T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ KOORDİNATÖRLÜĞÜ

BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJESİ SONUÇ RAPORU TAM METNİ

Proje Numarası ve Türü
2019/27- A

Proje Adı
Değişmeli Grup Kodlarının Denklik Sınıfları

Proje Yürütücüsü
Dr. Öğretim Üyesi Fatma Altunbulak Aksu
Matematik

Proje Ekibi
Dr. Öğretim Üyesi İpek Tuvay
Matematik

MSGSÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.
(Proje No: 2019/27, 2020)

Proje Sonuç Raporu Tam Metni

Proje amacı, kapsamı, yöntemi, faaliyetleri, bulguları, çıktıları, kaynakçası yer almalıdır. (Metin 12 punto, Times New Roman yazı tipi, 1.5 satır aralığı ile yazılmalıdır.

Tam Metin:

Bu projede, sonlu grupların temsil teorisinin, kodlama teorisine bir uygulaması çalışılmıştır. Projenin amacı, sonlu grupların temsil teorisinin kodlama teorisine uygulamalarını çalışmaktır. Yarı basit abelyen grup cebirlerinin idealleri olarak görülebilen kodların denklik sınıflarının sayıları hakkında literatürde eksik kalmış olan problemleri tamamlamak ve bu sınıfların sayısının özel bir sayıya eşit olduğu grup aileleri için karakterizasyon vermektir. Bunların yanısıra, kodların niteliği hakkında bilgi toplamak amacıyla, kod ağırlıklarını ve kod ağırlık dağılımlarını çalışmak hedeflenmiştir. Denk olan kodlar için, bu değişmezler arasındaki ilişkileri çalışmak amaçlanmıştır.

F, eleman sayısı q olan bir cisim iken, doğrusal bir kod, F^n vektör uzayının bir alt uzayıdır. Bir kod çalışılırken, kodun niteliği üç parametre ile ölçülmektedir. Kodun uzunluğu, kodun boyutu ve kodun ağırlığı. Bu üç parametreden, tespiti en zor olan ve kod hakkında çok fazla bilgiyi veren kodun ağırlığıdır. Kodun içindeki elemanlara kod sözcüğü denir. Bir kod sözcüğünün ağırlığı, eleman olarak sıfırdan farklı koordinat sayısıdır. Kodun ağırlığı ise, sıfırdan farklı kod sözcükleri ağırlıklarının en küçüğü olarak tanımlanır. I kodunun ağırlığı, w(I) notasyonu ile gösterilir. Kod ağırlığı, hata düzeltme kodları konusunda etkin rol oynar. Kodların ağırlıkları kadar, ağırlık dağılımları da kodun niteliği hakkında fazlaca bilgi verir. Uzunluğu n olan bir kod için, i, {0,1,..,n} kümesinin içindeki değerlerden biri olmak üzere, A_i, ağırlığı i olan kod sözcüklerinin sayısını belirtsin.

Bir kodun ağırlık dağılımı {A_0=1, A_1,…,A_n} sıralı sayı kümesi olarak tanımlanmaktadır. Uygulama alanında en etkili olan kodlar doğrusal devirli kodlardır. Devirli kodların ağırlık dağılımlarını hesaplamak oldukça zor bir problemdir ve konu üzerinde çok sayıda makale yazılmıştır. Probleme farklı tekniklerle katkı verilmeye çalışılmaktadır. Doğrusal devirli kodlar R=F[x]/(x^n-1) bölüm halkasının idealleri olarak görülebilir. MacWilliams [M69], devirli kodların aslında devirli bir grubun grup cebirinin idealleri olduğunu ortaya koymuştur. Sonrasında Berman [B67] ve MacWilliams[M70] Abelyen kodları, Abelyen grup cebirlerinin idealleri olarak tanımlamıştır.

Sonlu grup cebirlerinin idealleri grup kodu olarak tanımlanmıştır. Grupların ve grup cebirlerinin özellikleri kullanılarak, grup kodların ağırlık dağılımları hesaplamaları için farklı teknikler

geliştirmek mümkündür. Proje kapsamında, Abelyen gruplar için grup kodları çalışılmıştır.
Bu projede, 3 ana soru çalışılmıştır. Bu sorular aşağıda ifade edilmektedir.

1. Grup kodlarının denklik sınıflarının sayısı, grubun eksponentinin bölen sayısına eşit ise grup hakkında ne söylenebilir?
2. Hangi gruplar için, grup kodlarının denklik sınıf sayısı, grubun eksponentinin bölen sayısına eşittir?
3. İki grup kodunun ağırlıklarının birbirine eşit olması için gerekli ve yeterli koşul nedir?

Proje kapsamında birinci ve ikinci sorular için, öncelikli olarak [FGM14] makalesi çalışılmıştır. Yukarıdaki birinci ve ikinci soruları yanıtlamaya yönelik veri toplanabilmesi için, küçük grup örnekleri üzerinde hesaplar yapılmıştır. [FGM14] makalesinde birbirine denk olan grup kodları ile birbirine denk olan eş devirli alt gruplar arasında birebir eşleme verilmiştir. Bu sonuç, öncelikli olarak eş devirli alt grupları incelememizi ve yapısal özellikleri hakkında sonuçlar kanıtlamamızı sağlamıştır. Bu yapısal özellikler yardımıyla, önce sonlu Abelyen p-grupları için, denklik sınıf sayılarının, grubun eş devirli alt gruplarının izomofizma sınıf sayılarına eşit olduğu gözlemlenmiş ve bu sonuç kanıtlanmıştır. Sonraki aşamada bu sonuç sonlu Abelyen grupları için kanıtlanmıştır.

İkinci aşamada, bazı özel grupların direkt çarpımları için grup kodlarının denklik sınıf sayıları hesaplanmış ve formüller verilmiştir. Bu bulgular yardımıyla, birinci ve ikinci soru öncelikle Abelyen p-grupları için, tamamen yanıtlanmıştır. Herhangi bir sonlu Abelyen grup, Sylow p-alt gruplarının direkt çarpımı olarak yazılabildiği için, direkt çarpımlar için yapılmış hesaplar yardımı ile sonlu Abelyen gruplar için de birinci ve ikinci soru tamamen çözülmüştür.
Bu kısım ile ilgili bütün bulgular [AT1] makalesi olarak yayımlanmıştır.

Yukarıdaki ikinci ve üçüncü paragrafta da belirtildiği gibi grup kodlarının ağırlıklarını ve ağırlık dağılımlarını hesaplamak oldukça zordur. Eğer kodlar denk ise, ağırlıkları ve ağırlık dağılımları eşittir. [FGM14] makalesinde Önerme IV.2 de ağırlıkları ve ağırlık dağılımları eşit olan kodların denk olmayabileceği gösterilmiştir.
Bu nedenle üçüncü soru öncelikle, özel grup aileleri için çalışılmıştır. Hangi grup ailelerinin öncelikli olarak çalışılması gerektiğine karar vermek için, [FGM14] ve [PMM13] makaleleri çalışılmıştır. Öncelikle birinci ve ikinci sorunun yanıtlarında etkin olan eş devirli, yani eleman sayısı eşit olan devirli p-grupların direk çarpımı olan, p-grupları düşünülmüştür. Projenin son altı aylık zaman diliminde, aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Teorem A: $p>2$ bir asal sayı, G eksponenti p^n olan Abelyen bir grup ve q , $U(Z/p^n)$ grubunun bir üreteci olsun. I ve J, F_qG içinde iki minimal kod olsun. I ve J nin denk olması için gerekli ve yeterli koşul, $w(I)=w(J)$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Koşul A: FG grup cebiri içinde iki kodun ağırlıkları eşittir ancak ve ancak bu iki kod birbirine denktir.

Soru: Koşul A nın doğru olduğu, Abelyen grupların karakterizasyonu hakkında ne söylenebilir?

Bu soruya yanıt vermek için problem, öncelikle Abelyen p-gruplar çalışılmıştır ve aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem B: $p>2$ bir asal sayı, G eksponenti p^n olan bir abel grup ve q, $U(Z/p^n)$ grubunun bir üreteci olsun. F_qG grup cebiri için Koşul A nın doğru olması için gerek ve yeter koşul G nin, eş devirli bir p- grup olmasıdır.

Bu teorem ile Koşul A nın sağlandığı bütün Abelyen p-grupları bulunmuştur.

Kodların ağırlık dağılımları için, aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem C: $p>2$ bir asal, G eksponenti p^n olan eş devirli bir grup ve q, $U(Z/p^n)$ grubunun bir üreteci olsun. I ve J, F_qG içinde iki minimal kod olsun. I ve J nin denk olması için gerekli ve yeterli koşul ağırlık dağılımlarının aynı olmasıdır.

Teorem A, Teorem B, Teorem C sonuçlarının $p=2$ için doğru olmadığını gözlemlenmiştir.

Koşul B: FG grup cebiri içinde iki kodun ağırlık dağılımları aynıdır ancak ve ancak bu iki kod birbirine denktir.

Soru: Koşul B nin doğru olduğu, Abelyen p-gruplarının karakterizasyonu hakkında ne söylenebilir?

Bu soru dışında, Teorem A, Teorem B, Teorem C deki sonuçlar, p grup olmayan Abel grupları için çalışılmıştır.

Bu kısım için, p ve q belli özel koşulları sağlayan tek asallar olmak üzere, eleman sayısı pq olan devirli gruplar için Koşul A nın doğru olduğu gözlemlenmiştir.

Aynı grup ailesi için, Koşul B nin doğruluğu öngörülmüş ve kanıtlanmıştır. Proje kapsamında Üçüncü soru, $p>2$ iken Abelyen p grupları için yanıtlanmıştır.

Bazı özel koşullar altında sonlu Abelyen gruplar için de yanıtlanmıştır. Bu kısımda bulunmuş bulgular [AT2] makalesi olarak yayımlanmıştır.

Raporun içeriğinde belirtilmiş referanslar aşağıdaki gibidir.

Referanslar

[B67]S.D. Berman, Semisimple cyclic and abelian codes, II. Kybernetika 3 (1967) 21-30.

[FGM14]R.A. Ferraz, M. Guerreiro, C. Polcino Milies, G-equivalence in group algebras and minimal abelian codes. IEEE Transactions on Information Theory 60 (1)(2014) 252-260.

[M69]F.J. MacWilliams, Codes and ideals in group algebra. Combinatorial Mathematics and its Applications, University of North Carolina Press, 1969.

[M70]F.J. MacWilliams, Binary codes which are ideals in the group algebra of an abelian group. Bell System Tech. Journal 44 (1970) 987-1011.

[PMM13]C. Polcino Milies, F.D. Melo, On cyclic and Abelian Codes, IEEE Transactions on Information Theory 59 (11) (2013) 7314-7319.

Sonuç olarak, proje başvuru formunda belirtilmiş bütün hedefler yerine getirilmiştir. Proje kapsamında iki makale yazılmıştır. Proje süresince, projede araştırmacı olarak görev alan İpek Tuvay tarafından, aşağıda detayları belirtilmiş bir seminer verilmiştir.

Seminer: G-equivalence on abelian group codes, İpek Tuvay, Sabancı Üniversitesi, 11 Aralık 2019(ilgili bağlantı: http://people.sabanciuniv.edu/~mlavrauw/algebra_seminar/sas.html)

Yayımlanmış Makaleler:

1. [AT2] F. Altunbulak Aksu, İ. Tuvay, A characterization of abelian group codes in terms of their parameters, Turkish Journal of Mathematics 46 (7) (2022) 2701-2713.

   https://doi.org/10.55730/ 1300-0098.3296

2. [AT1] F. Altunbulak Aksu, İ. Tuvay, On the number of non-G-equivalent minimal abelian codes, Turkish Journal of Mathematics 45(1) (2021), 445-455.

   https://doi.org/10.3906/ mat-2006-102