altgruplarının kümesi olarak bakıldığında 2^E kümesi üzerindeki Tychonoff topolojisi ile üretilen topolojik uzayın kapalı bir kümesi olarak görülebilir. Dolayısıyla kompakttır.

Yakınsak Dizi Örnekleri

Bu bölümde $\mathcal{G}_n$ kompakt topolojik uzayında aldığımız bazı grup dizilerinin yakınsadıkları grupları inceleyeceğiz, başka bir deyişle bu dizilerin limitlerini bulacağız.

Örnek 4. $S = (s_1, \ldots, s_n)$ üreteç kümesi ile işaretlenmiş ve sunumları $G_1 = \langle s_1, \ldots, s_n | r_1 \rangle$, $G_2 = \langle s_1, \ldots, s_n | r_1, r_2 \rangle, \ldots,$ $G_i = \langle s_1, \ldots, s_n \mid r_1, r_2, \ldots, r_i \rangle$ biçiminde olan bir gruplar dizisi i değeri sonsuza giderken $G = \langle s_1, \ldots, s_n \mid r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots \rangle$ grubuna yakınsar. Çünkü herhangi bir R yarıçapı için $G = \langle s_1, \ldots, s_n \mid r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots \rangle$ grubunun o yarıçaptaki ilişkilerini içeren izomorfik bir G_i olacaktır.

Örnek 5. Şimdi $(\mathbb{Z}_2, \bar{1}), (\mathbb{Z}_3, \bar{1}) \ldots, (\mathbb{Z}_i, \bar{1})$ dizisini inceleyelim. Her i için grupların Cayley çizgelerinde $i/3$ yarıçaplı top $(\mathbb{Z}, 1)$ grubunun $i/3$ yarıçaplı topu ile izomorfik (aynı) olur. Dolayısıyla i sonsuza giderken $(\mathbb{Z}_i, \bar{1})$ dizisi $(\mathbb{Z}, 1)$ grubuna yakınsar.

Örnek 6. Herhangi bir i doğal sayısı için $(G_i, S_i) = (\mathbb{Z}, (1, i))$ işaretli grubunu ele alalım. Her R yarıçaplı top için 1 ve i elemanları arasındaki ilişkilerin sadece değişme ilişkileri olduğu yeteri kadar büyük bir i bulabiliriz, örneğin her R için $i \geq 100R$ olacak şekilde bu sağlanır. Dolayısıyla (G_i, S_i) grubunun R yarıçaplı topu $(\mathbb{Z}^2, (0, 1), (1, 0))$ grubunun R yarıçaplı topu ile aynı olur. Yani $(\mathbb{Z}^2, (0, 1), (1, 0))$ grubu $\mathbb{Z}, (1, i)$ dizisinin i sonsuza giderken limiti olur. Bu şekilde her n için $\mathbb{Z}^n$ grubu $(G_i, S_i) = (\mathbb{Z}, (1, i_1, \ldots, i_{n-1}))$ grubunun limiti olur.

Şimdi $n \geq k$ olmak üzere $\mathcal{G}_n$ uzayında $(\mathbb{Z}^k, S)$ işaretli grubunu ele alalım. Bu durumda S üreteç kümesi n elemanlıdır. S kümesinin $(s_1, \ldots, s_k)$ kısmı $\mathbb{Z}^k$ için bir baz olsun ve geri kalan kısmında ise her $i > k$ için $s_i = 1$ olsun. Yani

$S = (s_1, s_2, \ldots, s_k, 1, 1 \ldots, 1)$ olsun. Bu durumda yukarıdaki argümanı uygulayarak S_i'nin son $n-k$ elemanının 1 olduğu gruplar için $(\mathbb{Z}^k, S)$ grubunun limit olduğu $(\mathbb{Z}, S_i)$ dizisi oluşturulabilir.

Tanım. Bir G grubunda her $1 \neq g \in G$ elemanı için $\phi : G \to F$, $\phi(g) \neq 1$ olacak şekilde bir F sonlu grubu ve ϕ homomorfizması varsa G grubuna artık sonlu grup denir. Denk bir biçimde her $1 \neq g \in G$ için $g \notin N$ olan sonlu indeksli bir $N \trianglelefteq G$ grubu varsa G grubu artık sonludur denir.

Örnek 7. G artık sonlu bir grup olmak üzere (G, S) işaretli grubunu ele alalım. Her i için, G'nin, (G, S) grubunun Cayley çizgesinde i yarıçaplı topun epimorfizma ile gömüldüğü bir G_i sonlu bölüm grubu vardır. Epimorfizma altında S kümesinin görüntüsünü S_i ile gösterelim. Bu durumda (G_i, S_i) grubu ile (G, S) grubunun i yarıçaplı topu izomorfik olur. Dolayısıyla (G, S) grubu (G_i, S_i) sonlu grupları dizisinin limitidir. Yani her artık sonlu bir grup için o gruba yakınsayan bir sonlu gruplar dizisi bulunabilir.

Lemma 3.11. *G sonlu sunumlu bir grup olmak üzere (G, S) işaretli grubunu alalım. (G, S) grubunun sadece bölüm gruplarını içeren bir komşuluğu vardır.*

Kanıt. (G, S) grubunun sonlu sunumu

$$\langle s_1, s_2, \ldots, s_n | r_1(s_1, s_2, \ldots, s_n), \ldots, r_k(s_1, s_2, \ldots, s_n) \rangle$$

olsun. Bir (G', S') grubu (G, S) grubunun komşuluğunda ise bu demektir ki belirli bir yarıçaptaki top için grupların Cayley çizgeleri izomorfik. Dolayısıyla bu top içindeki $r_1(s'_1, \ldots, s'_n), r_2(s'_1, \ldots, s'_n) \ldots, r_k(s'_1, \ldots, s'_n)$ ilişkileri G' grubununda sağlanmalıdır. O halde G' grubu G'nin bir bölüm grubudur. ∎

Açık ve Kapalı Cebirsel Özellikler

Bu bölümde belli bir cebirsel özelliği sağlayan işaretli grupların oluşturduğu kümelerin $\mathcal{G}_n$ uzayı içinde açık veya kapalı olup olmadıklarını inceleyeceğiz.

Tanım. Eğer bir P özelliği için $\{(G,S) \in \mathcal{G} | G \vDash P\}$ kümesi açık ise P özelliği açıktır veya kapalı ise P özelliği kapalıdır diyeceğiz.

Lemma 3.12. *Sonluluk özelliği açık bir özelliktir.*

Kanıt. Bir (G,S) sonlu grubunu ele alalım. Bu grubun sonlu bir Cayley çizgesi vardır, bu çizgenin yarıçapına R diyelim. Bu durumda Cayley çizgesinin R yarıçaplı topu (G,S) grubunun Cayley çizgesine izomorfik olan herhangi bir grup (G,S) grubu ile aynı ilişkileri içereceğinden sonlu olacaktır ve başka hiç bir ilişki içeremeyeceğinden (G,S) grubuna izomorfik olacaktır. Dolayısıyla sonluluk özelliği açıktır. ∎

Önerme 3.13. *Bir σ cümlesi G grubunun evrensel bir cümlesi olsun. O halde σ özelliği kapalıdır.*

Kanıt. Yukarıdaki önermenin değiline denk olan, bir σ varoluşsal cümlesi için $G \models \sigma$ özelliği $\mathcal{G}_n$ içinde açıktır önermesini kanıtlayacağız.

Bir $\exists x_1 \dots \exists x_p \varphi(x_1, x_2, \dots, x_p)$ varoluşsal cümlesini alalım. $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p)$ formülünün ilişkilerinin tüm olasılıklarını $\wedge$'nin dağılma özelliğini kullanarak $\Sigma_1(x_1, \dots x_p) \vee \Sigma_2(x_1, \dots x_p) \vee \dots \vee \Sigma_q(x_1, \dots x_p)$ olarak yazabiliriz. Buradaki her bir niceleyicisiz $\Sigma_i(x_1, \dots x_p)$ sistemi $(x_1, \dots x_p)$ elemanları ile yazılabilecek kelimelerin $w(x_1, \dots x_p) = 1$ veya $w(x_1, \dots x_p) \neq 1$ şeklindeki eşitliklerinin ve eşitsizliklerinin kombinasyonlarının $''\wedge''$ bağlacı ile bağlanmış bir kümesi.

Şimdi $S = (a_1, \dots, a_n)$ kümesi ile üretilen bir (G, S) işaretli grubu alalım. Diyelim ki bir $\exists x_1 \dots \exists x_p \Sigma_1(x_1, \dots x_p) \vee \Sigma_2(x_1, \dots x_p) \vee \dots \vee \Sigma_q(x_1, \dots x_p)$ cümlesi (G, S) grubunda sağlanıyor olsun, yani $(G, S) \models \sigma$ olsun. Bu demektir ki öyle bir $\Sigma_i(x_1, \dots x_p)$ sistemi var ki S üretecindeki bir $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ sözcük kümesi ile yazılan eşitlikler ve eşitsizlikler (G, S) grubunda sağlanıyor. O halde (G, S) grubunun Cayley çizgesinde $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ elemanlarını içeren R yarıçaplı bir top alalım. Bu sayede Σ_i sistemindeki tüm kelimeler bu top içinde okunabilir. Şimdi farz edelim ki (G, S) grubunun Cayley çizgesindeki R yarıçaplı topa izomorfik bir topa sahip olan bir (H, S') grubu olsun. Çok açık ki Σ_i sistemindeki tüm eşitlikler ve eşitsizlikler bu sefer S' üretecinin elemanları ile yazılabilir. Yani $\Sigma_i(x_1, \dots x_p)$ sistemi (H, S) içinde sağlanır. Bu demektir ki $(H, S) \models \sigma$ sağlanır. O halde σ özelliğini sağlayan gruplar kümesi $\mathcal{G}_n$ içinde açıktır. Varoluşsal bir cümle özelliği açık olduğuna göre evrensel bir cümleyi sağlayan gruplar kümesi ise kapalı olacaktır.

$\blacksquare$

Şimdi açıklık ve kapalılığı bu sonuç ile beraber inceleyelim.

Lemma 3.14. *Abelyan olma özelliği hem açık hem de kapalı bir özelliktir.*

Kanıt. Eğer bir G grubu abelyan ise o halde $\sigma : \forall x \forall y [x, y] = 1$ evrensel cümlesini sağlar. O halde abelyanlık özelliği kapalı bir özelliktir.

Diğer taraftan, biliyoruz ki her (G, S) işaretli grubunun bir $Cay(G, S)$ Cayley çizgesi vardır. İki (G, S) ve (G', S') grubu izomorfiktir ancak ve ancak Cayley çizgeleri izomorfikse. Biz Cayley çizgelerinin belli bir yarıçıpında izmorfik olan grupları tanımlayarak başlayalım.

Diyelim ki (G, S) grubu $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ olan bir işaretli grup olsun. O halde $(G, S) \in \mathcal{G}_k$ olur. $V^n_{(G,S)}$ ile $\mathcal{G}_k$ kümesinde (G, S) grubunun Cayley çizgesinde

n yarıçaplı topa izmorfik bir n yarıçaplı topa sahip grupları gösterelim. Yani,

$$V^n_{(G,S)} = \{(G', S') \in \mathcal{G}_k | B_{(G,S)}(n) \cong B_{(G',S')}(n)\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu tanım altında aşağıdaki özelliklerin denk olduğunu söyleyebiliriz:

• $(G', S') \in V^n_{(G,S)}$

• S üreteçleri ile yazıldığında uzunluğu n'den küçük veya eşit olan bir w elemanı birim elemana denktir ancak ve ancak (G', S') ikilisine izomorfik olduğu elemanda bire denk ise. Yani, $w(s_1, \ldots, s_k) = 1$ ancak ve ancak $w(s'_1, \ldots, s'_k) = 1$.

• (G, S) gurubu ile (G', S') gruplarının kelime metriği ile uzunluğu n'den küçük olan topları aynı ilişkileri içerir.

Şimdi eğer (G, S) grubu abelyan ise S kümesindeki tüm elemanlar değişmeli olmalı. Yani her $s_i, s_j \in S$ için $[s_i, s_j] = 1$ sağlanmalı. Bu şekilde yazılabilecek tüm eşitlikler Cayley çizgesinde 4 yarıçaplı bir topta içerildiğinden, $(G', S') \in V^4_{(G,S)}$ olan tüm (G', S') gruplarında aynı eşitlikler sağlanmalıdır. Yani (G, S) grubunun belli bir komşuluğunda olan her (G', S') grubunun üreteçleri aralarında değişmeli olmalıdır. O halde abelyanlık özelliği aynı zamanda açık bir özelliktir. ■

Tanım. Bir G grubunda değişmeli olmak geçişli bir özellikse, yani her $a, b, c \in G \setminus \{1\}$ için eğer $[a, b] = [b, c] = 1$ ise $[a, c] = 1$ sağlanıyorsa G grubuna değişmesi geçişli bir gruptur denir.

Örnekler. • Abelyan gruplar değişmesi geçişlidir.

• S_3 simetri grubu değişmesi geçişli bir gruptur.

- Bir ilişkili burulmalı gruplar değişmesi geçişli gruplardır. ([6], Theorem 3.2.9)

Lemma 3.15. *G grubu değişmesi geçişli bir grup ve Z ise G grubunun maksimal abelyan altgrubu olsun. O halde Z grubu bir elemanın merkezleyicisidir.*

Kanıt. Diyelim ki Z grubu hiçbir elemanın merkezleyicisi olmasın, o halde herhangi $x \in Z$ için öyle bir $y \in G \setminus Z$ vardır ki $[x, y] = 1$ olur. G grubu değişmesi geçişli olduğu için Z de değişmesi geçişlidir, yani $[x, y] = 1$ olduğu için ve Z abelyan olduğu için $[y, Z] = 1$ sağlanır. Ancak bu durumda $\langle y, Z\rangle$ grubu Z grubunu içeren bir abelyan altgrup olur. Bu Z grubunun maksimal abelyan altgrup olması ile çelişir. O halde Z grubu bir elemanın merkezleyicisi olmalıdır. ∎

Tanım. Bir G grubunun her maksimal abelyan altgrubu malnormal ise G'ye CSA'dır denir. Başka bir deyişle $H < G$ maksimal abelyan altgrubu aldığımızda her $g \in G \setminus H$ için $H \cap g^{-1}Hg = 1$ ise G grubu CSA (conjugately separated abelian)'dır denir.

Şimdi CSA özelliğinin evrensel cümleler ile yazılabildiğini göstermek için aşağıdaki önermeyi kanıtlayalım.

Önerme 3.16. *Bir G grubu CSA'dır ancak ve ancak,*

- $\forall a, b, c \in G \setminus \{1\}\ [a, c] = [b, c] = 1 \Rightarrow [a, b] = 1$ *(değişmesi geçişlilik)*
- $\forall g, h \in G \setminus \{1\}\ [h, g^{-1}hg] = 1 \Rightarrow [g, h] = 1$

özellikleri sağlanıyorsa.

Kanıt. ($\Rightarrow$) G grubunun CSA olduğunu kabul edelim. Birimden farklı bir $g \in G$ elemanı alalım ve merkezleyicisini $C_G(g)$ ile gösterelim. $H < C_G(g)$

grubu bu grubun maksimal abelyan alt grubu olsun. Bu durumda H grubu g elemanını içerdiği için aynı zamanda G grubunun maksimal abelyan altgrubu olur. Şimdi rastgele bir $a \in C_G(g)$ elemanı alalım. $g \in H$ olduğu için ve g elemanı a elemanı ile değişmeli olduğu için $g \in aHa^{-1} \cap H$ sağlanır. Ancak G grubu CSA'dır ve H bir maksimal abelyan altgruptur. Bu durumda $a \in H$ sağlanıyor. Rastgele alınan bir $a \in C_G(g)$ için $a \in H$ sağlandığına göre $C_G(g) \subset H$ olur, bu demektir ki $C_G(g) = H$ dolayısıyla $C_G(g)$ abelyan bir grup. O halde rastgele alınan bir elemanın merkezleyicisi abelyan olduğuna göre G grubu değişmesi geçişlidir.

CSA olarak kabul ettiğimiz G grubu için $\forall g, h \in G \setminus \{1\}$ $[h, g^{-1}hg] = 1$ sağlansın. Rastgele alınan h elemanı için $C_G(h)$ merkezleyicisini alalım. Artık biliyoruz ki $C_G(h)$ abelyan bir maksimal altgruptur. Eğer $g \notin C_G(h)$ ise o halde $C_G(h) \cap g^{-1}C_G(h)g = 1$ olmalı. Ancak $[h, g^{-1}hg] = 1$ olduğuna göre $ghg^{-1} \in C_G(h)$ dolayısıyla $g^{-1}hg \in C_G(h) \cap g^{-1}C_G(h)g$ olur, çelişki elde ederiz. O halde $g \in C_G(h)$ sağlanır. Yani $[g, h] = 1$ sağlanır.

$(\Leftarrow)$ G grubu yukarıdaki iki özelliği sağlayan bir grup olsun. $H < G$ maksimal abelyan altgrup ve $g \in G \setminus H$ alalım. Eğer G grubu CSA değilse o halde bir $x \in G$ için $x \in H \cap g^{-1}Hg$ sağlanmalı. Bu durumda bir $h \in H$ için $x = g^{-1}hg$ sağlanıyor ve $g^{-1}hg \in H$ olduğuna göre ve H abelyan olduğuna göre $[h, g^{-1}hg] = 1$ olmalı. Bu durumda yukarıdaki özellikten biliyoruz ki $[h, g] = 1$ sağlanıyor. Ancak herhangi $a \in H$ için $[h, a] = 1$ sağlanacağından yine yukarıdaki özellikten $[a, g] = 1$ yani g elemanı H grubundaki tüm elemanlarla değişmeli. H maksimal abelyan olduğuna göre $g \in H$ olmalı ancak biz en başta $g \in G \setminus H$ seçmiştik. Çelişki elde ettik. O halde G grubu CSA özelliğini sağlar. ∎

Önerme 3.17. *Serbest gruplar CSA'dır.*

Kanıt. F herhangi bir serbest grup olsun. Önerme 3.16'dan yararlanarak F grubunun CSA olup olmadığını inceleyelim. İlk olarak şu gözlemi yapalım; F grubundan aldığımız birimden farklı herhangi iki a, b elemanı değişmeli ise bu iki elemanın ürettiği $\langle a, b\rangle$ altgrubu abelyan bir altgrup olacaktır. Teorem 3.1'dan biliyoruz ki serbest grupların altgrubu serbest gruptur, dolayısyla $\langle a, b\rangle$ grubu serbest abelyan grup $\mathbb{Z}$'ye izomorfiktir. Bu demektir ki değişmeli a, b elemanları bir $k \in F$ için $a = k^n$ ve $b = k^m$ biçiminde elemanlardır. Yani bir serbest grupta birimden farklı iki elemanın değişmeli olmasının gerek ve yeter koşulu o iki elemanın aynı elemanın kuvvetleri olmasıdır.

Şimdi tekrar kanıtımıza dönelim ve serbest grupların değismesi geçişli olduklarını göstererek başlayalım. F serbest grubunda rastgele aldığımız a, b, c elemanları için $[a, b] = 1$ ve $[b, c] = 1$ sağlanıyor olsun. Bu durumda gözlemimizden dolayı bir $k \in F$ için $a = k^n$, $b = k^m$ ve $b = x^v$, $c = x^u$ olacak. k ve x elemanlarının her ikisi de b elemanı ile değişmeli olduğuna göre iki eleman ortak bir elemanın kuvveti olmalılar. O halde a ve c elemanları değişmelidir, yani $[a, c] = 1$ sağlanır. Bu bize F grubunun değişmesi geçişli olduğunu söyler.

Şimdi yine rastgele $g, h \in F$ elemanları alalım ve varsayalım ki $[h, g^{-1}hg] = 1$ sağlansın. Diyelim ki g ve h elemanları değişmeli olmasınlar. Bu durumda serbest grupların altgrupları yie serbest grup olduğundan bu iki elemanın ürettiği $\langle g, h\rangle$ grubu F_2 grubunu üretecektir. Ancak bu grupta $[h, g^{-1}hg] = h^{-1}g^{-1}h^{-1}g^{-1}hg^{-1}hg = 1$ sağlandığından ve F_2 grubunda birimden farklı elemanlarla yazılan indirgenmiş hiçbir kelime birim elemana eşit olamayacağından çelişki elde ederiz. O halde serbest gruplar CSA'dır. ∎

Lemma 3.18. *Değişmesi geçişlilik ve CSA olma özellikleri kapalı özelliklerdir.*

Kanıt. $\sigma : \forall a, b, c[a, c] = [b, c] = 1 \Rightarrow [a, b] = 1$ ve $\phi : \forall g, h[h, g^{-1}hg] = 1 \Rightarrow$

$[g, h] = 1$ cümlelerini ele alalım.

Eğer bir G grubu değişmesi geçişli ise $G \vDash \sigma$ sağlanır, σ evrensel bir cümle olduğundan değişmesi geçişlilik özelliği kapalı bir özelliktir.

Eğer G grubu CSA ise o halde $G \vDash \sigma \wedge \phi$ sağlanır ve $\sigma \wedge \phi$ cümlesi evrensel bir cümle olduğundan CSA özelliği kapalı bir özelliktir. ■

Lemma 3.19. *Burulmalı elemana sahip olmak açık bir özelliktir.*

Kanıt. Eğer bir G grubu burulmalı bir elemana sahip ise, bir $g \in G \setminus \{e\}$ ve $i \neq 0$ için $g^i = 1$ eşitliği sağlanır. $n \geq i$ olacak şekilde n yarıçaplı bir Cayley çizgesi alalım. Bu durumda (G, S) grubunun n komşuluğunda olan başka bir deyişle $(G', S') \in V^n_{(G,S)}$ sağlayan tüm (G', S') gruplarında g elemanının izomorfizma altındaki görüntüsü olan ve $g'^i = 1$ eşitliğini sağlayan bir g' elemanı vardır. Yani (G, S) grubunun n komşuluğundaki gruplar burulmalı elemana sahip olmalıdır. O halde burulmalı elemana sahip olmak açık bir özelliktir. ■

İzomorfizma ile Denklik Bağıntısı

$\mathcal{G}_n$ uzayında işaret kümesini gözardı ederek yazılabilecek izomorfizmalar bir denklik bağıntısı belirtir. Yani herhangi iki (G_1, S_1) ve (G_2, S_2) işaretli grubu için eğer $G_1 \cong G_2$ ise (G_1, S_1) ve (G_2, S_2) grupları denktirler. Bu denklik bağıntısı altında bir G grubunun denklik sınıfını $[G]_{\mathcal{G}_n}$ ile gösterelim.

Tanım. Bir $A \subset \mathcal{G}(E)$ kümesi yukarıda izomorfizma denklik bağıntısı altındaki denklik sınıflarının bir birleşimi olarak görülebiliyorsa A kümesine sature edilmiş denir. Bir $A \subset \mathcal{G}$ kümesinin saturasyonu birleşimleri A kümesinin elemanlarının denklik sınıflarının birleşiminin alınmasıdır.

Lemma 3.20. *E sonlu temsilli bir grup olsun. Bir $U \subset \mathcal{G}(E)$ açık kümesinin saturasyonu yine bir açık kümedir.*

Kanıt. Herhangi bir E grubu için $\mathcal{G}(E) \subseteq \mathcal{G}_n$ açık ve kapalı bir altkümesi olacağından kanıtı $\mathcal{G}_n$ uzayında yapabiliriz.

$U \subset \mathcal{G}_n$ açık bir küme ve V bu kümenin bir saturasyonu olsun. U açık bir küme olduğundan bir $(G, S) \in U$ için (G, S) grubunun Cayley çizgesinde U'nun tüm elemanlarının izomorfik kopyasına sahip olduğu bir R yarıçaplı top vardır. V kümesi saturasyon olduğundan (G, S) grubunun denklik sınıfından $G \cong G'$ olmak üzere bir (G', S') alabiliriz, $G = G'$ olduğunu varsayıp (G, S') grubu alırsak genelliği kaybetmiş olmayız. Göstermemiz gereken (G, S') grubunun çizgesinde öyle bir R' yarıçaplı top bulabiliriz ki, bu topa izomorfik topa sahip her (H, T') grubunun denklik sınıfında (G, S) grubunun R yarıçaplı topuna izomorfik bir topa sahip (H, T) grubu vardır.

S kümesinin elemanlarını S' kümesinden elemanları ile yeniden yazarak işe başlayalım, $s_i \in G$ olduğu için $s_i = w_i(s'_1, \ldots, s'_n)$ şeklinde S kümesinin tüm elemanlarını yazabiliriz. Bu şekilde yazılan w_i kelimelerinin uzunluklarının maksimumunu L ile gösterelim ve $R' = RL$ olarak tanımlayalım. Benzer biçimde T kümesindeki elemanları $t_i = w_i(t'_1, \ldots, t'_n)$ olarak T' kümesindeki elemanlarla yeniden yazalım.

İddia. *R yarıçaplı top içinde uzunluğu en fazla $2R$ olan kelimeleri $r(e_1, \ldots, r_n)$ ile gösterelim, aşağıdaki özellikler denktir:*
1) $r(t_1, \ldots, t_n)$ kelimesi (H, T) grubunda bir eşitlik belirtir.
2) Uzunluğu en fazla $2R'$ olan $r(w_1(t'_1, \ldots, t'_n), \ldots, w_n(t'_1, \ldots, t'_n))$ kelimesi (H, T') grubunda bir eşitlik belirtir.
3) Uzunluğu en fazla $2R'$ olan $r(w_1(s'_1, \ldots, s'_n), \ldots, w_n(s'_1, \ldots, s'_n))$ kelimesi (G, S') grubunda bir eşitlik belirtir.

4) $r(s_1,\dots,s_n)$ kelimesi (G,S) grubunda bir eşitlik belirtir.

Kanıt. 1 $\iff$ 2 Biliyoruz ki her t_i için $t_i = w_i(t'_1,\dots,t'_n)$ şeklinde bir $w_i(t'_1,\dots,t'_n) \in (G,S')$ kelimesi vardır. Bu durumda

$$r(w_1(t'_1,\dots,t'_n),\dots,w_n(t'_1,\dots,t'_n))$$

kelimesi (G,S') grubunda bir eşitlik belirtir ancak ve ancak $r(t_1,\dots,t_n)$ kelimesi (H,T) grubunda bir eşitlik belirtiyorsa. Bu durumda $r(t_1,\dots,t_n)$ kelimesinin uzunluğu en fazla $2R$ olur ve karşılık gelen eşitlik R' yarıçaplı top içinde kalır. Dolayısıyla bu eşitliğin uzunluğu en fazla $2R'$ olabilir.
2 $\iff$ 3 Uzunluğu en fazla $2R'$ olan $r(w_1(t'_1,\dots,t'_n),\dots,w_n(t'_1,\dots,t'_n))$ kelimesi (H,T') grubunda bir eşitlik belirtsin. Biliyoruz ki (H,T') ve (G,S') gruplarında R' yarıçaplı toplar izomorfiktir. Dolayısıyla

$$r(w_1(t'_1,\dots,t'_n),\dots,w_n(t'_1,\dots,t'_n))$$

kelimesine izomorfik bir

$$r(w_1(s'_1,\dots,s'_n),\dots,w_n(s'_1,\dots,s'_n))$$

kelimesi vardır ve uzunluğu en fazla $2R'$ olmalıdır. Benzer biçimde tersi de gösterilebilir. 3 $\iff$ 4 İlk paragrafta kullanılan yöntem aynı şekilde kullanılarak elde edilir.$\diamond$

Sonuç olarak (H,T) grubu (G,S) grubunun R yarıçaplı topları izomorfiktir.

■

Lemma 3.21. *Sature edilmiş bir $A \subseteq \mathcal{G}(E)$ kümesinin kapanışı da sature edilmiştir.*

Kanıt. Sature edilmiş bir $A \subseteq \mathcal{G}(E)$ kümesi alalım. Bu kümenin tümleyeninin içi A kümesi ile kesişmeyen en büyük açık kümedir. Bu kümeye U diyelim ve U kümesinin saturasyonuna V diyelim. V kümesi ile A kümesi kesişemez, çünkü eğer ortak bir elemanları varsa bu demektir ki bir $(G, S) \in A$ için ve $(G', S') \in U$ için $G \cong G'$ olur, ancak bu imkansız. V kümesinin açık bir küme olduğunu bildiğimize göre $V = U$ olmalı. Şimdi V sature edilmiş bir küme olduğunu göre tümleyeni ile bir kesişimi olamaz, dolayısıyla tümleyeni de kendi içinde sature edilmiş olmalıdır. Bu demektir ki $\mathcal{G}(E) \backslash V = \bar{A}$ kümesi sature edilmiştir. $\blacksquare$

Bölüm 4

Limit Gruplara Giriş

Bu bölümde limit grupların tanımını verip limit grupların temel özelliklerini inceleyeceğiz ve limit grup örnekleri vereceğiz.

Tanım. $\mathcal{G}_n$ uzayında bir serbest gruplar dizisinin limiti olan gruplara limit grup denir.

Bu tanımı ele alarak limit grupların açık ve kapalı cebirsel özelliklerin hangilerini sağladığını bulmaya çalışalım. $\mathcal{L}_n$ ile $\mathcal{G}_n$ uzayında serbest grupların kapanışının kümesini gösterelim. Kapalı kümeler limit noktalarını içerdiğinden ve bu kümede her eleman bir limit noktası olduğundan $\mathcal{L}_n$ limit grupların kümesidir.

Önerme 4.1. *Limit gruplar değişmesi geçişlidir, CSA'dır ve burulmalı değildir.*

Kanıt. Limit grupların değişmesi geçişli, CSA olduğunu ve burulmalı olmadığını göstermek için Önerme 3.17'yi hatırlayalım, tüm serbest grupların değişmesi geçişli, CSA ve burulmalı olmayan gruplar olduklarını biliyoruz. Lemma 3.18'de gösterdik ki değişmesi geçişlilik ve CSA olma özellikleri kapalı özelliklerdir. Burulmasızlığı kanıtlamak için Lemma 3.19'u hatırlayalım. Burulmalı elemana sahip olmak açık bir özellik olduğundan burulmalı olmamak kapalı bir özelliktir. Kapalı kümeler alt kümelerinin kapanışını içerdiklerinden bu özellikler limit gruplarda sağlanır. ■

Sonuç 4.2. *Limit grup olmak işaret kümesine göre ya da işaretin seçildiği* $\mathcal{G}_n$ *(ya da* $\mathcal{G}(E)$*) uzayına göre değişmez.*

Kanıt. Lemma 3.21 ile limit grupların kümesinin sature edilmiş olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $\mathcal{G}(E)$ uzayında bir G işaretli grubu limit grup ise G'nin başka bir işaret kümesi ile oluşturulan işaretli grubu yine limit grup olacaktır. Yani limit grup olmak işaret kümesine göre değişmez. Topolojik uzaya göre değişmeyeceğini göstermek için $\mathcal{G}(E) \in \mathcal{G}_n$ alalım. Eğer bir grup $\mathcal{G}(E)$ uzayında limit grup ise $\mathcal{G}_n$ uzayında da limit grup olacağı aşikar. Diğer tarafı göstermek için $\mathcal{G}_n$ uzayında (G_i, S_i) serbest gruplar dizisinin limiti olan $(G, S) \in \mathcal{G}(E)$ grubu alalım. O halde yeteri kadar büyük bir i için (G_i, S_i) grupları $\mathcal{G}(E)$ uzayının içinde olurlar. Bu durumda (G, S) bu dizi için limit olur, gruplar serbest olduğu için (G, S) limit gruptur. ■

Sonuç 4.3. *$k = 1, 2, \dots, n$ için $\mathcal{G}_n$ uzayında,*

$$\overline{[\mathbb{Z}^k]}_{\mathcal{G}_n} = [\mathbb{Z}^k]_{\mathcal{G}_n} \cup [\mathbb{Z}^{k+1}]_{\mathcal{G}_n} \cup \dots \cup [\mathbb{Z}^n]_{\mathcal{G}_n}$$

sağlanır.

Kanıt. Bir $p \in \{k \dots, n\}$ alalım. Örnek 3'te olduğu gibi $\mathbb{Z}^p$ grubuna yakınsayan bir $(\mathbb{Z}^k, S_i)$ dizisi oluşturabiliriz. $\mathbb{Z}^k$ işaretlemeleri ile oluşturulan kümenin kapanışı sature edilmiş olduğuna göre $\mathbb{Z}^p$ grubunun tüm işaretlemeleri $\mathbb{Z}^k$'nın tüm işaretlemelerinin limiti olur. Yani $\overline{[\mathbb{Z}^k]}_{\mathcal{G}_n} \supseteq [\mathbb{Z}^k]_{\mathcal{G}_n} \cup [\mathbb{Z}^{k+1}]_{\mathcal{G}_n} \cup \dots \cup [\mathbb{Z}^n]_{\mathcal{G}_n}$ olur. Diğer taraftan eğer (G, S) grubu $\mathbb{Z}^k$ grubunun tüm işaretli gruplarının kümesinin limiti ise o halde burulmasız olmak ve abelyan olmak kapalı özellikler olduğundan ve limit kapanışta olduğundan (G, S) grubu abelyan ve burulmasız olmalıdır. Dolayısıyla diğer taraf sağlanır. ■

4.1 Limit Grupların Altgrupları

Bu bölümde limit grupların altgruplarının yine limit grup olduğunu kanıtlayacağız.

Önerme 4.4. *(G, S) işaretli grubuna yakınsayan (G_i, S_i) işaretli gruplar dizisi olsun ve H ise G grubunun $T = (t_1, \ldots, t_p)$ üreteci ile işaretlenmiş bir altgrubu olsun.*

O halde yeteri kadar büyük bir i için $T_i = (t_1^i, \ldots, t_p^i)$ kümeleri ile işaretlenmiş $H_i = \langle T_i \rangle \leqslant G_i$ altgrupları vardır ve (H_i, T_i) grupları dizisi (H, T) grubuna yakınsar.

Kanıt. (G, S) grubunun Cayley çizgesinde T kümesinin elemanlarının tamamını içeren R yarıçaplı bir B topu alalım. (G_i, S_i) dizisi (G, S) grubuna yakınsadığına göre bir i için B topuna izomorfik bir B_i topuna sahip bir (G_i, S_i) grubu vardır. T_i kümesi bu izomorfizma altında T kümesinin elemanlarının gittiği elemanlardan oluşturulsun. Bu durumda H grubunda T elemanları ile yazılabilecek bir kelime ilişki beilirtir ancak ve ancak karşılık gelen T_i elemanları ile yazılan kelime H_i grubunda ilişki belirtiyorsa. Yani (H_i, T_i) dizisi (H, T) grubuna yakınsar. ∎

Sonuç 4.5. *Limit grupların sonlu üreteçli altgrupları limit gruptur.*

Kanıt. Limit gruplara yakınsayan gruplar dizisi serbest gruplardan oluşmakta. Teorem 4.8'dan dolayı altgruplardan oluşturulan dizi yine serbest gruplardan oluşacaktır. Dolayısıyla Önerme 4.4'den dolayı limit grubun altgrubu yine limit grup olur. ∎

Önerme 4.6. *Bir limit grubun iki elemanı $\{1\}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$ ya da F_2 gruplarından birini üretir.*

Kanıt. Sonlu üreteçli limit grupların altgruplarının yine limit grup olduğunu bildiğimizden sadece iki üreteçli limit grupların abelyan olmayan ya da abelyan olan serbest gruplara izomorfik olup olmadığını incelememiz yeterli. $(G, \{a, b\})$ bir limit grup olsun. O halde bu gruba yakınsayan bir $(G_i, \{a_i, b_i\})$ serbest gruplar dizisi vardır. Eğer a ve b elemanları bir ilişki sağlamıyorsa o halde grubumuz F_2 grubuna izomorfiktir. Diyelim ki a ve b elemanları bir ilişki sağlıyor olsun. O halde $(G_i, \{a_i, b_i\})$ serbest gruplar dizisi $(G, \{a, b\})$ grubuna yakınsadığından belli bir $M \in \mathbb{N}$ değerinden sonraki tüm i'ler için G_i grupları bir ilişki sağlamalı. Ancak G_i grupları serbest grup olduklarından bu demektir ki a_i ve b_i elemanları devirli grup üretiyorlar. Sonuç 4.3'te gösterdik ki

$$\overline{[\mathbb{Z}^k]}_{\mathcal{G}_n} = [\mathbb{Z}^k]_{\mathcal{G}_n} \cup [\mathbb{Z}^{k+1}]_{\mathcal{G}_n} \cup \cdots \cup [\mathbb{Z}^n]_{\mathcal{G}_n}$$

sağlanıyor. O halde

$$\overline{[\mathbb{Z}, \{1\}]}_{\mathcal{G}_2} = [\{1\}]_{\mathcal{G}_2} \cup [\mathbb{Z}]_{\mathcal{G}_2} \cup [\mathbb{Z}^2]_{\mathcal{G}_2}$$

sağlanır. ■

Tanım. (G_1, S_1) ve (G_2, S_2) iki işaretli grup olsun ve H_1 ve H_2 grupları ise sırasıyla G_1 ve G_2 gruplarının altgrupları olsunlar. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa $(G_1, S_1), H_1$ ve $(G_2, S_2), H_2$ ikilileri e^{-R}-Hausdorff yakındır denir.

1) (G_1, S_1) ve (G_2, S_2) gruplarının Cayley çizgelerinin R yarıçaplı topları izomorfik ise.

2) Bir G grubunun Cayley çizgsinde bir H altgrubunun görüntüsüne H grubunun izi diyelim. R yarıçaplı toplarda H_1 ve H_2 gruplarının izleri çakışıyorsa.

Tanım. Bir (G_i, S_i) gruplar dizisi belli bir i'den sonra (G, S) grubuna Hausdorff yakınsa (G_i, S_i) dizisi (G, S) grubuna Hausdorff yakınsaktır denir.

Lemma 4.7. *(G,S) grubuna yakınsayan (G_i,S_i) dizisini alalım ve bir $x \in G$ elemanını sabitleyelim. Yeteri kadar büyük bir $i \in \mathbb{N}$ için G_i grubunda x elemanına karşılık gelen bir x_i elemanı olacaktır.*

$C_G(x)$ ile x elmanının merkezleyicisini belirtelim. O halde $C_{G_i}(x_i)$ gruplar dizisi $C_G(x)$ grubuna Hausdorff yakınsaktır.

Kanıt. x elemanı ile değişmeli olan ve uzunluğu R olan tüm elemanları $(R+|x|)$ yarıçaplı topta okuyabiliriz. (G_i,S_i) grubu (G,S) grubuna yakınsadığına göre belli bir R yarıçapından sonra x'e karşılık gelen x_i elemanları x ile aynı ilişkileri sağlayacağından x ile değişmeli olan elemanlara karşılık gelen elemanlar da x_i elemanlarının merkezleyicisinde yer alacaklardır. Dolayısıyla $C_{G_i}(x_i)$ gruplar dizisi $C_G(x)$ grubuna Hausdorff yakınsak olacaktır. ■

4.2 Limit Grupların Serbest ve Birleştirilmiş Çarpımı

Gruplardan yeni grup elde etmek için akla gelen ilk yöntem direkt çarpımdır. Ancak bu yöntem limit gruplarda işe yaramayabiliyor. Çünkü iki limit grubun çarpımı aşikar durumlar dışında limit grup olmaz. İlk olarak böyle bir örnek verelim, ardından limit grupların serbest ve birleştirilmiş çarpımlarının yine limit grup olduğunu göstereceğiz.

Örnek 8. $F_2 = \langle a,b\rangle$ ve $\mathbb{Z}$ limit gruplarını ele alalım ve $F_2 \times \mathbb{Z}$ direkt çarpımını inceleyelim. F_2 grubunun birim elemanını e ile gösterelim. Eğer $F_2 \times \mathbb{Z}$ grubu bir limit grup ise değişmesi geçişli olmalı. Ancak $(b,1)(e,2) = (e,2)(b,1)$ ve $(a,1)(e,2) = (e,2)(a,1)$ iken $(a,1)(b,1) \neq (b,1)(a,1)$, dolayısıyla $F_2 \times \mathbb{Z}$ grubu değişmesi geçişli değil. $n,m \geq 2$ için $F_n \times F_m$ grubunun limit grup olmadığı benzer biçimde gösterilebilir.

$S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ve $S' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_n)$ sıralı kümeleri verilmiş olsun. $S \vee S'$ ile $(s_1, \ldots, s_n, s'_1, \ldots, s'_n)$ sıralı kümesini belirteceğiz.

Lemma 4.8. *$(G_i, S_i) \in \mathcal{G}_n$ ve $(G'_i, S'_i) \in \mathcal{G}_{n'}$ dizileri sırasıyla (G, S) ve (G', S') gruplarına yakınsayan diziler olsunlar. O halde $(G_i * G'_i, S_i \vee S'_i)$ dizisi $\mathcal{G}_{n+n'}$ uzayında $(G * G', S \vee S')$ grubuna yakınsar.*

Kanıt. $\mathcal{G}_{n+n'}$ uzayında $(G_i * G'_i, S_i \vee S'_i)$ dizisinin $(G * G', S \vee S')$ grubuna yakınsadığını göstermek için aldığımız herhangi bir w kelimesinin belli bir $M \in \mathbb{N}$ için $(G_i * G'_i, S_i \vee S'_i)$ dizisindeki gruplarda her $i \geq M$ için $(G_i * G'_i)$ grubunda $w = 1$ ancak ve ancak $(G * G', S \vee S')$ grubunda $w = 1$ olduğunu göstereceğiz. O halde önce $F_{n+n'}$ grubundan rastgele bir w kelimesi alalım. $S_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $S'_i = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ için $w = w(x_1, x_2, \ldots, x'_n)$ olarak üreteç kümesinin elemanları ile yeniden yazılabilir. O halde bu kelimenin üreteç kümesi ile yazılmış halini inceleyelim. Kelimenin S_i kümesinden elemanlar ile yazılmış bölümünü ve S'_i kümesinden elemanlar ile yazılmış bölümünü ayrı ayrı inceleyelim. $w_1 = w(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1, 1, \ldots, 1)$ ve $w_2 = (1, 1, \ldots, 1, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ olsun. (G_i, S_i) grubu (G, S) grubuna yakınsadığından biliyoruz ki belli bir $M_1 \in \mathbb{N}$'den sonra w_1 kelimesi $(G * G', S \vee S')$ grubunda eğer $w_1 = 1$ ise $(G * G', S \vee S')$ grubunda da $w_1 = 1$ olacak. Aynı şekilde w_2 içinde belli bir $M_2 \in \mathbb{N}$'den sonra w_2 için aynı durum geçerli olacak. Eğer biz bu iki değerin maksimumunu seçip M dersek, M değerinden sonra her iki kelime de $(G * G', S \vee S')$ içinde aynı ilişkileri sağlayacak. Dolayısıyla w kelimesi $(G_i * G'_i, S_i \vee S'_i)$ dizisindeki gruplarda her $i \geq M$'de $w = 1$ ise $(G * G', S \vee S')$ grubunda $w = 1$ olacak. Şimdi $(G * G', S \vee S')$ grubundan bir w kelimesi aldığımızı varsayalım. w kelimesinin sadeleştirilmiş biçimde eşsiz bir yazımı olduğunu biliyoruz. Bu yazım $w = g_1 g_2 \ldots g_n$ olsun, burada her bir g_i elemanı G ya da G' gruplarından birinin elemanıdır ve g_{i+1} elemanı

g_i elemanının bulunmadığı grubun elemanıdır. Eğer $w = 1$ ise bu kelimenin sadeleştirilmiş yazımı başka bir biçimde olamayacağından $G_i * G'_i$ grubunda yine $w = 1$ olur. ■

Tanım. (A, S) ve (A', S') iki işaretli grup olsunlar, C ve C' grupları A ve A' gruplarının altgrupları olsunlar. $(A, S), C$ ve $(A', S'), C'$ ikililerini yapıştırmak demek bir $\varphi : C \longrightarrow C'$ izomorfizması demektir.

Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa $(A_1, S_1), C_1$ ve $(A'_1, S'_1), C'_1$ yapıştırılması olan φ_1 ve $(A_2, S_2), C_2$ ve $(A'_2, S'_2), C'_2$ yapıştırılması olan φ_2 birbirlerine e^{-R} yakındır denir.

1) C_1 grubu C_2 grubuna ve C'_1 grubu ise C'_2 grubuna e^{-R}-Hausdorff yakın ise.

2) $\varphi_1|_{C_1 \cap B_R(A_1,S_1)}$ ve $\varphi_1|_{C_1 \cap B_R(A_1,S_1)}$ kısıtlamaları $B_R(A_1, S_1)$ ve $B_R(A_2, S_2)$ üzerinde aynı şekilde davranırlarsa

Önerme 4.9. *Bir $G_i = A_i *_{C_i = \varphi_i(C_i)} A'_i$ dizisi ve $G = A *_{C = \varphi(C)} A'$ grubu alalım. S_i, S'_i, S, S' işaretli kümeleri sırasıyla A_i, A'_i, A, A' gruplarının üreteçleri olsunlar. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(G_i, S_i \vee S'_i)$ grubu $(G, S \vee S')$ grubuna yakınsar.*

1) (A_i, S_i) gurubu (A, S) grubuna yakınsıyorsa,

2) (A'_i, S'_i) gurubu (A', S') grubuna yakınsıyorsa,

3) Hausdorff topolojisinde C_i grubu C grubuna yakınsıyorsa,

4) Hausdorff topolojisinde C'_i grubu C' grubuna yakınsıyorsa,

5) φ_i yapıştırması φ yapıştırmasına yakınsıyorsa.

Kanıt. Lemma 20'ye benzer bir şekilde gösterilebilir. ■

Önerme 4.10. *(G, S) işaretli grubuna yakınsayan bir (G_i, S_i) işaretli gruplar dizisi alalım. Her bir i için H_i grubu G_i grubunun bölüm grubu olsun ve sıralı* *üreteç kümesi T_i, S_i'nin epimorfizma altındaki görüntüsü olsun. Diyelim ki (H_i, T_i) dizisi bir (H, T) grubuna yakınsasın. O halde (H, T) grubu (G, S) grubunun bir bölüm grubudur.*

Kanıt. (G_i, S_i) grubundan (H_i, T_i) grubuna yazılan izomorfzma ve (G_i, S_i) grubunun (G, S) grubuna yakınsaması ve (H_i, T_i) grubunun (H, T) grubuna yakınsaması göz önüne alındığında tek kontrol edilmesi gereken nokta G'deki ilişkilerin H'de sağlanıp sağlanmadığı. Eğer S kümesinden bir ilişki yazdıysak yeteri kadar büyük bir i için bu ilişki S_i ile aynı şekilde yazılır. Dolayısıyla epimorfizma ile taşındığında T_i ile de yazılır. T_i bu ilişkiyi içeriyorsa tabii ki T'de içermeli. O halde (H, T) grubu (G, S) grubunun bir bölüm grubudur.

$\blacksquare$

Bölüm 5

Limit Grupların Özellikleri

Bu bölümde limit grupların temel özelliklerini inceleyeceğiz ve serbest gruplardan farklı limit grup örnekleri vereceğiz. İlk olarak sonlu üreteçli tamamen artık serbest grupların limit grup olduğunu kanıtlayarak yeni limit grup örnekleri elde edeceğiz. Bu bölümde [7] kitabından ve [1] makalesinden yararlanıldı.

Önerme 5.1. *Limit grupların serbest çarpımı yine limit gruptur.*

Kanıt. (G, S) ve (G', S') iki limit grup olsunlar, biz $(G * G', S \vee S')$ grubunun limit grup olduğunu göstereceğiz. (G, S) ve (G', S') limit grup olduklarından bu iki gruba yakınsayan serbest gruplar dizileri vardır. (G, S) grubuna yakınsayan serbest gruplar dizisini (G_i, S_i) ile ve (G', S') grubuna yakınsayan serbest gruplar dizisini ise (G'_i, S'_i) ile gösterelim. Lemma 4.8'te gösterdik ki $(G_i * G'_i, S_i \vee S'_i)$ gruplar dizisi $(G * G', S \vee S')$ grubuna yakınsar. Serbest grupları serbest çarpımı yine serbest grup olduğundan $(G_i * G'_i, S_i \vee S'_i)$ dizisi bir serbest gruplar dizisidir. O halde $(G * G', S \vee S')$ grubu bir limit gruptur. ■

5.1 Tamamen Artık Serbest Gruplar

Tanım. G grubunun birimden farklı her g elemanı için $h(g) \neq e$ sağlayan, herhangi bir serbest gruba giden bir $h : G \to F$ homomorfizması yazılabiliyorsa G grubuna artık serbest grup denir.

Eğer G grubunun her sonlu sayıda $g_1, \ldots, g_n$ elemanı için $i \in \{1, \ldots, n\}$ olmak üzere $h(g_i) \neq e$ sağlayan $h : G \to F$ şeklinde herhangi bir serbest gruba giden h homomorfizması yazılabiliyorsa G grubuna tamamen artık serbest grup denir.

Bu tanıma denk bir tanım olarak tamamen artık serbest gruplar için aşağıdaki tanım da verilebilir.

Eğer G grubunun her sonlu sayıda $g_1, \ldots g_n$ elemanı için $g_1, \ldots g_n \notin N$ olan ve G/N grubunun serbest grup olduğu bir $N \trianglelefteq G$ normal altgrubu bulunabiliyorsa G'ye tamamen artık serbest grup denir.

Örnekler.

- Serbest gruplar ve serbest abelyan gruplar tamamen arık serbest gruplardır.
- $F_2 \times \mathbb{Z}$ grubu artık serbest bir gruptur ancak tamamen artık serbest değildir.

Teorem 5.2. *G grubu sonlu üreteçli tamamen artık serbest bir grup olsun. O halde G grubu bir limit gruptur.*

Kanıt. G grubu üreteç kümesi $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ olan tamamen artık serbest bir grup olsun. (G, S) işaretli grubu ile $Cay(G, S)$ çizgelerini ele alalım. Kolayca görülebilir ki her $n \geqslant 1$ için (G, S) grubunda S üretecinden kelimelerle yazılabilecek uzunluğu en fazla n olan elemanların sayısı sonludur ve bu elemanların tamamı $Cay(G, S)$ çizgesinde $B^n_{(G,S)}$ topunu oluştururlar. Birim eleman hariç bu elemanları $g_1, g_2, \ldots, g_m$ ile gösterelim. (G, S) grubu tamamen artık serbest olduğuna göre öyle bir $\theta_n : (G, S) \to (F_k, S')$ homomorfizması vardır ki $\theta_n(g_1) \neq e, \ldots, \theta_n(g_m) \neq e$ sağlanır. θ_n fonksiyonunun imajını $\theta_n(G)$ ile gösterelim. İmaj kümesi görüntü kümesinin alt grubu olduğundan $\theta_n(G) \leqslant F_k$ olur. Teorem 3.1'dan biliyoruz ki serbest grupların alt grupları sebesttir, dolayısıyla $\theta_n(G)$ grubu sebest bir gruptur. $\theta_n(S)$ kümesi $Im(\theta_n)$ için üreteç kümesidir. Dolayısıyla elimizde bir $(\theta_n(G), \theta_n(S))$ işaretli grubu var ve üreteç sayısı k olacağı için $(\theta_n(G), \theta_n(S)) \in \mathcal{G}_k$ sağlanıyor.

Şimdi $(\theta_n(G), \theta_n(S))$ grubunda uzunluğu en fazla n olan elemanlara bakalım, başka bir deyişle $B_{(\theta_n(G), \theta_n(S))}(n)$ topuna bakalım. Bu elemanlar $\theta_n(S)$ üreteci ile yazıldığından yukarıda yazmış olduğumuz bir $g_i \in \{g_1, \ldots, g_m\}$ elemanının görüntüsü olmalıdır. Eğer bu elemanlardan biri birim elemana eşitse, yani uzunluğu n'den küçük olan elemanlardan herhangi bir $\theta_n(g_i) \in B_{(\theta_n(G), \theta_n(S))}(n)$ için $\theta_n(g_i) = e$ ise çelişki elde ederiz. Demek ki θ_n homomorfizması $B_{(G,S)}(n)$ ve $B_{(\theta_n(G), \theta_n(S))}(n)$ arasında bir graf izomorfizmasıdır.

Şimdi yaptıklarımızı toparlayalım. Rastgele bir $n \geqslant 1$ doğal sayısı aldık ve gösterdik ki n yarıçaplı topu (G, S) grubu ile izomorfik olan bir $(\theta_n(G), \theta_n(S))$ serbest grubu vardır. Dolayısıyla n sayısı sonsuza giderken bu grupların limiti (G, S) grubudur. Yani G grubu limit gruptur. ■

Lemma 5.3. *Artık serbest gruplar burulmalı değildir.*

Kanıt. G tamamen artık serbest bir grup olsun. O halde her $g \in G \setminus \{e\}$ için bir F serbest grubuna giden $\phi : G \to F$ homomorfizması vardır öyle ki $\phi(g) \neq e$. Bu durumda $\phi(g) \in F$ olduğu için burulmasızdır. Yani herhangi $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için $\phi(g)^n \neq e$ olur. ϕ bir homomorfizma olduğundan $\phi(g)^n = \phi(g^n) \neq e$ sağlanır. Bu demektir ki her $g \in G \setminus \{e\}$ için ve herhangi $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için $g^n \neq e$ sağlanır. ■

Teorem 5.4. *(Baumslag) G sonlu üreteçli grubu için aşağıdaki özellikler denktir.*

1. *G grubu tamamen artık serbest gruptur.*
2. *G grubu artık serbest gruptur ve değişmesi geçişlidir.*
3. *G grubu artık serbesttir ve $F_2 \times \mathbb{Z}$ grubuna izomorfik bir altgrubu yoktur.*

Kanıt. $(1 \Rightarrow 2)$ Eğer G grubu tamamen artık serbest ise artık serbest grup olacağı aşikar. Biz G grubunun değişmesi geçişli olduğunu gösterelim. Diyelim ki $a, b, c \in G$ için $[a, b] = e$, $[b, c] = e$ ancak $[a, c] \neq e$ olsun. G grubu tamamen artık serbest grup olduğundan $a, b, c, [a, c] \in G$ elemanları için G grubundan bir F serbest grubuna $\phi(a) \neq e$, $\phi(b) \neq e$, $\phi(c) \neq e$ ve $\phi([a, c]) \neq e$ sağlayan bir $\phi : G \to F$ homomorfizması vardır.

Bu homomorfizma altında $[a, b] = e, [b, c] = e, [a, c] \neq e$ elemanlarını inceleyelim. $\phi([a, b]) = \phi(aba^{-1}b^{-1}) = \phi(a)\phi(b)\phi(a)^{-1}\phi(b)^{-1} = [\phi(a), \phi(b)] = e$ olmalı. Aynı şekilde $\phi([b, c]) = [\phi(b), \phi(c)] = e$ olduğu gösterilebilir. O halde $\phi(a), \phi(b) \in F$ elemanları birbirleri ile değişmelidirler, aynı şekilde $\phi(b), \phi(c) \in F$ elemanları birbirleri ile değişmelidirler. Bir serbest grupta iki farklı eleman değişmelidir ancak ve ancak ikisi de serbest gruptaki bir elemanın birer kuvveti iseler. Yani $\phi(a), \phi(b)$ değişmeli olduğuna göre bir $s \in F$ için ve $n, m \in \mathbb{Z}$ için $\phi(a) = s^n, \phi(b) = s^m$ olmalı. Aynı biçimde $\phi(b), \phi(c) \in F$ değişmeli olduğundan bir $k \in \mathbb{Z}$ için $\phi(c) = s^k$ olmalı. ancak bu durumda $\phi(a)$ ve $\phi(c)$ elemanları değişmeli oluyor, yani $\phi([a, c]) = e$ oluyor. Bu bize bir çelişki verdi. Bu demektir ki tamamen artık serbest G grubu değişmesi geçişlidir.

$(2 \Rightarrow 3)$ Diyelim ki G tamamen artık serbest grubunun $F_2 \times \mathbb{Z}$ grubuna izomorfik bir H alt grubu olsun. $F_2 \times \mathbb{Z}$ grubunun F_2 grubuna ve $\mathbb{Z}$ grubuna izomorfik altgrupları olduğu için H grubunun da vardır. Bu durumda

G grubunun F_2 grubuna ve $\mathbb{Z}$ grubuna izomorfik altgrupları vardır. Bu altgruplara F_2' ve $\mathbb{Z}'$ diyelim. Dikkat edilirse $\mathbb{Z}'$ grubu aynı zamanda $F_2 \times \mathbb{Z}$ grubunun merkezleyicisine izomorfik, yani her eleman ile değişmeli. Bu durumda $s_1, s_2 \in F_2'$ üreteç elemanları ve $c \in \mathbb{Z}'$ için $[s_1, c] = e$ ve $[s_2, c] = e$ sağlanıyor ama $[s_1, s_2] \neq e$ çünkü üreteç elemanları değişmeli olamaz. Bu durumda $s_1, s_2, c \in G$ oldukları için G değişmesi geçişli olmamalı. Ancak (2) şıkkından G grubunun değişmesi geçişli olduğunu biliyoruz. Çelişki elde ettik. Demek ki G grubunun $F_2 \times \mathbb{Z}$ grubuna izomorfik bir altgrubu olamaz.

($3 \Rightarrow 1$) Önermenin karşıt tersini ispatlayalım. Diyelim ki G grubu tamamen artık serbest olmasın. O halde G grubu değişmesi geçişli değildir. Bu demektir ki a, b, c elemanları için $[a, b] = e, [b, c] = e, [a, c] \neq e$ sağlanır. O halde $F_2' = \langle a, c \rangle$ serbest çarpımı ile üretilen grup elemanlar burulmasız olduğu için F_2 grubuna izomorfik olur. Diğer taraftan $\mathbb{Z}' = \langle b \rangle$ grubu ise $\mathbb{Z}$ grubuna izomorfik olur. Bu durumda $F_2' \cap \mathbb{Z} = \{e\}$ olacağı için $F_2' \times \mathbb{Z}'$ grubu G grubunun bir altgrubu olur. ■

5.2 Merkezleyici ile Serbest Genişleme

Bu bölümde merkezleyicisi ile serbest genişleyen limit grupların yine limit grup olduklarını göstereceğiz.

Tanım. G grubunun herhangi bir elemanının merkezleyicisini Z ile gösterelim ve A sonlu üreteçli abelyan bir serbest grup olsun. O halde $G *_Z (Z \times A)$ grubuna G'nin merkezleyicisi ile serbest genişlemesi denir.

Tanım. Bir serbest grubun sonlu sayıda merkezleyicisinin serbest genişlemesi ile oluşturulan G grubuna serbest grubun merkezleyicisinin tekrarlanan genişlemesi adı verilir.

Bu şekilde oluşturulan bir G grubunun sonlu üreteçli altgruplarının kümesini $sub-\mathcal{ICE}$ ile göstereceğiz.

Tanım (Alternatif)**.** G bir grup olsun ve $C_G(u)$ ile G grubunun birimden farklı bir u elemanının merkezleyicisini gösterelim. Grubun elemanı olmayan yeni bir t harfi ile oluşturulan $G_1 = \langle G, t | [C_G(u), t] = 1 \rangle$ grubuna G grubunun merkezleyicisi ile serbest genişlemesi adı verilir.

Eğer $G < G_1 < G_2 < \cdots < G_n <$ dizisinde her bir G_{i+1} grubu G_i grubunun merkezleyicisinin genişlemesi ise, yani $G_{i+1} = \langle G_i, t_i | [C_{G_i}(u_i), t_i] = 1 \rangle$ ise G_n grubuna G grubunun merkezleyicisi ile tekrarlanan genişlemesi adı verilir. Eğer G grubu serbest ise serbest grubun merkezleyicisinin tekrarlanan genişlemesi olarak adlandırılır.

Lemma 5.5. *F tamamen artık serbest bir grup ve $f_1, f_2, \ldots, f_k, u \in F$ olsun, öyle ki u elemanı f_i elamanlarının hiçbiri ile yer değiştirmesin, başka bir deyişle $u \notin \bigcup C_F(f_i)$ olsun. O halde $(f_1)u^{n_1} f_2 u^{n_2} \ldots f_k(u^{n_k}) \neq e$ eşitsizliğini sağlayan yeteri kadar büyük $|n_i| \in \mathbb{N}$'ler bulunabilir.*

Not. $(f_1)u^{n_1} f_2 u^{n_2} \ldots f_k(u^{n_k})$ gösteriminde baştaki sondaki elemanlarının parantez içinde yazılmasının sebebi gösterimin bu elemanlarla başlayıp bitmek zorunda olmadığını göstermek içindir.

Kanıt. F grubu tamamen artık serbest olduğundan ve her f_i için $[f_i, u] \neq e$ sağlandığından, öyle bir $N \trianglelefteq F$ normal altgrubu vardır ki F/N serbest grup olur ve her f_i için $[f_i, u] \notin N$ sağlanır.

Eğer $(f_1)u^{n_1} f_2 u^{n_2} \ldots f_k(u^{n_k}) \neq e$ eşitsizliği F/N için doğru ise F grubu için de doğru olmalı, bu sebeple genelliği kaybetmeden F grubunun bir serbest grup olduğunu varsayabiliriz. Aynı şekilde u elemanının devirsel sadeleştirilmiş olduğunu varsayabiliriz, çünkü eğer değilse uygun eşlenikleri alarak devirsel sadeleştirilmiş hale getirebiliriz.

Her f_i için $[f_i, u] \neq e$ ve $\langle f_i, u \rangle \leqslant F$ olduğundan ve bir serbest grubun alt grubu yine serbest grup olduğundan $\langle f_i, u \rangle \cong F_2$ olmalıdır. Dolayısıyla hiçbir f_i elemanı ile u elemanı arasında bir ilişki yazılamaz.Yani özel olarak yeteri kadar büyük bir $|r|$ için için $u^r f_i u^r \in <f_i, u>$ olduğundan $u^r f_i u^r = u^m a u^m \neq e$ $(m \leq r$ ve $a \in F)$ sağlanır.

Şimdi $(f_1)u^{n_1} f_2 u^{n_2} \ldots f_k(u^{n_k})$ formülünün içinden bir $u^{n_{i-1}} f_i u^{n_i} f_{i+1}$ kısmını alıp inceleyelim. $u^{n_{i-1}} f_i u^{n_i}$ kısmı için n_{i-1} üssünü f_i'nin kelimeleri ile sadeleşen kelimelerden sonra hala bir $m_{i-1} \leq n_{i-1}$ kalacak şekilde seçelim. $f_i u^{n_i} f_{i+1}$ kısmında ise n_i üssünü f_i ve f_{i+1} elemanlarının kelimeleri ile sadeleştikten sonra hala bir $u^{m_i} \leq u^{n_i}$ kalacak şekilde seçelim. Bu şekilde tüm elemanları sadeleştirmelerden sonra hala u elemanının bir kuvveti kalacak şekilde seçebiliriz. Sonuç olarak öyle n_i elemanları seçmiş oluruz ki

$$(f_1)u^{n_1} f_2 u^{n_2} \ldots f_k(u^{n_k}) \neq e$$

sağlanır.Bizim istediğimizde tam olarak buydu. ■

Teorem 5.6. *A serbest abelyan bir grup ve $x_0, x_1, \ldots, x_n$ elemanları A'nın üreteçleri olsunlar. F bir tamamen artık serbest grup ve $u \in F$ kendi merkezleyicisini üreten bir eleman olsun. Bu durumda $G = F *_{u=x_0} A$ grubu tamamen artık serbest bir gruptur.*

Kanıt. N grubu $F * A$ grubunun ux^{-1} elemanını içeren en küçük normal altgrup olarak tanımlansın. Bu durumda $G = F * A/N$ olarak görülebilir. G grubundaki herhangi bir eleman $f_i \in F$ ve $a_i \in A$ olmak üzere $(a_0)f_1 a_1 \ldots f_n(a_n)$ biçimindedir. Tabii bu elemanın hiçbir kelimesinin birim olmadığını varsaymak, dolayısıyla grup N grubuna bölündüğü için $f_i \in F/\langle u \rangle$ ve $x_i \notin \langle x_0 \rangle$ olarak seçmek en doğalı olur.

Şimdi her $f_i \in F$ için $\theta(f_i) = f_i$, $i \geq 1$ olmak üzere her $x_i \in A$ için ve herhangi bir $m_i \geq 1$ için $\theta(x_i) = u^{m_i}$ ve x_0 elemanı için $\theta(x_0) = u$ olacak biçimde bir $\theta : F * A \to F * A$ homomorfizması tanımlayalım.

Bu durumda $\theta(ux^{-1}) = \theta(u)\theta(x_0)^{-1} = uu^{-1} = e$ sağlanır. Bu demektir ki $N \trianglelefteq Ker(\theta)$ olmalı. $Ker(\theta)$ normal altgrup,$N \trianglelefteq Ker(\theta)$ ve $Im(\theta) = F$ olduğu için $\varphi : (F*A)N = G \to F$ şeklinde bir homomorfizmanın varlığından söz edilebilir. Bu homomorfizma altında rastgele aldığımız $(a_0)f_1a_1 \ldots f_n(a_n)$ elemanının görüntüsüne bakalım.

$\varphi((a_0)f_1a_1 \ldots f_n(a_n)) = u^{m_{k_1}}f_1u^{m_{k_2}}f_2 \ldots f_nu^{m_{k_n}}$ elde edilir. Lemma 5.5'den biliyoruz ki $u^{m_{k_1}}f_1u^{m_{k_2}}f_2 \ldots f_nu^{m_{k_n}} \neq e$ olacak şekilde m_i elemanları seçebiliriz. Bu durumda bir serbest gruba giden ve birim dışında hiçbir elemanı birim elemana götürmeyen bir homomorfizma yazmış olduk. Tek bir eleman almak yerine sonlu sayıda farklı eleman alıp m_i elemanlarını bu elemanların hiçbirini birime götürmeyecek maksimum elemanlar olarak seçerek birimden farklı elemanlara götürebiliriz. Dolayısıyla G grubu tamamen artık serbest bir gruptur. ■

Sonuç 5.7. *F bir serbest grup C ise F'nin bir maksimal devirli altgrubu olsun ve A ise herhangi bir serbest abelyan grup olsun. O halde F'nin merkezleyici ile serbest genişlemesi olan $F *_C (C \times A)$ grubu tamamen artık serbesttir.*

Kanıt. Serbest grupların altgrupları serbest grup olduğundan ve devirli olan tek serbest grup serbest abelyan grup olduğundan C grubu $\mathbb{Z}$ grubuna izomorfiktir. Bu aynı zamanda demektir ki C grubu bir elemanın merkezleyicisidir, bu elemana c diyelim. Şimdi elimizde iki adet serbest abelyan grup var, C ve A. Serbest abelyan grupların sonlu sayıda direkt çarpımı serbest abelyan grup olduğundan $(C \times A)$ grubu serbest abelyan bir gruptur. Dahası

(c, e) elemanı bu grubun üreteçlerinden biridir. C grubundan $\langle (c, e) \rangle$ grubuna bariz bir izomorfizma var. Bu izomorfizma ile $F *_C (C \times A)$ grubu oluşturulur. Elimizde tamamen artık serbest olan F grubu ve serbest abelyan olan $(C \times A)$ grubu var. (c, e) elemanı $(C \times A)$ grubunun bir üreteci ve c elemanı kendi merkezleyicisini yani C'yi üretiyor. Tüm bu bilgiler ışığında Teorem 5.6'ya göre $F *_C (C \times A)$ grubu tamamen artık serbest bir gruptur. ■

Sonuç 5.8. *F bir serbest grup ve $\overline{F}$ ise onun izomorfik bir kopyası olsun. O halde tam kuvvet olmayan bir $x \in F$ elemanı için $F *_{x=\overline{x}} \overline{F}$ grubu tamamen artık serbesttir.*

Kanıt. [4], Corollary 3.6'ya bakılabilir. ■

Bu sonuç bize bazı güzel limit grup örnekleri veriyor, yüzey gruplarının bazıları limit gruptur.

Örnekler. Kürenin esas grubu $\pi_1(S^2) \cong \{e\}$ ve torusun esas grubu $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olduğu için limit grup oldukları aşikardır. Diğer taraftan iki delikli torusun esas grubu $\langle a, b \rangle *_{[a,b]=[c,d]} \langle c, d \rangle$'dir dolayısıyla Sonuç 5.8'den dolayı bir limit gruptur. Ayrıca $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ve k yapraklı gülün esas grubu F_k'ya izomorfiktir.

5.3 Sonlu Sunumluluğun Sonuçları

Aşağıdaki teoremin kanıtı oldukça zordur ancak birkaç örnek daha verebilmek için kanıtsız kabul edeceğiz.

Teorem 5.9. *Limit gruplar sonlu sunumludur. Limit grupların abelyan altgrupları sonlu üreteçli abelyan serbest gruplardır.*

Kanıt. [12], Corollary 4.4'e bakılabilir. ■

Önerme 5.10. *G bir limit grup ve Z grubu G'nin maksimal ableyan bir altgrubu ve A sonlu üreteçli serbest abelyan bir grup olsun. O halde G grubunun merkezleyicisi ile serbest genişlemesi $H = G *_Z (Z \times A)$ bir limit gruptur.*

Kanıt. G'nin üreteç kümesini $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ile gösterelim. (G, S) bir limit grup olduğundan bu gruba yakınsayan (G_i, S_i) serbest gruplar dizisi vardır. Lemma 3.15'ten dolayı Z grubunu G'nin bir x elemanının merkezleyicisi olarak görebiliriz. Belli bir N değerinden sonra $i \geq N$ için (G_i, S_i) içinde x elemanına denk gelen x_i elamanının merkezleyicisine Z_i diyelim. A grubunun üreteç kümesi $a_1, a_2, \dots, a_k$ olsun. O halde H grubunun üreteç kümesi $\tilde{S} = (s_1, s_2, \dots, s_n, a_1 \dots, a_k)$ olur. $H_i = G_i *_{Z_i} (Z_i \times A)$ grubunun üreteç kümesi ise $\tilde{S}_i = (s_1^{(i)}, \dots, s_n^{(i)}, a_1, \dots, a_k)$ olur. G_i grupları serbest grup olduğundan Sonuç 5.7'den dolayı H_i grubu tamamen artık serbesttir dolayısıyla Teorem 5.2'den dolayı bir limit gruptur. Teorem 5.9'dan dolayı Z grubunun sonlu üreteçli bir grup olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla Önerme 4.9'daki tüm şartlar sağlandığından H_i gruplar dizisi H grubuna yakınsar. O halde H grubu bir limit gruptur. ∎

Sonuç 5.11. *L bir limit grup ve $\overline{L}$ onun izomorfik bir kopyası olsun C birimden farklı bir elemanın merkezleyicisi olmak üzere $L *_C \overline{L}$ bir limit gruptur.*

Teorem 5.12. *Limit gruplar tamamen artık serbest gruplardır.*

Kanıt. (G, S), üreteç kümesi $S = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ olan bir limit grup olsun. Teorem 5.9'dan G grubunun sonlu sunumlu bir grup olduğunu biliyoruz. G grubunun sunumu $G = \langle S \mid R_1, R_2, \dots, R_q \rangle$ olsun. Şimdi G grubundan rastgele birimden farklı $g_1, g_2, \dots, g_p$ elemanlarını alalım. (G, S) işaretli grubunun Cayley çizgesini ele alalım. Bu çizge üzerinde G grubunun sunumundaki ilişkileri okuyabiliriz, ilişkiler sonlu sayıda eleman arasında olacağından bütün ilişkileri içeren sonlu bir top vardır. Aynı şekilde $g_1, \ldots, g_p$ elemanlarının hepsini içeren sonlu bir top bulabiliriz. Bu iki top arasında yarıçapı büyük olanı seçersek hem ilişkileri hem de elemanları içeren bir top seçmiş oluruz, bu topun yarıçapına n diyelim. (G, S) bir limit grup olduğuna göre bu grubun n yarıçaplı topuna ya da n yarıçaplı topu içeren bir topa izomorfik bir topa sahip ve üreteç kümesi $S' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_k)$ olan (F, S') serbest grubu vardır. Bu iki grup arasında $\psi(s_i) = s'_i$ olacak şekilde bir $\psi : G \to F$ fonksiyonu yazalım. Bu fonksiyon üreteç kümeleri arasında yazıldığından ve G'nin bağıntılarını veren R_i'leri aşikar elemana götürdüğünden bir homomorfizmadır. Aldığımız $g_1, \ldots, g_p$ elemanlarının her biri üreteç kümesi ile yazımının homomorfizma altındaki görüntüsüne gidecektir. Yani herhangi bir g_i için $g_i = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_m}$ olduğundan $\psi(g_i) = \psi(s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_m}) = s'_{i_1} s'_{i_2} \ldots s'_{i_m} \neq 1$ olur. Çünkü g_i elemanı (G, S)'nin Cayley çizgesinin n yarıçaplı topunda olduğu için $\psi(g_i)$ elemanı da (F, S)'nin Cayley çizgesinde n yarıçaplı topta olur. Bu durumda rastgele aldığımız sonlu elemanlar topluluğunu homomorfizma altında bir serbest grubun birimden farklı elemanlarına göndermiş olduk. Bu yöntemi alınan her eleman topluluğu için uygulayabileceğimizden (G, S) grubu tamamen artık serbest gruptur diyebiliriz. ∎

Bu teoremle birlikte ilk karakterizasyonumuzu yapabiliriz.

Sonuç 5.13. *Sonlu üreteçli bir grup limit gruptur ancak ve ancak tamamen artık serbest bir grup ise.*

5.4 Limit Grupların Basit Çizgesi

Bu bölümde limit grupların basit çizgesinin yine limit grup olduğunu göstereceğiz.

Tanım. A ve B sonlu üreteçli gruplar olmak üzere oluşturulan $G = A *_C B$ (ya da $G = A*_C$) grubuna eğer aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa L limit grubu için genelleştirilmiş çift denir;

- C grubunun A ve B grubuna olan homomorfizmaları altındaki görüntüsü her iki grup için de maksimal abelyan alt grup ise,
- G grubundan L grubuna bir $\varphi : G \to L$ epimorfizması varsa ve bu epimorfizma A ve B gruplarına kısıtlandığında birebir bir homomorfizmaya dönüşüyorsa.

Tanım. Yukarıdaki gibi bir G grubunun kendi Bass-Serre ağacı üzerine bir etkisi vardır. Bu etki altında G grubunun bir $g \in G$ elemanının sabitlediği elemanlar arasındaki uzaklık çap olarak adlandırılır. Bütün elemanlarının çapının uzunluğu en fazla k ise gruba k-asilindirik grup denir.

Lemma 5.14. *Eğer $G = A *_C B$ biçiminde bir grup bir L limit grubu için genelleştirilmiş çift ise G grubunun parçalanışı 1-asilindiriktir.*

Eğer $G = A*_C$ biçminde bir grup bir L limit grubu için genelleştirilmiş çift ise ya parçalanış 1-asilindiriktir ya da grubun temsili C grubundan A grubuna olan homomorfizmaların görüntüleri çakışacak şekilde yeniden yazılabilir, dolayısıyla parçalanış hiçbir k için k-asilndirik değildir ve G grubu A grubunun bir merkezinin genişlemesi olarak görülebilir.

Kanıt. [4], Lemma 4.8'e bakılabilir. ∎

Önerme 5.15. *G grubu $G = A *_C B$ (veya $G = A*_C$) şeklinde bir grup ve bir L limit grubu için genelleştirilmiş çift olsun. O halde G grubu bir limit gruptur. Tam olarak söylemek gerekirse, $\bar{L}$ grubu L grubuna izomorfik bir grup ve $\hat{C}$, L grubunun bir maksimal abelyan altgrubu olmak üzere G grubu $L *_{\hat{C}=\bar{\hat{C}}} \bar{L}$ grubunun bir altgrubudur.*

Dahası eğer L grubu bir serbest grubun tekrarlı genişlemesinin bir altgrubu ise G grubu da bir altgrup olur.

Kanıt. İlk olarak $G = A *_C B$ durumunu ele alalım. Bu durumda bir L limit grubu için A ve B ile kısıtlandığında birebir olan bir $\varphi : G \longrightarrow L$ epimorfizması vardır. $\hat{C}$ ile L grubunun $\varphi(C)$ grubunu içeren maksimal abelyan altgrubunu gösterelim. $\hat{C} \cap \varphi(A) = \hat{C} \cap \varphi(B) = \varphi(C)$ olmalı, çünkü C grubu A ve B'nin altgrubu. Şimdi $D = L *_{\hat{C}=\bar{\hat{C}}} \bar{L}$ grubunu göz önüne alalım. G grubundan D grubuna A ve B ile kısıtlandığında φ ve $\hat{\varphi}$ olarak davranan bir $\psi : G \longrightarrow D$ yazılabilir. Dolayısıyla $\psi : A *_C B \longrightarrow L *_{\hat{C}=\bar{\hat{C}}} \bar{L}$ göndermesi kısıtlamalar altında birebir ve örten bir homomorfizma olur. Yani $G \cong \varphi(A) *_{\varphi(C)=\overline{\varphi(C)}} \overline{\varphi(B)}$ olur. Eğer $L \in sub - \mathcal{ICE}$ ise D grubu L'nin çifti olduğu için $D \in sub - \mathcal{ICE}$ dolayısıyla $G \in sub - \mathcal{ICE}$ sağlanır.

Şimdi $G = A*_C$ durumunu ele alalım. Bu durum kendi içinde iki farklı duruma ayrılıyor. İlk olarak eğer G grubunun asilindirik olmadığını düşünelim. O halde G grubunun A grubunun bir merkezinin genişlemesi olduğunu Lemma 5.14'den biliyoruz, yani $G = A *_C (C \times \mathbb{Z})$. Yine $\hat{C}$ ile L grubunun $\varphi(C)$ grubunu içeren maksimal abelyan altgrubunu gösterelim. D ise L grubunun bu gruba göre merkezleyicisinin genişlemesi , $D = L *_{\hat{C}} (\hat{C} \times \mathbb{Z})$, olsun. O halde A ile kısıtlandığında φ gibi davranan ve $\mathbb{Z}$'yi kendisine gönderen $\psi : G \longrightarrow D$ göndermesi birebir ve örten olur. Eğer $L \in sub - \mathcal{ICE}$ ise G grubu için aynı durum geçerlidir.

İkinci olarak G grubunun asilindirik olduğunu varsayalım. O halde C grubunun A grubuna giden iki farklı homoorfizma altında iki farklı görüntüsü vardır, bunlara C_1 ve C_2 diyelim. $\hat{C_1}$ ve $\hat{C_2}$ ile L'nin sırasıyla $\varphi(C_1)$ ve $\varphi(C_2)$ gruplarını içeren maksimal abelyan altgruplarını gösterelim. C_1 ve C_2 eşlenik olduklarından ve L grubu değişmesi geçişli olduğundan $\hat{C_1}$ ve $\hat{C_2}$ grupları bir t

elemanı tarafından eşlenik gruplardır. D grubu $\hat{C}_1$ grubunun L grubuna bir içerilme homomorfizması ile bir de t elemanı ile eşlenik alarak oluşturulan homomorfizma ile yazılan HNN genişlemesi olsun , $D = L*_{\hat{C}_1}$. Bu durumda $D = \langle L, t | [C_1, t] = C_1 \rangle$. Yani D, L'nin merkezleyicisinin genişlemesidir, dolayısıyla asilindirik değildir. O halde A kısıtlaması altında φ gibi davranan ve sabit harfi sabit harfe gönderen $\psi : G \to D$ homomorfizması birebirdir. Yani $G \cong \varphi(A)*_{C_1} \leq D$ olur. ■

Lemma 5.16. *$G = A *_C B$ (ya da $A*_C$) bir genelleştirilmiş çift olsun. C' ise birleştirilmiş gruplardan birinin maksimal abelyan alt grubu olsun. Eğer G bir birleştirilmiş çarpım ise ya da asilindirik bir HNN genişlemesi ise o halde C' grubu G grubunun da bir maksimal abelyan altgrubudur. Eğer HNN genişlemesi asilindirik değil ise C' grubu G grubunun maksimal abelyan alt grubudur ancak ve ancak C' grubu ile C grubu eşlenik değil ise.*

Tanım. Bir G grubu Γ grupların çizgesinin esas grubu ise ve aşağıdaki şartları sağlıyorsa G grubuna L üzerinden limit grupların basit çizgesi denir.

- Her bir köşe grubu sonlu üreteçli ise,
- Her bir kenar grubu aşikar olmayan abelyan bir grupsa ve köşe gruplara giden homomorfizmalar altında köşe gruplarının maksimal abelyan alt grubu ise,
- G grubu değişmesi geçişli ise,
- Köşe gruplarına kısıtlandığında birebir olan bir $\varphi : G \to L$ epimorfizması varsa.

Önerme 5.17. *G grubu L limit grubu üzerinden limit grupların basit çizgesi ise G grubu bir limit gruptur. Dahası eğer L bir serbest grubun merkezleyici ile tekrarlanan genişlemesinin alt grubu ise G de aynı grubun altgrubudur.*

Kanıt. Kanıtı grupların çizgesinin kenarları üzerinden yapacağız. Eğer hiç kenar yoksa, çizge sadece bir köşeden ibaretse o halde $\varphi : G \to L$ morfizması birebir olacağı için G grubu L grubuna izomorfik bir limit grup olur. Dolayısıyla istenen sağlanır. Diyelim ki çizgenin iki farklı köşeyi birleştiren bir e kenarı olsun. e kenarının temsil ettiği grup C ve köşe grupları ise A ve B ve $H = A *_C B$ olsun.

İlk olarak çizgeden e kenarını çıkardığımızda iki birbirleriyle bağlantısız kendi içlerinde bağlantılı çizge elde ettiğimizi varsayalım. Bu çizgeleri Γ_A ve Γ_B ile gösterelim. $\hat{C}$ grubu L grubunun $\varphi(C)$ grubunu içeren maksimal abelyan altgrubu olmak üzere $D = L *_{\hat{C}=\bar{\hat{C}}} \bar{L}$ grubunu ele alalım. Önerme 5.15'den biliyoruz ki A grubuna kısıtlandığında φ gibi davranan ve B grubuna kısıtlandığında $\bar{\varphi}$ gibi davranan $\psi : H \to D$ göndermesi birebirdir. ψ göndermesini Γ_A nın esas grubu üzerinden φ gibi davranacak biçimde ve Γ_B üzerinden $\bar{\varphi}$ gibi davranacak biçimde G grubuna genişletebiliriz. Şimdi e kenarının köşelerini birleştirip e kenarını yok edelim, yani köşesi bir H olan bir Γ_0 çizgesi oluşturalım. Biliyoruz ki $\psi : G \to D$ göndermesi yeni çizgede H köşesine kısıtlandığında birebir olacak ve Lemma 5.16'dan dolayı hala her kenar bağladığı köşelerin maksimal abelyan alt grubu.

Şimdi çizgeden e kenarını çıkardığımızda bağlantılı bir çizge kaldığını varsayalım. O halde G grubunu Γ çizgesinin Γ/e kısmını büzerek $\pi_1(\Gamma/e)*_C$ olarak yazabiliriz. Bu HNN genişlemesinin sabit harfine s diyelim. $\hat{C}$ grubu L grubunun $\varphi(C)$ grubunu içeren maksimal abelyan altgrubu olmak üzere $D = L*_{\hat{C}}$ olsun ve bu genişlemenin sabit harfine ise t diyelim. $\psi : G \to D$ göndermesi s

harfini t harfine gönderen ve $\pi_1(\Gamma/e)*_C$ grubuna kısıtlandığında φ gibi davranan bir gönderme olsun. O helde bu gönderme H'ye kısıtlandığında birebir olur. Yine Lemma 5.16'dan tüm kenarlar komşu köşelerin maksimal abelyan alt grubu olurlar.

Şimdi çizgemizin bir köşesinin olduğunu ve en az bir tane e kenarı olduğunu varsayalım, dolayısıyla grubumuzun $A*_C$ biçiminde bir HNN genişlemesi olduğunu varsayalım. Eğer grup asilindirik ise benzer biçimde yine G grubunu $\pi_1(\Gamma/e)*_C$ olarak yazabiliriz. Yine $\psi : G \to D = L*_{\hat{C}}$ göndermesini tanımlayabiliriz ve önceki durumda olduğu gibi tüm istenenler sağlanır. Eğer grup asilindirik değilse ve sadece bir köşesi varsa o halde G grubu bu köşenin merkezleyicisi ile tekrarlanan genişlemesidir. Dolayısıyla L'nin bir alt grubudur. ■

Bölüm 6

Limit Grupların Farklı Karakterizasyonları

Bu bölümdeki amacımız limit grupların tamamen artık serbest olduğuna eksiksiz bir kanıt vermek ve limit grup olmanın gerek yeter şartlarından birinin serbest grupların evrensel teorisi ile aynı teoriye sahip olmak olduğunu göstermektir. Bu bölümde halkalar ile ilgili tanımlar ve teoremler [5] kitabının 3. bölümünden alınmıştır, $SL_2(\mathbb{Z})$ grubunun özellikleri için ise [9] kitabının 4.3 ve 4.4 bölümlerinden yararlanılmıştır.

6.1 Model Teori ile Karakterizasyonlar

Teorem 6.1. *Sonlu üreteçli bir G grubu F_2 ile aynı evrensel teoriye sahiptir ancak ve ancak abelyan olmayan bir limit grup ise.*

Kanıt. ($\Longleftarrow$) Diyelim ki G grubu bir ableyan olmayan limit grup olsun. O halde Önerme 4.6'dan biliyoruz ki F_2 grubunu altgrup olarak içerir. Bu demektir ki $Th_\forall(G) \subset Th_\forall(F_2)$ sağlanıyor. Diğer tarafı göstermek için Önerme 3.13'ü tekrar hatırlayalım, bir σ cümlesi G grubunun evrensel bir cümlesi olsun. O halde $G \models \sigma$ özelliği kapalıdır. O halde $Th_\forall(F_2) \subset Th_\forall(G)$. Yani G abelyan olmayan bir limit grupsa F_2 grubu ile evrensel teorisi aynıdır.

($\Longrightarrow$) Diyelim ki G grubu F_2 grubu ile evrensel teorisi aynı olan bir grup olsun. Eğer evrensel teorileri eşit ise varoluşsal teorileri de eşittir. İlk gözlemimiz G grubunun abelyan olmadığı, çünkü abelyan olmamak varoluşsal bir özellik. G grubunun üreteç kümesini $S = (s_1, s_2 \ldots, s_n)$ ile gösterelim. B ile de (G, S) sıralı işaretli grubunun Cayley çizgesindeki R yarıçaplı topu gösterelim. Amacımız aynı topa sahip bir serbest grup üreteç kümesi bulmak. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ile yazılabilecek uzunluğu en fazla R olan kelimeleri $w_1, w_2, \ldots, w_k$ ile gösterelim. Her bir w_i için $g_i = w_i(s_1, s_2 \ldots, s_n)$ olduğunu düşünelim. Her bir $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için eğer $g_i = g_j$ ise $w_i = w_j$ ilişkisini içeren, eğer $g_i \neq g_j$ ise $w_i \neq w_j$ ilişkisini içeren $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ sistemini ele alalım. Bu durumda G grubunda varoluşsal $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \Sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cümlesi doğrudur. F_2 grubu G grubu ile aynı varoluşsal teoriye sahip olduğundan, $s'_1, s'_2, \ldots, s'_n \in F_2$ için $\Sigma(s'_1, s'_2, \ldots, s'_n)$ sistemi F_2 içerisinde sağlanır. $\langle s'_1, s'_2, \ldots, s'_n \rangle = F$, F_2 grubunun bir altgrubu olduğu için Teorem 3.1'dan dolayı bir serbest gruptur. Dolayısıyla istediğimiz (G, S) grubu ile aynı R yarıçaplı topa sahip $(F, \{s'_1, s'_2, \ldots, s'_n\})$ grubunu elde etmiş olduk. Herhangi R yarıçaplı top için bunu bulabiliriz ve bu bulduğumuz serbest gruplar dizisi (G, S) grubuna yakınsar. Bu demektir ki (G, S) grubu limit gruptur. ■

Bu kısımdan sonra tezin ilk bölümünde tanımladığımız ultraçarpım kavramını kullanacağız. Ultraçarpımı hatırlamak için sayfa 10'a bakabilirsiniz.

Önerme 6.2. *(1) $(G, S) \in \mathcal{G}$ grubuna yığılan bir $(G_k, S_k) \in \mathcal{G}$ gruplar dizisi alalım. O halde öyle bir ω serbest ultrafiltresi vardır ki (G, S) grubu $\prod_{k \in \mathbb{N}} G_k/\sim$ ultraçarpımına gömülebilir.*

(2) Eğer (G_k, S_k) dizisi (G, S) grubuna yakınsıyor ise o halde bir serbest

filtre için oluşturulan $\prod G_k$ ultraçarpıma gömülebilir.

(3) *$\prod_{k\in\mathbb{N}} G_k/\sim$ ultraçarpımının bir sonlu üreteçli (G,S) altgrubunu alalım. Bu altgruba yakınsayan bir $(H_{i_k}, S_{i_k}) < G_{i_k}$ sonlu üreteçli gruplar dizisi vardır.*

Kanıt. (1) $(G,S) \in \mathcal{G}$ grubuna yığılan bir $(G_k, S_k) \in \mathcal{G}$ gruplar dizisi olduğuna göre, bu gruplar dizisinin bir alt dizisi (G,S) grubuna yakınsıyor demektir. Bu yakınsak alt diziyi (G_{i_k}, S_{i_k}) ile gösterelim. Lemma 28 ve Önerme 30'a dayanarak $\{i_k | k \in \mathbb{N}\}$ kümesini içeren bir U serbest ultrafiltresinin var olduğunu söyleyebiliriz. $\mathfrak{U} = \prod_{k\in\mathbb{N}} G_k/\sim$ ile bu U ultrafiltresine göre yazılmış ultraçarpımı gösterelim. $S_k = (s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, \ldots, s_n^{(k)})$ olmak üzere $\mathfrak{U}$ yapısında $p \in \{1, 2 \ldots, n\}$ için $\overline{s_p} = (s_p^k)_{k\in\mathbb{N}}$ elemanları ile $\overline{S} = (\overline{s_1}, \overline{s_2}, \ldots, \overline{s_n})$ üreteç kümesini oluşturalım ve bu üreteç kümesinin ürettiği grubu $\overline{G}$ ile gösterelim.

Amacımız $(\overline{G}, \overline{S})$ grubu ile (G,S) grubunun izomorfik olduğunu göstermek. İki grup arasında $\varphi(s_i) = \overline{s_i}$ ile tanımlanan bir $\varphi : (G,S) \to (\overline{G}, \overline{S})$ göndermesi tanımlayalım. Şimdi (G,S) grubundan bir w sözcüğü alalım. Eğer w sözcüğü birim ise (G_{i_k}, S_{i_k}) dizisi (G,S) grubuna yakınsadığından, dizide sonlu sayıda grup dışında tüm gruplarda w sözcüğüne denk gelen elemanlar birim elemandır. Bu durumda Łoś Teoreminden $(\overline{G}, \overline{S})$ grubunda $\varphi(w)$ sözcüğü birim eleman olur. Aynı şekilde eğer w elemanı birimden farklı bir eleman ise $\varphi(w)$ sözcüğü birimden farklı olmalıdır. Bu bize homomorfizmanın iyi tanımlılığını ve izomorfizma olduğunu gösterir. O halde $(\overline{G}, \overline{S}) \cong (G,S)$

(2) Yukarıda (G_k, S_k) dizisinin bir alt dizisi (G,S) grubuna yakınsıyorsa (G,S) grubunun $\prod_{k\in\mathbb{N}} G_k/\sim$ ultraçarpımına gömülebileceğini göster-

dik. Şimdi (G_k, S_k) dizisinin kendisi yakınsadığından bir serbest ultrafiltre için (G, S) grubu $\prod G_k$ ultraçarpımına gömülebilir.

(3) S kümesini $S = (s_1, s_2 \dots, s_n)$ ile gösterelim. (G, S) grubu ultraçarpımın bir altgrubu olduğundan her bir s_p elemanı $(s_p^k)_{k\in\mathbb{N}}$ biçimindedir. Üreteç kümesi $S_k = (s_1^k, s_2^k, \dots, s_n^k)$ biçiminde olan ve G_k grubunun bir altgrubu olan H_k grubu olsun. (G_k, S_k) dizisinin bir alt dizisinin (G, S) grubuna yakınsadığını göstereceğiz. Bunun için (G, S) grubunun Cayley çizgesinde R yarıçaplı bir top alalım. Daha önce bahsettiğimiz yöntemin aynısını uygulayacağız. Eğer bir w elemanı bu top içinde birim eleman ise Łoś Teoreminden bu demektir ki ultrafiltreye ait indeksler dışında tüm (H_k, S_k) gruplarında bu eleman birimdir. R uzunluğunda sonlu sözcük olduğu için ve ultrafiltreler sonlu kesişim altında kapalı olduğu için (G, S) ile aynı R yarıçaplı topa sahip olan G_k'ların indeksleri kümesi ultrafiltrededir. Bu demektir ki (G_k, S_k) gruplar dizisinin bir (G, S) grubuna yakınsayan bir alt dizisi vardır.

■

Sonuç 6.3. *Bir G grubu limit gruptur ancak ve ancak serbest grupların herhangi ultraçarpımının sonlu üreteçli altgrubu ise. Yani serbest grupların herhangi ultraçarpımı tüm limit grupları altgrubu olarak içerir. Özel olarak $^*F_2$ grubu tüm limit grupları altgrubu olarak içerir.*

Kanıt. G grubu limit grup ise tanımı gereği (F_k, S_k) serbest gruplar dizisi G grubuna yakınsıyor demektir. O halde Önerme 6.2'nin ikinci şıkkından biliyoruz ki G grubu serbest grupların bir ultraçarpımına gömülebilir, yani ultraçarpımın altgruplarından birine izomorfiktir. Diğer taraftan serbest grupların herhangi bir ultraçarpımının bir G altgrubunu alalım. Önerme 6.2'nin üçüncü şıkkından biliyoruz ki bu altgruba yakınsayan bir serbest gruplar dizisi vardır. Dolayısıyla G limit grup olmalıdır. ■

6.2 Cebirsel Karakterizasyon

Tanım. R bir halka olsun. Katsayıları R halkasından olan ve değişkeni x olan bir $f(x)$ polinomu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

biçimindedir. Bu polinomda sonlu sayıda katsayının sıfırdan farklı olduğunu belirtmek gerek. Bu şekilde yazılabilecek tüm polinomların kümesini $R[x]$ ile gösterelim ve bu küme üzerinde aşağıdaki işlemleri tanımlayalım.

- Herhangi iki $f(x), g(x) \in R[x]$ için toplama $f(x)+g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)x^k$
- Herhangi iki $f(x), g(x) \in R[x]$ için çarpma $f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ öyle ki $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

Bu işlemler altında $R[x]$ kümesi bir halkadır ve R halkasının polinomlar halkası olarak adlandırılır.

R halkası üzerinde x değişkeni ile bir $R[x]$ halkası tanımladık, o halde başka bir x' değişkeni ile $R[x]$ halkası üzerinde $R[x, x']$ halkasını tanımlayabiliriz. Bu şekilde tümevarımsal devam ederek istediğimiz bir $n \in \mathbb{N}$ için n değişkenli $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halkası tanımlanabilir.

Tanım. R değişmeli bir halka olsun. Eğer R halkasının tüm idealleri sonlu üreteçli ise R halkasına Noether halkası denir.

Örnekler.

- F herhangi bir cisim ise F Noether halkasıdır.
- R bir esas ideal halkası olsun. Esas ideal halkalarının tüm idealleri esas idealdir yani tek üreteçlidir. Dolayısıyla R halkası bir Noether halkasıdır.

Teorem 6.4 (Hilbert Baz Teoremi)**.** *R bir Noether halkası ise $R[x]$ polinom halkası da bir Noether halkasıdır.*

Kanıt. [5], Teorem 3.3'e bakılabilir. ■

Eğer R bir Noether halkası ise $R[x]$ polinom halkası da bir Noether halkası olduğundan daha önce yaptığımız gibi tümvarımla $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ halkasının bir Noether halkası olduğu görülebilir.

Lemma 6.5. *${}^*\mathbb{Z}$ ile $\mathbb{Z}$ halkasının ultragücünü gösterelim. R halkası ${}^*\mathbb{Z}$ halkasının sonlu üreteçli bir althalkası ise R halkası tamamen artık $\mathbb{Z}$'dir. Yani rastgele alınan birimden farklı sonlu sayıda $a_1, \ldots a_n$ elemanı için bu elemanların her birini 0'dan farklı bir elemana gönderen bir $\rho : R \to \mathbb{Z}$ halka homomorfizması bulunabilir.*

Kanıt. R sonlu üreteçli bir halka olduğundan $t_1, t_2, \ldots, t_n \in {}^*\mathbb{Z}$ olmak üzere $R = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ biçimindedir. Biz n değişkenli bir $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ polinom halkası alalım, $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ halkasından R halkasına örten bir φ homomorfizması yazılabilir. $J = ker(\varphi)$, $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ halkasının bir ideali olmak üzere

$$0 \to J \to \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n] \to R$$

tam dizisi yazılabilir. $\mathbb{Z}$ halkası bir Noether halkası olduğundan Hilbert Baz Teoremine göre $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ polinom halkası bir Noether halkasıdır. O halde J ideali sonlu üreteçli bir idealdir. J'nin üreteci olan polinomları $f_1, f_2, \ldots, f_q$

olarak gösterelim. İzomorfizma teoreminden dolayı $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]/J \cong R$ olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ elemanları $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ eşitliği için bir çözümdür. Diğer taraftan $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$ elemanları alalım ve bu elmanları ön görüntüleri olan $(g_1, g_2, \ldots, g_k) \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n] \setminus J$ elemanlarına bakalım. Dolayısıyla $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ elemanları $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ eşitsizliğini sağlar.Bu eşitliklerin ve eşitsizliklerin birer elementer cümle olduğuna dikkat edelim ve $t_1, t_2, \ldots, t_n \in {}^*\mathbb{Z}$ olduğunu hatırlayalım. Dolayısıyla Łoś Teoreminden dolayı bu eşitlikleri ve eşitsizlikleri sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ halkasından $\mathbb{Z}$ halkasına $T_i \to x_i$ olacak şekilde bir homomorfizma yazılabilir. Bu homomorfizmayı $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]/J \cong R \to \mathbb{Z}$ homomorfizmasına daraltabiliriz ve bu homomorfizmada rastgele alınan birimden farklı sonlu sayıda $a_1, \ldots a_n \in R$ elemanı için elemanlar sıfırdan farklı elemanlara giderler. ■

Lemma 6.6 (Pinpon Lemma). *G grubu a ve b elemanları tarafından üretilen iki üreteçli bir grup olsun. G grubu bir X kümesi üzerine soldan etki ediyor olsun öyle ki boş olmayan ve birbirleri tarafından içerilmeyen $A, B \subseteq X$ kümeleri için $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a^n \cdot B \subset A$ ve $b^n \cdot A \subset B$ olsun. O halde G grubu üreteç kümesi $\{a, b\}$ olan serbest gruptur.*

Kanıt. G grubunun F_2 grubu ile izomorfik olduğunu göstereceğiz. Bunun için F_2 kümesinin üreteç kümesini $\{x, y\}$ ile gösterelim. Genelliği bozmadan F_2 grubundaki kelimelerin sadeleştirilmiş olduğunu varsayabiliriz. Serbest grupların evrensel özelliğinden F_2 grubundan G grubuna bir homomorfizma yazabiliriz. Bu homomorfizma $\varphi : F_2 \to G$ olsun öyle ki $\varphi(x) = a$ ve $\varphi(y) = b$ sağlansın. G nin tüm elemanları a ve b ile yazıldığından bu homomorfizma örtendir. Varsayalım ki bu homomorfizma birebir olmasın. O halde iki farklı $k, l \in F_2$ elemanı aynı elemana gidiyor demektir bu elemana $t \in G$ diyelim.

$\varphi(k) = t$ ve $\varphi(l) = t$ olduğuna göre $\varphi(kl^{-1}) = e$ elde ederiz. k ve l elemanları eşit olmadığına göre $kl^{-1} = w \neq e$, $\varphi(w) = e$ sağlayan bir $w \in F_2$ olmalıdır. Bu w kelimesini başındaki ve sonundaki harflere bakarak dört durumda inceleyeceğiz.

(1) Eğer w kelimesi x'in bir kuvveti ile başlayıp bitiyor ise, yani $n_0, n_1, \ldots, n_k$, $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için $w = x^{n_0}y^{m_0}\ldots y^{m_k}x^{n_k}$ ise,

$$\begin{aligned} B &= e \cdot B = \varphi(w) \cdot B = \varphi(x^{n_0}y^{m_0}\ldots y^{m_k}x^{n_k}) \cdot B = a^{n_0}b^{m_0}\ldots b^{m_k}a^{n_k} \cdot B \\ &= a^{n_0}b^{m_0}\ldots b^{m_k}(a^{n_k} \cdot B) \subset a^{n_0}b^{m_0}\ldots b^{m_k} \cdot A = a^{n_0}b^{m_0}\ldots(b^{m_k} \cdot A) \\ &\subset a^{n_0}b^{m_0}\ldots a^{n_{k-1}} \cdot B \subset \cdots \subset a^{n_0} \cdot B \subset A. \end{aligned}$$

Sonuçta $B \subset A$ oldu. Ancak bu kümelerin birbirini içermediğini biliyoruz, çelişki elde ettik.

(2) Diyelim ki w kelimesi y'nin bir kuvveti ile başlayıp bitsin. $\varphi(x) \in G$ olduğu için a ve a^{-1} ile çarpabiliriz. $a\varphi(w)a^{-1} = aea^{-1} = e = \varphi(x)\varphi(w)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xwx^{-1})$ sağlanır. Dolayısıyla x ile başlayıp x ile biten bir kelime φ altında birim elemana gidiyor. Bu durum ilk durum ile aynı olduğu için yine çelişki elde ederiz.

(3) Diyelim ki w kelimesi x'in bir kuvveti ile başlayıp y'nin bir kuvveti ile bitiyor olsun. Genelliği bozmadan w kelimesi x^n ile başlıyor diyebiliriz. Bir $r \neq n$ için w kelimesini soldan x^r ile sağdan x^{-r} ile çarpalım. O halde yeni kelimemiz x^{n+r} ile başlayan ve x^{-r} ile biten bir kelime oldu.$\varphi(x^r)\varphi(w)\varphi(x^{-r}) = e$ olduğundan yine x'in bir kuvveti ile başlayıp biten ve birim elemana giden bir kelime bulmuş olduk, ilk duruma ile aynı olduğu için çelişki elde ederiz.

(4) Diyelim ki w kelimesi y'nin bir kuvveti ile başlayıp x'in bir kuvveti ile biten bir kelime olsun. O halde $\varphi(w) = e$ olduğundan $\varphi(x)^{-1} =$

$\varphi(x^{-1}) = e$ olur. Dolayısıyla x^{-1} kelimesi x'in bir kuvveti ile başlayan ve y'nin bir kuvveti ile biten ve φ altında birim elemana giden bir kelime olur. Yani üçüncü durum ile aynı olur. Yine çelişki elde ederiz.

Bütün durumlarda çelişki elde ettiğimize göre φ homomorfizması birebir olmalıdır. O halde $F_2 \cong G$ sağlanır. ∎

Önerme 6.7. *$SL_2(\mathbb{Z})$ grubunun $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ elemanları ile üretilen altgrubu F_2 grubuna izomorfiktir.*

Kanıt. $SL_2(\mathbb{Z})$ grubunun $\mathbb{R}^2$ kümesine matris çarpması ile bir etkisi vardır. $\mathbb{R}^2$ kümesinin birbirlerini içermeyen aşağıdaki iki kümesini ele alalım.

$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y| \right\}$ ve $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y| \right\}$

Şimdi rastgele bir $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ve $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B$ için $a^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ işlemini inceleyelim.

$$a^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2ny \\ y \end{pmatrix}$$

$|x + 2ny| > |y|$ olduğundan ve elemanlar rastgele alındığından diyebiliriz ki $a^n \cdot B \subset A$ sağlanır. Aynı şekilde $b^n \cdot A \subset B$ olduğu gösterilebilir. O halde Pinpon Lemma'dan dolayı $\{a, b\}$ üreteç kümesi ile üretilen grubun F_2 grubuna izomorfik olduğunu söyleyebiliriz. ∎

Lemma 6.8. *$PSL_2(\mathbb{Z})$ ve $PSL_2(\mathbb{Z}_2)$ grupları arasında her girdiyi modülo 2'deki değerine götüren $\varphi : PSL_2(\mathbb{Z}) \to PSL_2(\mathbb{Z}_2)$ homomorfizmasını ele alalım. Bu homomorfizma iyi tanımlıdır ve çekirdeği F_2 grubuna izomorfiktir.*

Kanıt. φ homomorfizmasının çekirdeğini bulmak için önce $\varphi' : SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}_2)$ homomorfizmasını tanımlayalım. Öklid algoritması ile bu homomorfizmanın çekirdeğinin $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $-I$ matrisleri tarafından üretildiği gösterilebilir (bkz. [11], Porism 54). Dolayısı ile $ker(\varphi)$ grubu a ve b elemanları tarafından üretilir. ■

Teorem 6.9. *G grubu $^*F_2$ ultragücünün sonlu üreteçli bir altgrubu olsun. O halde G grubu tamamen artık serbesttir.*

Kanıt. Lemma 6.8'den yararlanarak aşağıdaki;

$$1 \to F_2 \to PSL_2(\mathbb{Z}) \to PSL_2(\mathbb{Z}_2) \to 1$$

tam dizisini yazabiliriz. Öncelikle $\varphi : PSL_2(\mathbb{Z}) \to PSL_2(\mathbb{Z}_2)$ homomorfizmasının $^*\varphi : PSL_2(^*\mathbb{Z}) \to PSL_2(^*\mathbb{Z}_2)$ homomorfizmasına genişletilebileceğini ve $^*ker(\varphi) = ker(^*\varphi)$ olduğunu gösterelim. Bir I indeks kümesi üzerinde alınan $\prod_I PSL_2(\mathbb{Z})$ çarpımını alalım. Bu çarpım ile φ homomorfizmasını birleştirerek, $\overline{\varphi}(g) = \varphi g$ eşitliğini sağlayan $\overline{\varphi} : \prod_I PSL_2(\mathbb{Z}) \to \prod_I PSL_2(\mathbb{Z}_2)$ homomorfizması yazılabilir. Şimdi bu homomorfizmayı I indeks kümesi üzerinde alınan U ultrafiltresinin $\sim$ denklik bağıntısı ile $\overline{g} = \overline{\varphi g}$ eşitliğini sağlayan $^*\varphi : {}^*PSL(\mathbb{Z}) \to {}^*PSL_2(\mathbb{Z}_2)$ homomorfizmasına dönüştürebiliriz. Bu homomorfizma iyi tanımlıdır. Çünkü $\overline{g} = \overline{a}$ eşitliği sağlanıyor ise $\{i \in I \mid g(i) = a(i)\} \in U$ olur. Bu durum $\overline{\varphi g} = \overline{\varphi a}$ ise gerçekleşir.

Şimdi çekirdeklere bakalım, $^*ker(\varphi) \subseteq ker(^*\varphi)$ olduğu aşikar. Diğer taraf için $\overline{g} \in ker(^*\varphi)$ alalım, yani $^*\varphi(\overline{g}) = \overline{e}$ olsun. Bu durumda $\{i \in I \mid \varphi(g(i)) = e(i)\} \in U$ olur. O halde $\{i \in I \mid g(i) \in ker(\varphi)\} \in U$ sağlanır. Bu demektir ki $\overline{g} \in^* ker(\varphi)$ sağlanıyor. O halde aşağıdaki tam diziyi yazabiliriz.

$$1 \to {}^*F_2 \to PSL_2(^*\mathbb{Z}) \to PSL_2(^*\mathbb{Z}_2) \to 1$$

Dolayısıyla $^*F_2$ grubu $PSL_2(^*\mathbb{Z})$'ye gömülebilir. G sonlu üreteçli olduğundan R halkası $^*\mathbb{Z}$ halkasının sonlu üreteçli bir althalkası olmak üzere G grubu $PSL_2(R)$'ye gömülebilir. Şimdi G grubundan birimden farklı $f_1, f_2, \ldots, f_k$

elemanları alalım. G grubunu bir matris grubuna gömdüğümüzden elemanları matris olarak görebiliriz. $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ile $f_i - I$ matrislerinin sıfırdan farklı girdilerini gösterelim. Lemma 6.5'ten biliyoruz ki $\rho : R \to \mathbb{Z}$ halka homomorfizması vardır öyle ki a_i'lerin her birini sıfırdan farklı bir elemana gönderir. O halde bir $\phi : PSL_2(R) \to PSL_2(\mathbb{Z})$ tanımlayalım ki her bir girdisinde ρ gibi davransın. Bu durumda her bir f_i elemanı birimden farklı bir elemana gider. $G \leq ker({}^*\varphi)$ olduğundan $\phi(G) \leq ker(\varphi)$ olur ki bu durumda $\phi(G)$ serbest bir grubun altgrubu demektir, bu bize Teorem 3.1'den dolayı $\phi(G)$ grubunun serbest grup olduğunu söyler. Dolayısıyla G grubu tamamen artık serbest gruptur. ■

Sonuç 6.10. *Sonlu üreteçli gruplar ailesinde, limit gruplar ve tamamen artık serbest gruplar çakışır.*

Kanıt. Sonuç 6.3'ten biliyoruz ki limit gruplar ${}^*F_2$ grubunun bir altgrubu olarak görülebilir. Teorem 6.9 ile tam olarak bu grupların tamamen artık serbest olduğunu gösterdik. Tamamen artık serbest grupların limit grup olduğu Teorem 5.2'de gösterilmiştir. ■

Kaynakça

[1] Baumslag, Benjamin, 1967. Residually Free Groups, Proc. London Math. Soc., 17, 402–418,

[2] Bodirsky, Manuel. (2021) Model Theory Course Notes. 16 Mayıs 2022 tarihinde indirildi, https://wwwpub.zih.tu-dresden.de/∼bodirsky/Model-theory.pdf

[3] Bogopolski, Oleg. (2008) Introduction to Group Theory. Zürich: European Mathematical Society

[4] Champetier, Christophe, Guirardel, Vincent, 2005. Limit groups as limits of free groups, Israel Journal of Mathematics, 146, 1–75

[5] Cohn, Paul M. (2000) Introduction to Ring Theory. Springer

[6] Fine, Benjamin, Rosenberger, Gerhard. (1999) Algebraic generalizations of discrete groups: a path to combinatorial group theory through one-relator products. New York, NY: Marcel Dekker

[7] Fine, Benjamin, Gaglione, Anthony, Myasnikov, Alexei, Rosenberger, Gerhard and Spellman, Dennis. (2014) The Elementary Theory of Groups: A Guide through the Proofs of the Tarski Conjectures. Berlin, Munchen, Boston: De Gruyter

[8] Halmos, Paul R. (2013) Naive Set Theory, Springer

[9] Löh, Clara. (2017) Geometric Group Theory: An Introduction. Springer

[10] Marker, David. (2002) Model Theory: An Introduction. vol 217. Springer Science & Business Media

[11] Pierce, David. (2011) Istanbul Model Theory Seminar Notes. 16 Mayıs 2022 tarihinde indirildi, http://mat.msgsu.edu.tr/∼dpierce/Notes/Seminar/ist-mod-thy-sem.pdf

[12] Sela, Zlil, 2001. Diophantine geometry over groups I: Makanin-Razborov diagrams. Publ. Math.. Inst. Hautes Étud. Sci., 93, 31-105