

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NÖTRON YILDIZLARINDA MATERYAL
ÖZELLİKLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

DOKTORA TEZİ

Mehmet HELVA

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Eş Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Kai Oliver SCHWENZER

Şubat 2024

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NÖTRON YILDIZLARINDA MATERYAL
ÖZELLİKLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

DOKTORA TEZİ

Mehmet HELVA

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Eş Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Kai Oliver SCHWENZER

Şubat 2024

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince üzerimde büyük emeği olan, bilgi birikimi ve akademik deneyimleriyle çalışmama yön veren ve her konuda benden desteklerini esirgemeyen danışmanlarım Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN ve Dr. Öğr. Üyesi Kai Oliver SCHWENZER'e teşekkürlerimi sunarım. Sizlerin destekleri, benim için bir akademik danışmanlık sürecinden çok daha fazlasını ifade ediyor.

Bu yoğun ve zorlu süreçte bana sürekli destek olan, beni cesaretlendiren ve asla inancımı kaybetmeyen sevgili eşim Elvan Julia Sayarer'e, hayatımıza girdiğinden beri her günümüzü güzelleştiren oğlumuz Deniz Matthew'a, her sıkıştığım da içimi rahatlatan anneme, babama ve uzun çalışma gecelerinde varlıklarıyla bana huzur veren kedilerimize sonsuz teşekkür ederim.

MSGSÜ Fizik bölümüne başlamama vesile olan hocam Prof. Dr. S. Kayhan ÜLKER'e, yıllardır birlikte çalıştığım ve çalışma disiplini kendime örnek aldığım sevgili dostum Taygun BULMUŞ'a, uzun yıllardır zaman geçirdiğim Fizik bölümünde bize bilimsel çalışma alanı sağlayan tüm hocalarıma ve Fizik bölümündeki tüm çalışma arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK), 117F312 numaralı 1001 projesi ile desteklenmiştir.

01/01/2024

Mehmet HELVA

**NÖTRON YILDIZLARINDA MATERYAL
ÖZELLİKLERİNİN SINIFLANDIRILMASI**
(Doktora Tezi)
Mehmet HELVA

MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2024

ÖZET

Kompakt yıldızlar yüksek yoğunluk değerlerine sahip astrofiziksel nesnelere sahiptir. Bu yüksek yoğunluktaki ortamda maddenin nasıl davrandığı ancak altında yatan mikroskobik teorilerin anlaşılmasıyla mümkündür. Bu teoriler, örneğin kuantum renk dinamiği, çok yoğun ve sıcak ortamda mikroskobik sebestlik derecelerinin nasıl davranacağı ve bunların neler olabileceği hakkında kesin bilgiler vermemektedir. Taşınım özelliklerinin böyle yoğun maddesel bir ortamda nasıl gerçekleştiğinin anlaşılması, ardında yatan mikroskobik davranışlar veya bileşenler hakkında nitel bilgiler edinmemizi sağlayabilir. Bu tezde yoğun maddesel ortam için taşınım katsayılarını Fermi-akışkan teorisi çerçevesinde, fermiyonik parçacıklar için $SU(N)$ ayar etkileşimlerini göz önünde bulunduran, ortam etkilerinin de hesaba katıldığı durumlar için inceledik. Kontrollü bir şekilde düşük sıcaklık açılımı yaparak elektriksel iletkenlik, ısıl iletkenlik ve kayma viskozitesi büyüklüklerini hesapladık. Elde ettiğimiz sonuçlar literatürde verilen spesifik durumlardan farklı olarak her türlü fermiyonik madde bileşeni için geçerlidir ve gerekli limit durumlarında literatürde verilen birinci mertebeden sonuçlarla örtüşmekte, ikinci ve üçüncü mertebeden düzeltme terimlerini de içermektedir. Bu sonuçlar aynı zamanda sıcaklığın görece yüksek olduğu nötron yıldızı çarpışma durumlarına da uygulanabilir.

Anahtar Kelimeler: Taşınım katsayıları, Çarpışma frekansları, Nötron Yıldızları

Sayfa Adedi: 75

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Eş Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Kai Oliver SCHWENZER

CLASSIFICATION OF MATERIAL PROPERTIES IN
NEUTRON STARS
(Ph.D. Thesis)
Mehmet HELVA

MİMAR SİNAN FINE ARTS UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
February 2024

SUMMARY

Compact stars are astrophysical objects that have huge density. Understanding how matter behaves in such high-density environments is only possible through the comprehension of the underlying microscopic theories. These theories, such as quantum chromodynamics, do not provide detailed information about how microscopic degrees of freedom will behave in a highly dense and hot environment. Understanding how transport properties occur in such dense matter can provide qualitative information about the underlying microscopic behaviors or components. In this thesis, we examined transport coefficients for dense matter within the framework of Fermi-liquid theory, considering $SU(N)$ gauge interactions for fermionic particles and taking into account medium effects. We calculated electrical conductivity, thermal conductivity, and shear viscosity coefficients in a controlled low temperature expansion. The results we derived, unlike the specific cases given in the literature, are valid for all kinds of arbitrary fermionic matter compositions and align with first-order results given in the literature in the limit cases and also include second and third-order correction terms. These results can approximately also be applicable to neutron star merger scenarios where the temperature is relatively high.

Key Words: Transport properties, Collision frequencies, Neutron stars

Page Number: 75

Supervisor: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Co-Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Kai Oliver SCHWENZER

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
ÖZET	ii
SUMMARY	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
1 GİRİŞ	1
2 KİNEMATİK VE HİDRODİNAMİK DENKLEMLER	7
2.1 Boltzmann Denklemi	7
2.2 Hidrodinamik Denklemler	8
3 MATERYAL ÖZELLİKLERİ VE TAŞINIM KATSAYILARI	13
3.1 Chapman-Enskog Yaklaşımı	13
3.2 Taşınım Katsayıları	16
3.2.1 Elektriksel İletkenlik	17
3.2.2 Isıl İletkenlik	19
3.2.3 Kayma Viskozitesi	21
4 MATRİS ELEMANI VE PLAZMA MODLARI	23
4.1 Polarizasyon Tensörü	27
5 ÇARPIŞMA İNTEGRALİ VE FREKANSLARI	33
5.1 Çarpışma İntegralinin Boyuna Kısmı	36
5.2 Çarpışma İntegralinin Enine Kısmı	38
5.3 Çarpışma İntegralinin Karışık Kısmı	40
5.4 Elektriksel İletkenlik Çarpışma Frekansları	42

5.5	Isıl İletkenlik Çarpışma Frekansları	43
5.6	Kayma Viskozitesi	45
6	SONUÇ	47
	KAYNAKLAR	49
Ek A	Momentum ve Enerji İntegralleri	56
Ek B	Enine ve Boyuna Modlar	59
Ek C	Polinom İfadeleri	62

ŞEKİL LİSTESİ

1.1	Sıcaklık ve kimyasal potansiyel yönünde maddenin fazları [15]. . .	2
4.1	Saçılma etkileşimi için Feynman diyagramı [62].	23
4.2	Foton için öz enerji Feynman diyagramı [64]	27
5.1	Boylamsal durum için elektriksel iletkenlik perdeleme fonksiyonu.	37
5.2	Boylamsal durum için kayma viskozitesi perdeleme fonksiyonu. . .	38
5.3	Karışık durum için kayma viskozitesi perdeleme fonksiyonu	42
5.4	Elektron ısıl iletkenlik katsayısının sıcaklıkla değişimi, $p_F = 100$ MeV.	45
5.5	Elektron kayma viskozitesi katsayısının sıcaklıkla değişimi, $p_F = 100$ MeV.	46
6.1	Elektrik ve kayma viskozitesi için farklı değerlerde perdeleme fonksiyonları.	48
B.1	Foton dispersiyon ilişkisi için enlemsel ve boylamsal modlar. . . .	61

SEMBOL LİSTESİ

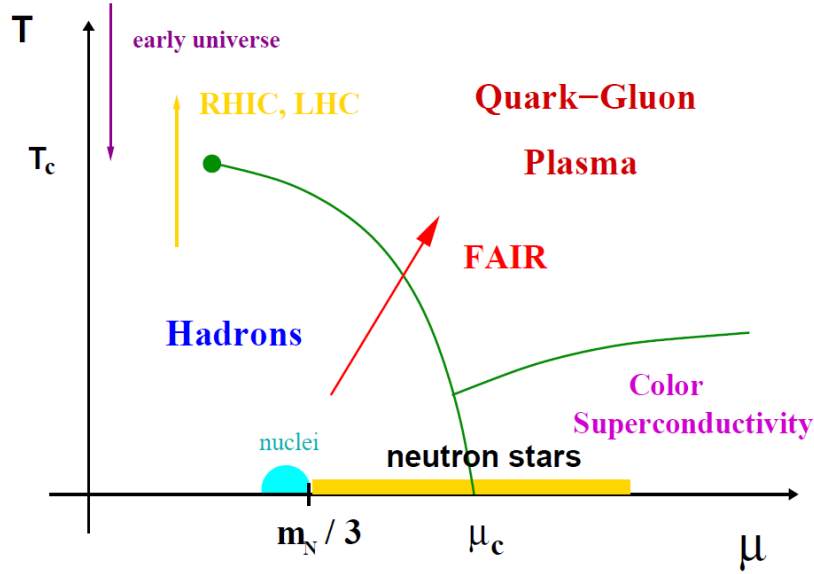
M	: Matris elemanı
$D^{\mu\nu}$: Etkileşim propagatörü
\mathcal{M}_i	: Matris elemanı karesinin bileşenleri, $i = \parallel, \parallel\perp, \perp$
J^μ	: Fermiyonik 4-vektör akımı
$P_{\mu\nu}$: Projektör operatörü
\mathcal{S}_{st}	: Simetri faktörü
W_{st}	: Geçiş genliği
ϵ_i	: Enerji
μ_i	: Kimyasal potansiyel
T	: Sıcaklık
\mathcal{C}	: Etkileşim faktörü
g	: Ayar parçacığının yükü
m^2	: Termal foton kütle karesi
m_D	: Debye kütlesi
m_L	: Landau kütlesi
p_F	: Fermi momentumu
v_F	: Fermi hızı
σ	: Elektriksek iletkenlik katsayısı
κ	: Isıl iletkenlik katsayısı
η	: Kayma viskozitesi katsayısı
$\Pi_{\mu\nu}$: Polarizasyon tensörü
Π_{\parallel}	: Boyuna polarizasyon tensörü
Π_{\perp}	: Enine polarizasyon tensörü
$I[f]$: Çarpışma integrali
$f_s(\vec{p}, \vec{x}, t)$: Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu
$\Phi_{q,s}$: Taşınım katsayıları için Boltzmann denkleminin çözümü, $q = \sigma, \kappa, \eta$
P_q	: Taşınım katsayılarına ait momentum polinomu, $q = \sigma, \kappa, \eta$
ν_q	: Taşınım katsayılarına ait çarpışma frekansı, $q = \sigma, \kappa, \eta$
τ_q	: Taşınım katsayılarına ait rahatlama zamanı, $q = \sigma, \kappa, \eta$

1 GİRİŞ

Kompakt yıldızlar, yoğunluğu nükleer yoğunluktan $\rho_0 \approx 2,8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ daha fazla olan astrofiziksel nesnelere dir. Bu nesnelere statik (kütle, yarıçap vb.) özellikleri durum denklemleri kullanılarak belirlenebilir [1, 2, 3]. Dinamik özelliklerini (ısı-elektriksel iletkenlik, kayma-yığın viskozitesi) ise taşıma katsayılarını belirleyerek anlayabiliriz [4, 5]. Statik özelliklerin anlaşılmasında kullanılan durum denklemleri bize kompakt yıldızların içeriği hakkında nicel bilgiler verememektedir. Örneğin nötron, proton ve elektrondan oluştuğunu varsaydığımız bir nötron yıldızı modeli için, Fermi basıncı yıldızda meydana gelen kütleçekimsel etkileri yenmeye ve yıldızın çökmesini engellemeye yeterli değildir [6, 7]. Veya çekirdeğinin sadece kuarklardan oluştuğu durum için elde edilen kütle değerleri $1,45M_\odot$ ile $1,65M_\odot$ güneş kütlesi aralığındadır [8]. Bu durum gözlemlenen nötron yıldızı kütlelerinden $1,1M_\odot < M < 2,1M_\odot$ aşağıdadır. Yüksek yoğunluk ve düşük sıcaklık limitinde kuantum renk dinamiği içinde ortaya renk süperiletkenlik fazı çıkmaktadır [9, 10]. Bu veriler bize yıldızın iç yapısındaki madde bileşenlerinin sanılandan çok daha farklı veya karmaşık olabileceği hakkında ip uçları vermektedir [11].

Kompakt yıldızları kabaca üç kısma ayırabiliriz. En iç kısım madde bileşimini tam olarak bilmediğimiz iç çekirdek, ara kısımda nötron, proton, elektron ve müonlardan oluşan dış çekirdek, en dışta ise yaklaşık 1km kalınlığında olan kabuk bölgesi bulunur [7, 12, 13]. Çekirdeğin iç kısmını serbest kuarklar, hyperonlar, süperakışkan moduna girmiş protonlar veya bilmediğimiz başka madde formları oluşturabilir. Sıcaklık ve kimyasal potansiyele bağlı olarak maddenin fazlarının nasıl değiştiğini Şekil 1.1'den görebiliriz. Kompakt yıldızlar kimyasal potansiyelin yüksek, sıcaklığınsa düşük olduğu bölgeye karşılık gelmektedir. Bu bölgeyle alakalı bilimiz güçlü etkileşimleri anlamak için kullandığımız kuantum renk di-

namliğini bu bölgede çözemediğimizden yetersizdir [14]. Taşınım özelliklerinin belirlenmesi, bu yıldızlarda meydana gelen karmaşık süreçleri, bu yoğun ortamdaki madde bileşenlerinin anlaşılmasını ve modellenmesini sağlayabilir. Bu sayede gözlemlerden elde edilen bilgilerle yoğun ortamın içeriği ve etkileşimlerin teorik özellikleri üzerine bilgiler edinebiliriz.



Şekil 1.1: Sıcaklık ve kimyasal potansiyel yönünde maddenin fazları [15].

Taşınım katsayıları ilgilendiğimiz korunumlu büyüklüklerin bir bölgeden diğerine nasıl aktarıldığını bize anlatır. Bu büyüklükler yük, momentum veya sıcaklık olabilir. Taşınımından bahsedebilmemiz için incelediğimiz sistem denge durumundan sapsmış olmalıdır çünkü denge durumunda Boltzmann denklemi sıfıra eşit olacağı için taşınımından söz edemeyiz. Denge dışı durumda oluşacak farklı büyüklük gradientleri bize farklı taşınım katsayıları için ifadeler verecektir. Özel görelilik etkilerini dikkate almadığımız durumlar için birinci mertebeden hidrodinamik ifadeler sistemi anlamamız için yeterlidir. Tersinmez işlemler üzerinden yitimli makroskopik akılar tanımlayabiliriz. Bu akılarla birinci mertebeden hidrodinamik ifadeleri karşılaştırıp taşınım katsayılarının sahip olması gereken ifadeleri belirleyebiliriz. Makrofizik kullanarak elde ettiğimiz sonuçlar ilgilendiğimiz problemdeki mikroskopik olaylarla doğrudan ilişkilidir.

Kompakt yıldızların dinamik özelliklerini anlamak için taşınım katsayılarını anla-

malıyız [16, 17]. Bu büyüklükler parçacık etkileşimlerine doğrudan bağlıdır. Çeşni değiştirmeyen, kimyasal potansiyelin değişmediği, sadece parçacıkların enerji momentum alışverişi yaptıkları saçılma etkileşimleriyle ilgileniyoruz. Böyle bir etkileşim için taşınım büyüklüklerinin belirlenmesi bize etkileşimi anlamak konusunda yardımcı olacaktır. Kompakt yıldızlar için böyle saçılma etkileşimlerinde, etkileşime girecek parçacıklar genellikle dejenere fermiyonlardır. Düşük sıcaklıkta parçacıkların Fermi momentumu ortamın sıcaklığından çok yüksek olacağı için taşınımından Fermi yüzeyi etrafında bulunan parçacıklar sorumludur.

Bu çalışmada elektriksel iletkenlik, ısı iletkenlik ve kayma viskozitesi dejenere fermiyonlar için sıcaklığın kimyasal potansiyele göre çok küçük olduğu durumlarda hesaplanmıştır. Her bir büyüklük kompakt yıldızlarda ve nötron yıldızları çarpışmalarında önemli rol oynamaktadır [18]. Bu dinamik büyüklükler yıldızların davranışlarını anlama ve gözlemleri yorumlama kısmında bize yardımcı olabilir. Bu taşınım katsayılarını anlamaya yönelik ilk detaylı çalışmalar Flowers ve Itoh tarafından yapılmıştır [19, 20]. Nötron, proton ve elektron bileşiminden oluşan bir madde dağılımı için manyetik alanın olmadığı durumda çok parçacık etkilerini hesaba katarak elektriksel iletkenlik, ısı iletkenlik ve kayma viskozitesi katsayılarını hesaplamışlardır. Ortam etkilerinin dahil edildiği ilk çalışma Heiselberg tarafından kuark plazması için yapılmış ve etkileşim propagatörünün enlemsel kısmının taşınım katsayıları üzerine önemi ortaya konmuştur [21, 22, 23]. Daha sonra farklı yoğunluk profilleri için taşınım katsayılarına gelen düzeltmeler Shternin ve Yakovlev tarafından bulunmuştur. Isıl iletkenlik ve kayma viskozitesi hesaplamalarını müonun da dahil olduğu durumlarda iç çekirdek bölgesi için süperiletkenlik ve süperakışkanlık etkilerini hesaba katarak yapmışlardır [24, 25, 26].

Hızlı dönen nötron yıldızlarında osilasyonlar meydana gelir ve bunların sonucunda farklı modlarda kütleçekimsel dalgalar üretilir. Bu modlardan birisi olan r – modlar kütleçekimsel dalgaların yayılmasından kaynaklı kararsız hale gelmektedir. Bu da yıldızın yavaşlamasına yol açar. Bu kararsızlığı dengelemek için “kayma” viskozitesi veya çeşni değiştiren etkileşimler sonucu ortaya çıkan “yığın” viskozitesi etkileri hesaba katılmalıdır [27, 28, 29, 30]. Standart nötron yıldızı bi-

leşenleri için elde edilen viskozite büyüklükleri bu kararsız modları sönmek için yeterli değildir [31, 32, 33, 34, 35, 36]. Nötron yıldızı birleşmesi olayları da kütleçekimsel dalga kaynaklarından birisidir ve viskoz büyüklükler bu birleşme olaylarının anlaşılması için önem arz etmektedir [37, 38, 39]. Flowers ve Itoh tarafından elde edilen sonuçlarda, kayma viskozite katsayısı η 'nın sıcaklığa bağlılığı T^{-2} olarak bulunmuştur. Enlemsel etkileşimler dikkate alındığında bu sonucun rölativistik parçacıklar için $T^{-5/3}$ olduğu görülmüştür.

Kompakt yıldızların, özellikle genç nötron yıldızlarının, $t < 100$ yıl, henüz ısı dengeye gelemediklerinden, soğuma davranışlarının anlaşılması ve modellenmesi için ısı iletkenlik ve nötrino yayılımının anlaşılması gerekmektedir [40, 41]. Isı iletkenlikte çoğu durumda elektronlar hafif olmalarından kaynaklı baskın olan taşınım parçacıklarıdır. Nötron yıldızı birleşmelerinde ortaya çıkan yüksek ısıyı dağıtmak ve sistemi dengeye getirmek için ısı iletkenlik önemli bir parametredir. Soğuk yıldızlarda parçacıkların Fermi momentumunun sıcaklığa oranı çok düşük olduğu için $T/p_F \approx 10^{-5}$ bu parametre çok önemli değildir [42, 43, 44, 45, 46]. Rölativistik dejenere madde dağılımları için ısı iletkenlik katsayısı sıcaklıktan bağımsız, rölativistik olmayan ağır parçacıklar için sıcaklığın tersi olarak bağımlıdır [47, 25, 48].

Elektriksel iletkenlik kompakt yıldızları anlamak için önemli olan bir başka parametredir. Elektronların baskın olduğu durumlar için elektriksel iletkenlik enlemsel plazmonlar tarafından baskılanır. Yoğunluğun arttığı iç bölgede kuarklar da elektriksel iletkenliğe katkıda bulunabilir. Elektriksel iletkenliğin anlaşılması kompakt yıldızlarda manyetik alan oluşumlarını anlamak adına önemli bir parametredir [49, 50, 51, 52].

Yukarıda verilen motivasyonlar, taşınım katsayılarının anlaşılmasının gözlemleri yorumlamada ve yoğun ortamdaki madde etkileşimlerini anlamada ne kadar önemli olduğunu göstermektedir. Sahip oldukları ortalama enerji (kimyasal potansiyel) sebebiyle üç tip kuark u , d ve s kompakt yıldızlarda bulunabilir [53]. Sahip oldukları renk yükünü düşündüğümüz zaman, yıldız içinde yoğun bölgelerde bir çok

farklı parçacık bileşeni ortaya çıkabilir. Bu çalışmada genel bir dispersiyon ilişkisi düşünülerek elde edilen taşınım katsayıları, bir çok farklı parçacık kompozisyonunun etkilerinin nicel olarak anlaşılmasını sağlayabilir. Dejenere fermiyonik parçacıklar sahip oldukları yüksek Fermi momentumu sebebiyle yoğun ortamda etkileşimleri domine ederler. Bozonların etkili olduğu durumlar sadece Fermiyonların çiftlendiği durumlardır. Bu sebeple baskın etkileşim olan saçılma etkileşimlerini elektromanyetik ve güçlü etkileşimler çerçevesinde ele aldık. Uzun erimli enlemsel etkileşimler açılım parametremizin efektif olarak $(T/p_F)^{1/3}$ olmasını sağlar. Bu sebeple ikinci ve üçüncü mertebeden düzeltme terimlerini oluşabilecek belirsizlikleri anlamak adına enlemsel etkileşimler için hesabımıza dahil edebiliriz. Daha yüksek mertebeden düzeltme terimlerinin belirlenmesi için polarizasyon etkilerini dikkate almadan önceki kısımda yapılan düşük sıcaklık seri açılımının bir üst mertebeye geçilerek yapılması gerekmektedir. Ancak ilgilendiğimiz tipik sıcaklıklarda, sıcaklığın Fermi momentumuna oranı $T/p_F \approx 10^{-4}$ mertebesinde olduğu için, baskın etkileşimlerin anlaşılması noktasında çok yüksek mertebeden etkileri göz ardı edebiliriz. Bu sonuçlar sıcaklıkların MeV mertebesinde olduğu nötron yıldızı birleşmeleri için de ikinci mertebeye düzeltmelere ihtiyaç duymadan kullanılabilir. Bu durum için $T/p_F \approx 10^{-2} - 10^{-1}$ civarındadır. Çok ciddi yaklaşıklıkların yapılarak modellendiği bu birleşme olaylarında elimizdeki sonuçlar geçerli olacaktır.

Bu tezde taşınım katsayıları ve onları belirlememize yarayan çarpışma frekansları genel bir saçılma etkileşimi düşünülerek elde edilmiştir. Tezin ilerleme şeması aşağıdaki gibidir.

İkinci bölümde kinematik ve hidrodinamik ifadeler rölativistik olmayan durum için hesaplanmıştır. Sistemin düşük enerji davranışlarını anlamak için, lokal olarak denge noktasından çok sapmayan durumlar için elde edilen yitimli akı ifadeleri ilgilendiğimiz taşınım katsayılarına karşılık gelecek şekilde belirlenmiştir. Entropi üretim hızı denklemi türetilerek bu katsayıların ilgili büyüklüklerin gradyentine nasıl bağlı olduğu belirlenmiştir.

Üçüncü bölümde Boltzmann denklemi Chapman-Enskog yaklaşıklığı kullanılarak lineerize edilmiş ve yitimli akı ifadeleri yaklaşıklık içinde tanımlanan pertürbasyon fonksiyonu cinsinden hesaplanmıştır. Uygun çözüm önerileri ile Boltzmann

denklemleri kullanılarak Fermi-akışkan teorisi yaklaşımı çerçevesinde taşınım katsayıları, çarpışma frekansları ve ilgilendiğimiz taşınım katsayısına karşılık gelen momentum polinomları belirlenmiştir.

Dördüncü bölümde $SU(N)$ ayar etkileşimi için yoğun ortam etkileri göz önünde bulundurularak saçılma etkileşimi ve ortam etkilerini içeren polarizasyon tensörünün bileşenleri hesaplanmış ve limit durumları incelenmiştir.

Beşinci bölümde çarpışma integralinin genel formu kimyasal potansiyelin değişmediği saçılma etkileşimi için belirlenmiştir. Daha sonra çarpışma integrali farklı momentum ölçeklerinde açılım parametremiz olan (T/μ) 'ye göre hesaplanmış ve her bir taşınım katsayısının belirlenmesi için gerekli rahatlama frekansları bulunmuştur.

Son bölümde baskın etkileşimler için taşınım katsayılarının sıcaklıkla olan ilişkileri tartışılmış bulduğumuz ifadeler değerlendirilmiştir.

2 KİNEMATİK VE HİDRODİNAMİK DENKLEMLER

2.1 Boltzmann Denklemi

Boltzmann denklemi bize dağılım fonksiyonunun zamanla değişimini gösterir. Denge dışı bir durum için en genel halde dağılım fonksiyonu, $f(\vec{p}, \vec{x}, t)$, momentuma, konuma ve zamana bağlı olabilir:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_x f + \vec{R} \cdot \vec{\nabla}_p f = \hat{I}[f]. \quad (2.1)$$

Burada $\vec{u} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$ parçacığın hızını ve $\vec{R} \equiv \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$ ise ona etki eden dış kuvveti temsil etmektedir. $\hat{I}[f]$ çarpışma integrali olarak adlandırılır:

$$\begin{aligned} & \hat{I}_{st}^{\text{lin}} [f_{1,s}[\Phi_{1,s}], f_{2,t}[\Phi_{2,t}], f_{3,s}[\Phi_{3,s}], f_{4,t}[\Phi_{4,t}]] \\ &= - \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st} (f_{1,s} f_{2,t} (1 - f_{3,s}) (1 - f_{4,t}) - (1 - f_{1,s}) (1 - f_{2,t}) f_{3,s} f_{4,t}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bu fonksiyon, \vec{x} konumunda olan ve \vec{p} momentumuna sahip bir parçacığın mikroskopik etkileşimler yüzünden birim zamanda deneyimlediği çarpışma sayısını ifade etmektedir. W_{st} etkileşime giren parçacıkların geçiş oranlarını ifade eder. s ve t saçılma etkileşimine giren parçacıkların türlerini gösteren indisler olmak üzere, N çeşit parçacığın etkileşime girdiği durumlarda, her parçacık kendi dağılım fonksiyonu f_s 'e sahip olacaktır. Bu durumda iki parçacık saçılma etkileşimleri için, $s \in S \equiv \{1, \dots, N\}$ ve $t \in S$, elimizde N tane çiftlenmiş Boltzmann denklemi olur [54]:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_x f_s + \vec{R} \cdot \vec{\nabla}_p f_s = \sum_t \hat{I}_{st} [f_s, f_t]. \quad (2.3)$$

Denge dışı bir sistemin davranışını incelediğimizden, parçacık etkileşimlerinin önemli ölçüde baskın olmadığı durumlarda çarpışma integralinin etkisi ortadan kalkar. Çarpışma integralini Boltzmann denkleminde denge dışılığı ortaya koyan bir kaynak terimi olarak düşünebiliriz.

Boltzmann denklemini kullanarak herhangi bir gözlemlenebilirin taşınım özelliklerini inceleyebiliriz. Herhangi bir büyüklük, $\psi(\vec{x}, t; \vec{p})$, için küçük bir hacimde parçacık sayısı ve momentumu üzerinden istatistiksel ortalamayı aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\langle \psi \rangle_s = \frac{1}{n_s} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \psi f_s \quad , \quad n_s = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} f_s. \quad (2.4)$$

Boltzmann denklemini $\psi(\vec{x}, t; \vec{p})$ ile çarpıp momentum üzerinden integre edip düzenlediğimizde aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{\partial n \langle \psi \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla}_x \cdot (n \langle \psi \vec{u} \rangle) = n \left(\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_x \psi \rangle + \langle \vec{R} \cdot \vec{\nabla}_p \psi \rangle \right) + \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \psi \hat{I}[f]. \quad (2.5)$$

Bu ifadede konum ve zaman türevleri $\psi(\vec{x}, t; \vec{p})$ 'ın üretimini, momentum türevi dış kuvvetlerin etkisini, çarpışma integralini içeren terim ise bu çarpışmalardaki üretim hızını bize göstermektedir. Çarpışma integralinin ψ ile çarpımının ortalamasının sıfır olduğu durumlarda 2.5'nolu denklemi kullanarak korunan büyüklükler için hidrodinamik denklemler elde edebiliriz.

2.2 Hidrodinamik Denklemler

Hidrodinamik denklemler bir sistemin düşük enerji davranışlarını anlamak için kullanılabilir. Sistemin küçük bir kısmını inceleyerek geneli hakkında önemli bilgiler edinebiliriz. İncelediğimiz bölge üzerindeki makroskopik büyüklükler, lokal olarak tanımlı hız, sıcaklık ve kimyasal potansiyel cinsinden ifade edilebilirler. Rölativistik olmayan hızlar için parçacık sayısının, momentumun ve enerjinin korunduğu durumları incelemek istiyoruz. Korunan büyüklükleri incelerken çarpışma integrali bu ifadede açıkça yer almasa da denge dışı dağılım fonksiyonlarının ne olduğunu belirlerken ona ihtiyacımız olduğunu söyleyebiliriz.

İlk durumda $\psi = m$ için taşınım denklemini kütle yoğunluğu $\rho_\alpha \equiv \sum_{s \in S_\alpha} m_s n_s$, kütle merkezi hızı \vec{v}_α ve momentum yoğunluğu $\vec{g}_\alpha \equiv \rho_\alpha \vec{v}_\alpha$ cinsinden yazabiliriz:

$$\sum_{s \in S_\alpha} \left(\frac{\partial m_s n_s}{\partial t} + \vec{\nabla}_x \cdot (n_s \langle m_s \vec{u} \rangle_s) \right) = \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla}_x \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}_x \cdot \vec{g} = 0. \quad (2.6)$$

İkinci durumda $\psi = E$ ise taşınım denklemini toplam enerji yoğunluğunu ifade eden bir denklem olarak yazabiliriz:

$$\sum_{s \in S_\alpha} \left(\frac{\partial n_s \langle E \rangle_s}{\partial t} + \vec{\nabla}_x \cdot (n_s \langle E \vec{u} \rangle_s) \right) = \sum_{s \in S_\alpha} n_s \left(\left\langle \frac{\partial E}{\partial t} \right\rangle_s + \langle \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_x E \rangle_s + \langle \vec{R} \cdot \vec{\nabla}_p E \rangle_s \right) \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla}_x \cdot \vec{J}_{\mathcal{E}_\alpha} = \sum_{s \in S_\alpha} n_s \langle \vec{R} \cdot \vec{u} \rangle_s = n_\alpha \vec{R} \cdot \vec{v}_\alpha.$$

Rölativistik olmayan durumda belirli bir parçacık türü için enerji yoğunluğu ve akısı,

$$\mathcal{E}_\alpha \equiv \sum_{s \in S_\alpha} n_s \langle E \rangle_s = \sum_{s \in S_\alpha} \frac{\rho_s}{2} \langle u^2 \rangle_s \quad \text{ve} \quad \vec{J}_{\mathcal{E}_\alpha} \equiv \sum_{s \in S_\alpha} n_s \langle E \vec{u} \rangle_s = \sum_{s \in S_\alpha} \frac{\rho_s}{2} \langle u^2 \vec{u} \rangle_s \quad (2.8)$$

olarak yazabiliriz. Açık bir sistem bir çok kanalla enerjisini kaybedebilir. Bu kayıp sistemin dinamik zamanından daha kısa bir ölçekte gerçekleşiyorsa yukarıdaki denklemi böyle bir sistemi anlamak için kullanabiliriz. Etkileşimlerin hızı sistemin dinamik zamanından daha uzunsa çarpışma integralini ihmal edemeyiz.

Son olarak $\psi = \vec{p}$ için momentum akımına ait korunum denklemini elde ederiz:

$$\sum_{s \in S_\alpha} \left(\frac{\partial n_s \langle p_i \rangle_s}{\partial t} + \partial_{x_j} (n_s \langle u_j p_i \rangle_s) \right) = \sum_{s \in S_\alpha} n_s \left(\left\langle \frac{\partial p_i}{\partial t} \right\rangle_s + \langle u_j \partial_{x_j} p_i \rangle_s + \langle R_j \cdot \partial_{p_j} p_i \rangle_s \right) \quad (2.9)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_{\alpha,i}}{\partial t} + \partial_{x_j} J_{g_{\alpha},ij} = n_\alpha R_i.$$

Hızlar ve kütle yoğunluğu cinsinden rölativistik olmayan durum için momentum akım ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$J_{g_{\alpha},ij} \equiv \sum_{s \in S_\alpha} n_s \langle u_j p_i \rangle_s = \sum_{s \in S_\alpha} \rho_s \langle u_j u_i \rangle_s. \quad (2.10)$$

Yukarıda elde edilen ve farklı büyüklüklerin (kütle, enerji, momentum) değişimlerini ifade eden hidrodinamik denklemleri rölativistik olmayan durum için ayrıştırılmış hızlar cinsinden yazabiliriz. Seçtiğimiz hacim elemanının hızı \vec{u} ve izlediğimiz parçacığın hızı \vec{w}_α olsun. Ortalama kütle merkezinin hızına göre parçacığın hızı aşağıdaki gibidir:

$$\vec{w}_\alpha \equiv \vec{u} - \vec{v}_\alpha \quad \text{ve} \quad \langle \vec{w}_\alpha \rangle_s = 0. \quad (2.11)$$

Bu durumda enerji yoğunluğunun rölativistik olmayan durum için dispersiyon ifadesi açıkça belirlenebilir:

$$\mathcal{E}_\alpha = \sum_{s \in S_\alpha} \frac{\rho_s}{2} \langle u^2 \rangle_s = \sum_{s \in S_\alpha} \frac{\rho_s}{2} \langle (v_{\alpha i} + w_{\alpha i}) (v_{\alpha i} + w_{\alpha i}) \rangle_s = \mathcal{E}_{0\alpha} + \frac{\rho_\alpha}{2} v_\alpha^2. \quad (2.12)$$

Akışkanın eş-hareketli çerçevedeki iç enerjisi $\mathcal{E}_{0\alpha} = \sum_{s \in S_\alpha} \frac{\rho_s}{2} \langle w_\alpha^2 \rangle_s$ olarak eş hareketli çerçevede tanımlı tek parçacık enerjileri $\epsilon_s \equiv \frac{m_s}{2} w_\alpha^2$ cinsinden ifade edilir. Rölativistik durum için dispersiyon ifadesi basit bir kuadratik formda olmayacağı için yukarıda yapılan ayrıştırma işlemi daha karmaşık bir ifadede olacaktır. Ancak Fermi-akışkan teorisi için daha basit bir formda bile olabilir çünkü dispersiyon bağıntısı lineer bir forma sahiptir $\epsilon - \mu = \vec{v}_F \cdot (\vec{p} - \vec{p}_F)$. Benzer şekilde momentum akımını sistemin izotropik olduğu varsayımı altında denge durumu için hızlar cinsinden ayrıştırabiliriz:

$$J_{g\alpha,ij} = \sum_{s \in S_\alpha} \rho_s \langle (v_{\alpha i} + w_{\alpha i})(v_{\alpha j} + w_{\alpha j}) \rangle_s = \rho_\alpha v_{\alpha i} v_{\alpha j} + \frac{2}{3} \mathcal{E}_{0\alpha} \delta_{ij} \equiv \Pi_{\alpha ij}. \quad (2.13)$$

Burada $\Pi_{\alpha ij}$ denge stres-enerji tensörüdür. $g_{\mu\nu} = (-1, +1, +1, +1)$ için bu ifadenin uzay bileşenleri bize rölativistik olmayan durumda basınç ve enerji arasındaki ilişkiyi verir:

$$\Pi_{\alpha ij} = (\mathcal{E}_\alpha + P_\alpha) v_{\alpha i} v_{\alpha j} + P_\alpha \delta_{ij} \quad \text{ve} \quad P_\alpha = \frac{2}{3} \mathcal{E}_{0\alpha}. \quad (2.14)$$

Momentum akımını korunumlu olan stres enerji tensörü ve korunumlu olmayan (yitimli) kısım olarak iki kısma ayırabiliriz:

$$\begin{aligned} J_{g\alpha,ij} &= \rho_\alpha v_{\alpha i} v_{\alpha j} + \sum_{s \in S_\alpha} \rho_s \langle w_{\alpha i} w_{\alpha j} \rangle_s \\ &= \rho_\alpha v_{\alpha i} v_{\alpha j} + P_\alpha \delta_{ij} + \sum_{s \in S_\alpha} \rho_s \langle w_{\alpha i} w_{\alpha j} \rangle_s - P_\alpha \delta_{ij} = \Pi_{\alpha ij} + \pi_{\alpha ij}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Korunumlu olmayan kısım denge durumunda sifira eşittir ve aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\pi_{\alpha ij} \equiv \sum_{s \in S_\alpha} \rho_s \langle w_{\alpha i} w_{\alpha j} \rangle_s - P_\alpha \delta_{ij}. \quad (2.16)$$

Son olarak hızları ayrıştırdığımız durum için enerji akımı ifadesi

$$J_{\mathcal{E}\alpha,i} = \sum_{s \in S_\alpha} \frac{\rho_s}{2} \langle u_j u_j u_i \rangle_s = (\mathcal{E}_\alpha + P_\alpha) v_{\alpha i} + \pi_{\alpha ij} v_{\alpha j} + J_{T\alpha,i} \quad (2.17)$$

olarak elde edilir. Yitimli enerji akımı $\vec{J}_{T\alpha}$ ifadesi yine denge durumunda sıfırdır. Enerji ve momentum akımlarını ayrıştırdığımız ifadeleri yukarıdaki akı ifadelerinde yerine yazdığımızda kütle korunumu denklemini kullanarak momentum akımı için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{\partial v_{\alpha,i}}{\partial t} + v_{\alpha,j} (\partial_j v_{\alpha,i}) = -\frac{1}{\rho_\alpha} \partial_i P_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} R_i - \frac{1}{\rho_\alpha} \partial_j \pi_{\alpha,ij}. \quad (2.18)$$

Bu ifade Navier-Stokes denklemi formundadır. İlk terim bize hızın basıncın uzaysal türeviyle azaldığını söyler, ikinci terim Newton'un ikinci yasası $\vec{F} = m\vec{a}$ 'ya karşılık gelir, üçüncü terim ise akışkan içindeki momentum transferinin değişimini anlatır. Benzer şekilde enerji yoğunluğunu hızlarına ayrıştırılmış bileşenler cinsinden süreklilik ve momentum denklemini kullanarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial t} + \partial_i J_{\mathcal{E}_\alpha, i} &= n_\alpha \vec{R} \cdot \vec{v}_\alpha \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{0\alpha}}{\partial t} &= -((\mathcal{E}_{0\alpha} + P_\alpha) \delta_{ij} + \pi_{\alpha ij}) \partial_i v_{\alpha j} - (\partial_i \mathcal{E}_{\alpha 0}) v_{\alpha i} - \partial_i J_{T\alpha, i}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Burada ilk terim farklı akışkan bileşenleri için momentum değişimi üzerinden kinetik enerji transferini tarif eder, ikinci terim iç enerjideki değişimi gösterir, son terim ise farklı akışkan bileşenleri arasındaki enerji transferini tarif eder. Enerjideki değişime termodinamik çerçevesinden bakabiliriz. Denge durumuna yakın bir sistem için Gibbs serbest enerjisi enerji yoğunluğu cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathcal{E}_0 + P = \sum_s \mu_s n_s + Ts. \quad (2.20)$$

Termodinamiğin birinci yasasına göre iç enerji yoğunluğundaki değişim

$$d\mathcal{E}_0 = d\left(\frac{E}{V}\right) = \frac{1}{V}dE - \frac{E}{V^2}dV = Tds + \sum_s \mu_s dn_s \quad (2.21)$$

şeklinindedir. Bu eşitliği ayrıştırılmış enerji yoğunluğu ifadesinde yerine yazalım. Süreklilik denklemini kullanarak enerji yoğunluğundaki değişimi entropi üretim hızı denklemi olarak yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{0\alpha}}{\partial t} &= -((\mathcal{E}_{0\alpha} + P_\alpha) \delta_{ij} + \pi_{\alpha ij}) \partial_i v_{\alpha j} - (\partial_i \mathcal{E}_{\alpha 0}) v_{\alpha i} - \partial_i J_{T\alpha, i} \\ \frac{\partial s_\alpha}{\partial t} + \partial_i \left(s_\alpha v_i + \frac{J_{T\alpha, i}}{T} \right) &= -\frac{1}{T} (\pi_{ij} \partial_i v_{\alpha, j} + J_{T\alpha, i} \partial_i T/T). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Entropi veya hız için Boltzmann denklemini kullanarak hidrodinamik ifadeler elde etmek yerine, bu ifadeler için bazı parametrelere göre seri açılımı yapıp her mertebeden gelen düzeltmeleri belli katsayılarla çarpıp ve sistematik bir biçimde birbirine eklediğimiz bir ifade olarak da görebiliriz. Örneğin entropi üretimi denkleminde $\partial_i T/T$ ve $\partial_i v_{\alpha, j}$ için bu terimlere karşılık gelen akılar, $J_{T\alpha, i}$ ve π_{ij} , görünmektedir. Taşınım katsayılarını istenilen büyüklükle lineer bir ilişki üzerinden

inceleyebiliriz. Örneğin sıcaklık kaybını ifade ettiğimiz ısı akımı sıcaklık değişimi üzerinden lineer mertebede yazabiliriz:

$$\vec{J}_T \approx -\kappa \vec{\nabla} T. \quad (2.23)$$

Burada κ ısı iletkenlik katsayısı olarak isimlendirilir ve pozitif tanımlı olması için açılımın işareti negatif seçilmiştir. Benzer şekilde yitimli momentum akımını hızların türevi cinsinden lineer mertebede açabiliriz. Momentum tensörünü hızlar cinsinden ifade etmek istediğimizde elimizde bağımsız üç tane tensör vardır. Bunların lineer kombinasyonu olarak ilk mertebede momentum akımının açılımını yapabiliriz:

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &\approx -\eta \left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3} \partial_k v_k \delta_{ij} \right) - \zeta \partial_k v_k \delta_{ij} \\ &\equiv -2\eta \left(v_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) - \zeta \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Burada η kayma (shear) viskozitesi ve ζ gövde (bulk) viskozitesi katsayısı olarak adlandırılır. Elektrik iletkenlik katsayısı için başka bir korunan büyüklük üzerinden sonraki bölümde katsayı belirlenecektir. Bu katsayıların neye eşit oldukları mikroskopik hesaplamalardan belirlenebilir. Yukarıda tanımladığımız büyüklükleri entropi üretim ifadesinde yerine yazıp hacim üzerinden integralini alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \int d^3x \left(-\frac{1}{T} \pi_{ij} \partial_i v_j - \frac{1}{T} \partial_i J_{T,i} \right) \\ &= \int_V \frac{1}{T} \left(\left(2\eta \left(v_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\partial_k v_k) \right)^2 + \zeta (\partial_k v_k)^2 \right) + \frac{\kappa}{T} (\partial_i T)^2 \right) - \int_{\partial V} \left(\frac{\vec{J}_T}{T} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$(2.26)$$

Termodinamiğin ikinci yasasına göre entropi üretim ifadesinin pozitif tanımlı olması gerektiğini biliyoruz. Bu sebeple taşınım katsayıları pozitif tanımlı büyüklükler olmak zorundadır. Bu ifade en genel haliyle başka terimler içerebilir. Nötrinoların süpernovadan ayrılması örnek olarak verilebilir, bu durumda nötrinolar için yitim içeren terimleri eklememiz gerekmektedir.

3 MATERYAL ÖZELLİKLERİ VE TAŞINIM KATSAYILARI

Boltzmann denklemi sayesinde mikroskopik seviyede taşınım katsayılarını hesaplayabiliriz. Her parçacık kendi kinetik denklemini sağlar ve bu denklemler birbirleriyle olan çarpışma terimleri yüzünden çiftlenmiş bir denklem seti oluştururlar. Akışkanın davranışı onu oluşturan bileşenlerin mikroskopik davranışları sayesinde belirlenir ve korunan her bir büyüklüğe karşı gelen akım onu meydana getiren parçacık türüne bağlı olarak bu davranışa katkı sağlar. Materyal özelliklerini anlamak için bu akımların denge durumundan sapmalarını inceleyebiliriz[55, 56].

3.1 Chapman-Enskog Yaklaşımı

Chapman-Enskog yaklaşımında ilgilendiğimiz parçacık türüne ait dağılım fonksiyonunun lokal denge durumu etrafında seri açılımı yapılır:

$$f_s(\vec{p}; \vec{x}, t) \approx f_s^{(0)}(\vec{p}; \vec{x}, t) + \delta f_s(\vec{p}; \vec{x}, t) \quad \text{ve} \quad f_s^{(0)}(\vec{p}; \vec{x}, t) = \frac{1}{e^{(\epsilon_s - \mu_s)/T} + 1}. \quad (3.1)$$

Burada $f_s^{(0)}(\vec{p}; \vec{x}, t)$ sistemin denge durumundaki dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir. Eş hareketli çerçevede tanımlı enerji aynı zamanda hızın bir fonksiyonudur, $w(\vec{p}; \vec{x}, t) = \vec{u}(\vec{p}) - v(\vec{x}, t)$. Düşük sıcaklıklarda parçacıklar Fermi yüzeyi etrafındadır, bu sebeple denge dışılık Fermi yüzeyi etrafında seçilmiştir:

$$\delta f_s = -\frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} \Phi_s + O(\Phi^2) \approx -\frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu_s)/T} + 1} \Phi_s = \frac{(1 - f_s^{(0)}) f_s^{(0)}}{T} \Phi_s. \quad (3.2)$$

Bu yaklaşımın temel fikri en küçük mertebeden olan terimleri tutup yüksek mertebeden gelen tüm düzeltme terimlerini ve terimlerini ihmal etmektir. Denklem 3.1 ile verilen ifadeyi Boltzmann denklemine (2.1) yazıp sadece en düşük mertebeden terimleri ve türevleri tutarsak, denklemin sol tarafı için aşağıdaki ifadeyi

elde ederiz:

$$\begin{aligned} \sum_t \hat{I}_{st}^{\text{lin}} &= \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_x f_s^{(0)} + \vec{R} \cdot \vec{\nabla}_p f_s^{(0)} \\ &= \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \frac{\partial \mu_s}{\partial t} - \frac{\epsilon - \mu_s}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \left(R_i - \partial_i \mu_s - \frac{\epsilon - \mu_s}{T} \partial_i T + \partial_i \epsilon \right) \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Eş hareketli çerçeveden bakıldığında parçacığın hızı akışkanın hızıdır, $\vec{u} = \vec{w}$. Parçacığın hissettiği efektif bir kuvvet tanımlayarak yeni bir elektrik alan yazabiliriz $R_{si}^* \equiv R_{si} - \partial_i \mu_s - \frac{s}{n_s} \partial_i T = q_s E_i - \partial_i \mu_s - \frac{s}{n_s} \partial_i T \equiv q_s E_i^*$. 3.4 ifadesindeki enerji türevlerini akışkanın momentumu, hızı ve hızının türevleri cinsinden yazmak mümkündür:

$$w_i \partial_i \epsilon = w_i \frac{\partial \epsilon}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial w_k} \partial_i w_k = -p_i w_j \left(v_{ij} - \frac{1}{3} \partial_k v_k \delta_{ij} \right). \quad (3.4)$$

Bu durumda Boltzmann denkleminde elde ettiğimiz 3.4 ifadesi aşağıdaki formu alır:

$$\sum_t \hat{I}_{st}^{\text{lin}} [f_s, f_t] = -\frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} w_i \left(\frac{\epsilon - h_s}{T} \partial_i T - q_s E_{si}^* + p_j \left(v_{ij} - \frac{1}{3} \partial_k v_k \delta_{ij} \right) \right). \quad (3.5)$$

Denklemin sol tarafını lineerize ettikten sonra, çarpışma integralini de lineer hale getirmeliyiz. Çarpışma integrali etkileşime giren parçacığın birim zamanda sahip olduğu çarpışma sayısını belirtir. 3.1 ifadesini çarpışma integralinde yerine yazıp en düşük mertebeden terimleri tuttuğumuzda lineerize edilmiş çarpışma integral sonucu elde edilir. Bu sonuçla birlikte elimizde pertürbasyon fonksiyonu Φ 'ye bağlı olan integral bir diferansiyel denklem olur:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} w_i \left(\frac{\epsilon - h_s}{T} \partial_i T - q_s E_{si}^* + p_j \left(v_{ij} - \frac{1}{3} \partial_k v_k \delta_{ij} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{T} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st} f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)} \right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)} \right) (\Phi_{1,s} + \Phi_{2,t} - \Phi_{3,s} - \Phi_{4,t}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Hidrodinamik denklemleri hesaplarken entropi üretim ifadesini bulmuş ve bunu taşınım katsayıları ve yitimli akımlarla ilişkilendirmiştik. Boltzmann denklemi üzerinden entropi yoğunluğunun ortalamasına bakıldığında, denge durumuna yakın bir sistem için entropi yoğunluğu ifadesi genel haliyle

$$s = -k_B \int \frac{d^3 p}{(2\pi \hbar)^3} (f \ln(f) + (1-f) \ln(1-f)) \quad (3.7)$$

ile verilir[57]. Bu durumda $\psi_s \equiv -(\ln(f_s) + (f_s^{-1} - 1) \ln(1 - f_s))$ olarak seçebiliriz. Ortalamalar üzerinden tanımladığımız Boltzmann denkleminde tüm parçacık türleri üzerinden toplam alıp entropi üretim ifadesinin yeniden yazabiliriz. Yitimli akımları sadece en düşük mertebeden pertürbasyonlar ve denge durumundaki dağılım fonksiyonu cinsinden yazdığımızda aşağıdaki ifadeleri buluruz:

$$\vec{J} = \sum_s \vec{J}_s = - \sum_s q_s \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \Phi_s \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} \vec{w}_s, \quad (3.8)$$

$$\vec{J}_T = \sum_s \vec{J}_{Ts} = - \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \Phi_s \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} (\epsilon - h_s) \vec{w}_s, \quad (3.9)$$

$$\pi_{ij} = \sum_s \pi_{sij} = - \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \Phi_s \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} w_{si} p_j. \quad (3.10)$$

Yük, ısıl iletkenlik ve kayma viskozitesi için katsayıları bulurken kinetik teoriden elde ettiğimiz makroskopik ifadeleri lineerize edilmiş Boltzmann denkleminin çözümlerinde kullanacağız. Elektriksel iletkenlik için aradığımız çözümde pertürbasyon ifadesinin formunun elektrik alana lineer şekilde bağlı olmasını bekleriz. Sıcaklık ve momentum türevinin olmadığı durumda çözüm mikroskopik hızla orantılı olmalıdır. Bu şartlar dikkate alındığında Boltzmann denkleminin çözümü

$$\Phi_{\sigma s} = q_s A_{\sigma s}(\epsilon) w_j \vec{E}_j^* \quad (3.11)$$

şeklindedir. Bu ifadeyi yukarıdaki denklemlerde yerine yazdığımızda elektrik akımı için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$J_i = - \sum_s q_s \vec{E}_j^* \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} A_{\sigma s}(\epsilon) w_i w_j \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon}. \quad (3.12)$$

Bu sonucu hidrodinamik formdaki elektriksel akımla karşılaştırırsak, $\vec{J} = \sigma \vec{E}^*$, elektriksel iletkenlik katsayısını belirleyebiliriz. 3.12'den görüldüğü üzere σ 'yı skaler bir şekilde ifade etmek için hızlar üzerinden bir ortalama almamız gerekmektedir. Isıl iletkenlik için aradığımız çözümde pertürbasyon ifadesinin genel formunun $\vec{w} \cdot \vec{\nabla} T$ 'a, belli katsayılarla lineer olarak bağlı olması gerektiğini görürüz. Bu durumda elektrik alan ve hızların türevi olmadığında ısıl akım için Boltzmann denkleminin çözümü

$$\Phi_{\kappa s} = -A_{\kappa s}(\epsilon) \frac{\epsilon - h_s}{T} w_j \partial_j T \quad (3.13)$$

olarak verilebilir. Negatif işaret ısının sıcaklığı düşürecek şekilde akması sebebiyle seçilmiştir. Bu ifadeyi de yukarıdaki denklemlerde yerine yazarsak ısıl akım için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\vec{J}_T = \frac{\partial_j T}{T} \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} w_i w_j (\epsilon - h_s)^2 A_{\kappa s}(\epsilon) \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon}. \quad (3.14)$$

3.14 denklemini, elektriksel iletkenlik ifadesinde olduğu gibi, ısıl iletkenlik katsayısının da ortalama aldıktan sonra skaler bir ifade olarak elde edilebileceğini söylemektedir.

Momentum akımı için aradığımız çözümde, pertürbasyon ifadesinin genel formu kayma viskozitesi için elde ettiğimiz hidrodinamik açılım ifadesi incelenerek belirlenebilir. $\pi_{ij} = -2\eta \left(v_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right)$ ifadesini momentum akımı ile karşılaştırsak, lineerize edilmiş Boltzman denkleminin çözümü

$$\Phi_{\eta s} = -A_{\eta, s}(\epsilon) \left(p_k w_l - \frac{1}{3} p_a w_a \delta_{kl} \right) \left(v_{kl} - \frac{1}{3} \partial_a v_a \delta_{kl} \right) \quad (3.15)$$

olarak bulunabilir. Bu durumda momentum akımı için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\pi_{ij} = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} A_{\eta}(\epsilon) \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} w_i p_j \left(p_k w_l - \frac{1}{3} p_a w_a \delta_{kl} \right) \left(v_{kl} - \frac{1}{3} \partial_a v_a \delta_{kl} \right). \quad (3.16)$$

Kayma viskozitesi ifadesinin açık halini belirlemek için hızlar üzerinden açılal ortalama almamız gerekmektedir.

3.2 Taşınım Katsayıları

Bir önceki bölümde elde ettiğimiz akım ifadelerini hidrodinamik formdaki ifadelerle karşılaştırdığımızda, makroskopik taşınım katsayıları için mikroskopik büyüklükler cinsinden yazılmış ifadeler elde ederiz. Nötron yıldızları içinde bulunan madde güçlü bir şekilde etkileşim halindedir. İlgilendiğimiz sıcaklıklar bir kaç yüz eV mertebesinde olduğu için elektron veya kuark kimyasal potansiyeline göre çok düşük kalır [26, 58]. Bu çerçeveden bakıldığında sistemin düşük enerji davranışını incelemek için Fermi-akışkan teorisi kullanılabilir [59, 60]. Fermi-akışkan teorisi çerçevesinde taşınım katsayıları lokal denge durumundan sapmalar hesaba katılarak belirlenebilir. Etkileşimler Fermi yüzeyine yakın küçük bir bölgede gerçekleştiği için, dejenere fermiyonlara momentum integralinden gelen katkı Fermi

yüzeyi etrafından gelir. Enerji dispersiyon ilişkisinin, $\epsilon(p)$, Fermi yüzeyi etrafında analitik bir fonksiyon olduğunu düşünelim. Bu durumda enerji dispersiyon ilişkisinin formu Fermi-akışkan teorisi çerçevesinde seri açılımı yapılarak belirlenebilir. Sıcaklığın kimyasal potansiyelden çok küçük olduğu durum için, $T \ll \mu$,

$$\epsilon - \mu = v_F (p - p_F) + O((p - p_F)^2), \quad p = p_F + v_F^{-1} (\epsilon - \mu), \quad v_F = \left(\frac{\partial \epsilon^{(0)}}{\partial p} \right)_{p=p_F} \quad (3.17)$$

olarak yazabiliriz. Burada v_F Fermi hızını ifade etmektedir. Bu yaklaşıklık kullanılarak her bir taşınım katsayısı için momentum integralleri belirlenebilir.

3.2.1 Elektriksel İletkenlik

Elektriksel iletkenlik astrofiziksel olarak nötron yıldızlarını anlamak için oldukça önemlidir. Nötron yıldızlarının veya beyaz cücelerin oluşmasından sonraki bir kaç dakikadan bir kaç saate kadar olan aralıkta elektriksel iletkenlik önemli etkilere sahiptir. Sıcaklığın kimyasal potansiyele göre düşük olduğu iç bölgelerde manyetik alanın etkilerini ihmal edebiliriz. Hidrodinamik denklemleri kullanarak elde ettiğimiz yukarıdaki ifadeyi ele alalım. Hız, enerji ve momentum arasındaki ilişkiyi $w_s = \frac{\partial \epsilon_s(p)}{\partial p} = \epsilon'_s(p) = (\tilde{p}'_s(\epsilon))^{-1}$ olarak yazıp, $\hbar = 1$ olduğu durumda elektriksel iletkenlik ifadesini hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} \sigma &= - \sum_s \frac{q_s^2}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} w^2 A_{\sigma s}(\epsilon) \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} \\ &= \sum_s \frac{q_s^2}{6\pi^2 T} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\tilde{p}_s(\epsilon)^2 A_{\sigma s}(\epsilon)}{\tilde{p}'_s(\epsilon)} \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu_s)/T} + 1} \frac{1}{e^{(\mu_s - \epsilon)/T} + 1}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

İntegrali $z = (\epsilon - \mu) / T$ değişken dönüşümü ile boyutsuz hale getirip alabiliriz. Yüksek mertebeden terimleri ihmal ettiğimizde bulacağımız ifade aşağıdaki şekildedir:

$$\sigma = \sum_s \frac{q_s^2}{6\pi^2} \int_{-\mu_s/T}^\infty dz \frac{\tilde{p}_s(\mu_s + zT)^2 A_{\sigma s}(\mu_s + zT)}{\tilde{p}'_s(\mu_s + zT)} \frac{1}{e^z + 1} \frac{1}{e^{-z} + 1}. \quad (3.19)$$

Burada $A_{\sigma s}(\epsilon)$ enerjiye bağlı skaler bir fonksiyondur. Çözmeye çalıştığımız sistem dejenere bir Fermi sistemi olduğu için sadece Fermi yüzeyine yakın parçacıklar etkileşime girer. Dağılım fonksiyonları bize etkileşimin Fermi yüzeyine yakın bir yerde olduğunu söylediği için $T \ll \mu$ limitinde bu fonksiyonu seriye açabiliriz:

$$A_{\sigma s}(\epsilon) = A_{\sigma s}(\mu_s) + A'_{\sigma s}(\mu_s) (\epsilon - \mu_s) + \dots \equiv \tau_{\sigma s} + O\left(\frac{T}{\mu_s}\right). \quad (3.20)$$

Bu durumda elektriksel iletkenlik katsayısı, Fermi-akışkan teorisi limitinde aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma = \sum_s \frac{N_s q_s^2 v_{F_s} p_{F_s}^2}{6\pi^2} \tau_{\sigma s} + O\left(\left(\frac{T}{p_{F_s}}\right)^2\right). \quad (3.21)$$

Lineerize edilmiş Boltzmann denkleminin sol tarafı elektriksel iletkenlik katsayısı için önerdiğimiz çözüm önerisi ile hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} w_i q_s E_{si}^* \\ &= -\frac{q_s E_i^*}{T} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st} f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right) \\ & \quad (\vec{w}_{1s} A_{\sigma 1,s} + \vec{w}_{2t} A_{\sigma 2,t} - \vec{w}_{3s} A_{\sigma 3,s} - \vec{w}_{4t} A_{\sigma 4,t}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Denklemin iki tarafında elektrik alan ifadelerini farklı hızlarla çarpıldıkları için doğrudan sadeleştiremeyiz. Bunu yapmak için yine yukarıdaki ifadeyi takip ettiğimiz parçacığın hızı ile çarpıp momentumu üzerinden integre etmeliyiz. Denklemin sağ tarafı elektriksel iletkenlik katsayısını hesaplarken bulduğumuz integrale benzerdir:

$$q_s E_k^* \int_{p_s} \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} w_{si} w_{sk} = \frac{E_i^* q_s v_{F_s} p_{F_s}^2}{6\pi^2}. \quad (3.23)$$

Momentum üzerinden integral aldığımız için iki taraftaki elektrik alan ifadesini sadeleştirebiliriz. Fermi yüzeyi etrafında seri açtığımız rahatlama zamanı fonksiyonunu parantez dışına aldığımızda elimizde $\tau_{\sigma s}$ fonksiyonuna ait lineer bir denklem sistemi kalacaktır. Bu denklem sistemi etkileşime giren s parçacığının t parçacığıyla olan ilişkisini bize verecektir:

$$\begin{aligned} C_{\sigma s} &\equiv \frac{v_{F_s} p_{F_s}^2 T}{2\pi^2} \\ &= \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st} f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right) (\vec{w}_{1s}^2 - \vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{3s}) \tau_{\sigma s} \\ &+ \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st} f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right) (\vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{2t} - \vec{w}_{1s} \vec{w}_{4t}) \tau_{\sigma t}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Bu lineer denklem sistemi ifadesini çarpışma frekansı integralleri tanımlayarak yazabiliriz. Çarpışma zamanı τ , çarpışma integraline bu ifadenin tersi olarak bağlı olduğundan, çarpışma frekansı tanımlamak daha doğru olacaktır. Parçacıkların iç serbestlik derecelerini, N_t , açıkça yazarak elektriksel iletkenlik için çarpışma

frekansı integrallerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\nu_{\sigma st} \equiv \frac{I_{\sigma st}}{C_{\sigma s}} = \frac{2\pi^2 N_t}{v_{F_s} p_{F_s}^2 T} \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st}(p_i) P_{\sigma}(p_i) f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right), \quad (3.25)$$

$$\nu'_{\sigma st} \equiv \frac{I'_{\sigma st}}{C_{\sigma s}} = \frac{2\pi^2 N_t}{v_{F_s} p_{F_s}^2 T} \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st}(p_i) P'_{\sigma}(p_i) f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right).$$

Burada tanımladığımız elektriksel iletkenlik çarpışma frekansı için momentum polinomları aşağıdaki gibidir:

$$P_{\sigma} = \vec{w}_{1s}^2 - \vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{3s}, \quad P'_{\sigma} = \vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{2t} - \vec{w}_{1t} \vec{w}_{4t}. \quad (3.26)$$

3.2.2 Isıl İletkenlik

Isıl iletkenlik nötron yıldızlarının soğuma davranışlarını incelemek veya aldıkları ısıyı yıldız etrafına nasıl yaydıklarını anlamak adına büyük önem taşımaktadır. Genç nötron yıldızları henüz ısı olarak rahatlama durumuna geçemediklerinden ısı iletkenlik bu kaynaklar için önemlidir. Hidrodinamik denklemlerden elde ettiğimiz ısı iletkenlik taşınım katsayısı momentum integraline aşağıdaki gibi bağlıdır. Hız ve momentum arasındaki ilişkileri kullanarak momentum integralini hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{3T} \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} w^2 (\epsilon - h_s)^2 A_{\kappa s}(\epsilon) \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} \\ &= \frac{1}{6\pi^2 T} \sum_s \int d\epsilon \frac{\tilde{p}_s(\epsilon)^2 (\epsilon - h_s)^2 A_{\kappa s}(\epsilon)}{\tilde{p}'_s(\epsilon)} \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu_s)/T} + 1} \frac{1}{e^{(\mu_s - \epsilon)/T} + 1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

İntegrali $z = (\epsilon - \mu) / T$ değişken dönüşümü ile boyutsuz hale getirip alabiliriz. Yüksek mertebeden terimleri ihmal ettiğimizde bulacağımız ifade aşağıdaki şekildedir:

$$\kappa = \sum_s \frac{p_{F_s}^2 A_{\kappa s}(\mu_s)}{6\pi^2 T} \int dz \frac{\left(zT - \frac{T_s}{n_s}\right)^2}{\tilde{p}'_s(\mu_s + zT)} \frac{1}{e^z + 1} \frac{1}{e^{-z} + 1} + O\left(\left(\frac{T}{p_{F_s}}\right)^3\right). \quad (3.28)$$

z 'nin tek kuvvetlerine sahip integraller sıfırdır. Entropi ifadesinin de lineer olarak sıcaklığa bağlı olduğunu düşünürsek ısı iletkenlik katsayısı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\kappa = \sum_s \frac{N_s p_{F_s}^2 v_{F_s} T}{18} \tau_{\kappa s} + O\left(\left(\frac{T}{p_{F_s}}\right)^3\right). \quad (3.29)$$

Isıl iletkenlik için de Boltzmann denkleminin sol tarafını önerdiğimiz çözüm üzerinden elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} w_i \frac{\epsilon - h_s}{T} \partial_i T \\
& = \frac{\partial_i T}{T^2} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st} f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right) \\
& \quad \left((\epsilon_s - \mu_s) \vec{w}_{1s} A_{\kappa 1,s} + (\epsilon_t - \mu_t) \vec{w}_{2t} A_{\kappa 2,t} - (\epsilon_s - \mu_s) \vec{w}_{3s} A_{\kappa 3,s} - (\epsilon_t - \mu_t) \vec{w}_{4t} A_{\kappa 4,t} \right).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Daha önce bahsettiğimiz simetri özelliği burada da geçerlidir, türev ifadelerini doğrudan sadeleştiremeyiz. Bunun için iki tarafı $\frac{(\epsilon - \mu_s)}{T} w_i \partial_i T$ ile çarpıp momentum üzerinden integralini almalıyız. Bu durumda yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı daha önce elde edildiği gibi aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$-\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} \frac{(\epsilon - \mu_s)^2}{T} w_i w_j \partial_j T = \left(\frac{p_{Fs}^2 v_{Fs} T}{18} \right) \partial_i T. \tag{3.31}$$

Bir önceki bölümde yazdığımız gibi sol tarafını integre ettiğimiz Boltzmann denklemini rahatlatma zamanı cinsinden paranteze alabiliriz. Böylece elimizde yine etkileşime giren parçacıklar için lineer bir denklem sistemi kalacaktır:

$$C_{\kappa s} \equiv \frac{p_{Fs}^2 v_{Fs} T}{18} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{3T^2} \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st} f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right) \\
& \quad \times (\epsilon_s - \mu_{1s}) \left((\epsilon_s - \mu_{1s}) \vec{w}_{1s}^2 - (\epsilon_s - \mu_{3s}) \vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{3s} \right) \tau_{\kappa s}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3T^2} \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st} f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right) \\
& \quad \times (\epsilon_s - \mu_{1s}) \left((\epsilon_s - \mu_{2s}) \vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{2t} - (\epsilon_s - \mu_{4s}) \vec{w}_{1s} \vec{w}_{4t} \right) \tau_{\kappa t}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Benzer şekilde bu denklem sistemini çarpışma integralleri cinsinden yazabiliriz. Parçacıkların iç serbestlik derecelerini de hesaba kattığımızda ısı iletkenlik için çarpışma frekansı integralleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\nu_{\kappa st} \equiv \frac{I_{\kappa st}}{C_{\kappa s}} = \frac{6N_t}{v_{Fs} p_{Fs}^2 T^3} \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st}(p_i) P_{\kappa}(p_i) f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right), \tag{3.35}$$

$$\nu'_{\kappa st} \equiv \frac{I'_{\kappa st}}{C_{\kappa s}} = \frac{6N_t}{v_{Fs} p_{Fs}^2 T^3} \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st}(p_i) P'_{\kappa}(p_i) f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right).$$

Burada tanımladığımız ısı iletkenlik çarpışma frekansı için momentum polinomları aşağıdaki gibidir:

$$P_{\kappa} = (\epsilon_s - \mu_{1s}) \left((\epsilon_s - \mu_{1s}) \vec{w}_{1s}^2 - (\epsilon_s - \mu_{3s}) \vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{3s} \right), \tag{3.36}$$

$$P'_{\kappa} = (\epsilon_s - \mu_{1s}) \left((\epsilon_s - \mu_{2s}) \vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{2t} - (\epsilon_s - \mu_{4s}) \vec{w}_{1s} \vec{w}_{4t} \right).$$

3.2.3 Kayma Viskozitesi

Kayma viskozitesi hidrodinamik hareketin rahatlamasını etkileyen taşınım katsayısıdır. Özellikle nötron yıldızları veya beyaz cücelerdeki hidrodinamik etkilerin anlaşılmasında önem taşır. Kayma viskozitesi kütleçekimsel dalga kaynaklı kararsızlıkların sönümlenmesinden sorumludur. Yukarıda hesaplandığı şekliyle hidrodinamik denklemler kullanılarak kayma viskozitesi ifadesini elde etmek mümkündür [61]:

$$\begin{aligned}\eta &= -\frac{1}{15} \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} p^2 w^2 A_\eta(\epsilon) \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} \\ &= \frac{1}{30\pi^2 T} \sum_s \int_0^\infty d\epsilon \frac{\tilde{p}^4(\epsilon)}{\tilde{p}'(\epsilon)} A_\eta(\epsilon) \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu_s)/T} + 1} \left(1 - \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu_s)/T} + 1}\right).\end{aligned}\quad (3.37)$$

İntegrali $z = (\epsilon - \mu) / T$ değişken dönüşümü ile boyutsuz hale getirdikten sonra yüksek mertebeden terimleri ihmal edip, Fermi-akışkan teorisi limitinde kayma viskozitesi katsayısını belirleyebiliriz:

$$\eta = \sum_s \frac{N_s p_{Fs}^4 v_{Fs}}{30\pi^2} \tau_\eta + O\left(\left(\frac{T}{p_{Fs}}\right)^2\right).\quad (3.38)$$

Son olarak kayma viskozitesi için lineerize edilmiş Boltzmann denkleminin sol tarafı, kayma viskozitesi için yazdığımız çözüm ile hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}& -\frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} w_{sk} p_{sl} \left(v_{kl} - \frac{1}{3} \partial_a v_a \delta_{kl} \right) \\ &= \frac{1}{T} \left(v_{kl} - \frac{1}{3} \partial_a v_a \delta_{kl} \right) \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st} f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right) \\ &\times \left(\left(w_{sk} p_{sl} - \frac{1}{3} p_{sa} w_{sa} \delta_{kl} \right) A_{\eta 1,s} + \left(w_{tk} p_{tl} - \frac{1}{3} p_{ta} w_{ta} \delta_{kl} \right) A_{\eta 2,t} \right. \\ &\quad \left. - \left(w_{sk} p_{sl} - \frac{1}{3} p_{sa} w_{sa} \delta_{kl} \right) A_{\eta 3,s} - \left(w_{tk} p_{tl} - \frac{1}{3} p_{ta} w_{ta} \delta_{kl} \right) A_{\eta 4,t} \right).\end{aligned}\quad (3.39)$$

İki tarafı da $w_i p_j$ ile çarpıp momentum üzerinden integre edelim. Denklemin sağ tarafının integrali daha önce elde ettiğimiz formdadır:

$$-\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_s^{(0)}}{\partial \epsilon} w_{sa} p_b w_{sc} p_d \left(v_{kl} - \frac{1}{3} \partial_a v_a \delta_{kl} \right) = \frac{p_{Fs}^4 v_{Fs}}{15\pi^2} \left(v_{ij} - \frac{1}{3} \partial_n v_n \delta_{ij} \right).\quad (3.40)$$

Lineerize edilmiş Boltzmann denkleminin sol tarafını $(v_{ij} - \frac{1}{3}\partial_n v_n \delta_{ij})$ parantezine alarak yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
C_{\eta s} &\equiv \frac{p_{Fs}^4 v_{Fs}}{15\pi^2} \\
&= \frac{1}{5T} \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st} f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right) \\
&\quad \times \left(\frac{2}{3} w_{1s}^2 p_{1s}^2 - \vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{3s} \vec{p}_{1s} \cdot \vec{p}_{3s} + \frac{1}{3} \vec{w}_{1s} \cdot \vec{p}_{1s} \vec{w}_{3s} \cdot \vec{p}_{3s} \right) \tau_{\eta s} \\
&\quad + \frac{1}{5T} \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st} f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right) \\
&\quad \times \left(\vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{2t} \vec{p}_{1s} \cdot \vec{p}_{2ts} - \frac{1}{3} \vec{w}_{1s} \cdot \vec{p}_{1s} \vec{w}_{2t} \cdot \vec{p}_{2t} \right. \\
&\quad \quad \left. - \vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{4t} \vec{p}_{1s} \cdot \vec{p}_{4t} + \frac{1}{3} \vec{w}_{1s} \cdot \vec{p}_{1s} \vec{w}_{4t} \cdot \vec{p}_{4t} \right) \tau_{\eta t}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Son olarak iç serbestlik derecelerini de hesaba katarak çarpışma frekansı integral-lerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\nu_{\eta st} \equiv \frac{I_{\eta st}}{C_{\eta s}} = \frac{3\pi^2 N_t}{v_{Fs} p_{Fs}^4 T} \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st}(p_i) P_{\eta}(p_i) f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right), \tag{3.42}$$

$$\nu'_{\eta st} \equiv \frac{I'_{\eta st}}{C_{\eta s}} = \frac{3\pi^2 N_t}{v_{Fs} p_{Fs}^4 T} \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st}(p_i) P'_{\eta}(p_i) f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right)$$

Burada tanımladığımız kayma viskozitesi için momentum polinomları aşağıdaki gibidir:

$$P_{\eta} = \frac{2}{3} w_{1s}^2 p_{1s}^2 - \vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{3s} \vec{p}_{1s} \cdot \vec{p}_{3s} + \frac{1}{3} \vec{w}_{1s} \cdot \vec{p}_{1s} \vec{w}_{3s} \cdot \vec{p}_{3s} \tag{3.43}$$

$$P'_{\eta} = \vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{2t} \vec{p}_{1s} \cdot \vec{p}_{2ts} - \frac{1}{3} \vec{w}_{1s} \cdot \vec{p}_{1s} \vec{w}_{2t} \cdot \vec{p}_{2t} - \vec{w}_{1s} \cdot \vec{w}_{4t} \vec{p}_{1s} \cdot \vec{p}_{4t} + \frac{1}{3} \vec{w}_{1s} \cdot \vec{p}_{1s} \vec{w}_{4t} \cdot \vec{p}_{4t}.$$

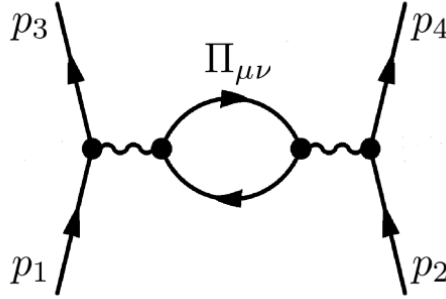
Çarpışma frekansı ve çarpışma zamanını kullanarak her bir s türü için, etkileşime girdiği t türündeki parçacıklarla ilişkisini gösteren lineer bir denklem sistemi elde ederiz:

$$\sum_t (\nu_{qst} \tau_{qs} + \nu'_{qst} \tau_{qt}) = 1, \quad q = \sigma, \kappa, \tau. \tag{3.44}$$

Bu denklem sisteminin çözümleri bize taşınım katsayılarını vermektedir. En genel haliyle böyle bir denklemi analitik olarak çözmek karmaşık ifadelerle sebebiyet vermektedir. Çarpışma frekanslarını belirleyebilmek için çarpışma integrallerine, etkileşim geçiş genliklerine dolayısıyla etkileşimin matris elemanına ihtiyacımız vardır. Bir sonraki bölümde genel bir saçılma etkileşimi için matris elemanını hesaplayacağız.

4 MATRİS ELEMANI VE PLAZMA MODLARI

Çarpışma integrali etkileşime giren parçacıkların geçiş genliği cinsinden hesaplanan bir ifade olarak karşımıza çıkmaktadır. Maddesel ortamda, boş uzaydan farklı olarak ortam etkileri işin içine girmektedir. Çarpışma integralini ortam etkilerinin de dahil edildiği modifiye edilmiş etkileşim propagatörü üzerinden hesaplayacağız. Sonlu sıcaklık etkileri dikkate alındığında Lorentz değişmezliği ortadan kalkar. Sıcaklık akışı bir yön belirttiği için ayar parçacığının propagatörünü projektör operatörleri cinsinden ifade etmeliyiz. En genel haliyle şekilde gösterilen bir saçılma etkileşimini dikkate alalım.



Şekil 4.1: Saçılma etkileşimi için Feynman diyagramı [62].

Kütleleri m_1 ve m_2 olan iki fermiyon etkileşmesini düşünelim. Ayar grubumuz $SU(N)$ ve jeneratörlerimiz T_n , $n \in 1, \dots, N^2 - 1$. Gelen parçacıkların momentumları p_1, p_2 etkileşimden çıkan parçacıkların momentumlarıysa p_3, p_4 olsun. Ayar parçacığının momentumu $k = p_1 - p_3$ olarak verilir. Maddesel ortamın etkileri etkileşim propagatörünü modifiye etmektedir. Yoğun maddesel ortamda etkileşimler, ayar parçacığının enerjisi üzerinden farklı kinematik özelliklere sahip olmaktadır.

Böyle bir durum için etkileşim propagatörü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$D_{mn}^{\mu\nu}(\omega, \vec{k}) = \left(\frac{1}{k^2 - \Pi_{\parallel}(\omega, k)} P_{\parallel}^{\mu\nu} + \frac{1}{k^2 - \Pi_{\perp}(\omega, k)} P_{\perp}^{\mu\nu} \right) \delta_{mn} \quad (4.1)$$

$$\equiv \left(D_{\parallel} P_{\parallel}^{\mu\nu} + D_{\perp} P_{\perp}^{\mu\nu} \right) \delta_{mn}$$

Burada Π_{\parallel} , Π_{\perp} boyuna (longitudinal) ve enine (transverse) polarizasyon tensörlerini ifade etmektedir. Düşük enerji limitinde, $k_0 \ll \vec{k}$, propagatörün enine kısmı, boyuna kısmını baskılamaktadır. Projektör operatörlerini metriğe bağlı olarak aşağıdaki yazabiliriz [63]:

$$P_{\perp}^{ij} = -\delta_{ij} + \hat{k}_i \hat{k}_j, \quad P_{\perp}^{i0} = P_{\perp}^{0j} = P_{\perp}^{00} = 0, \quad (4.2)$$

$$P_{\parallel}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{k^2} - P_{\perp}^{ij} \delta_{i\mu} \delta_{j\nu}. \quad (4.3)$$

İki farklı parçacık türü için $2 \iff 2$ saçılma etkileşimine bakalım. Böyle bir etkileşim için matris elemanını en genel haliyle fermiyonik akımlar cinsinden yazabiliriz:

$$J_{s\sigma_1\sigma_3m}^{\mu} = \sum_{\alpha\beta} \bar{u}_{s\sigma_3}^{a\alpha}(p_3) \gamma_{ab}^{\mu} T_m^{\alpha\beta} u_{s\sigma_1}^{b\beta}(p_1), \quad (4.4)$$

$$J_{t\sigma_2\sigma_4n}^{\nu} = \sum_{\gamma\delta} \bar{u}_{t\sigma_4}^{c\gamma}(p_4) \gamma_{cd}^{\nu} T_n^{\gamma\delta} u_{t\sigma_2}^{d\delta}(p_2),$$

ve

$$M = -\mathcal{S}_{st} g^2 J_{s\sigma_1\sigma_3m}^{\mu} D_{mn}^{\mu\nu} J_{t\sigma_2\sigma_4n}^{\nu}. \quad (4.5)$$

Burada $\mathcal{S}_{st} \equiv \sqrt{\frac{1}{1+\delta_{st}}}$, aynı parçacıkların saçıldığı durumda fazladan saymayı önlemek için simetri faktörünü, g ise genel etkileşim sabitini gösterir. $T_m^{\alpha\beta}$ en genel haliyle ayar alanlarının fermiyonik akımlarla nasıl etkileştiğini gösteren jeneratörleri ifade etmektedir, örneğin elektromanyetik etkileşimler için $T^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ olarak düşünülebilir. Burada a, b, c, d Dirac indislerini, σ 'lar spin indislerini, μ ve ν Lorentz indislerini, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ temel ayar indislerini, m ve n ise adjoint ayar indislerini göstermektedir. Yazım kolaylığı açısından spinler üzerinden alınan toplamlar gösterilmeyecektir. Projektör operatörlerini ve propagatörü kullanarak matris elemanını enine ve boyuna olarak iki kısma ayırmak mümkündür. Böylece ilgilenmek istediğimiz kinematik durumları inceleyebiliriz. Düğüm noktalarında akımların korunması gerektiğini göz önüne alırsak saçılma matris elemanı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_{st} = \mathcal{S}_{st} \left(\frac{J_{sn}^0 J_{tn}^0}{|\vec{k}|^2 + \Pi_{\parallel}^{\text{eff}}} - \frac{\vec{J}_{\perp sn} \cdot \vec{J}_{\perp tn}}{|\vec{k}|^2 - \omega^2 + \Pi_{\perp}} \right) \quad (4.6)$$

Boyuna polarizasyon tensörü $k_0 \ll \vec{k}$ limitinde çok fazla değişime uğramayacaktır, dolayısıyla efektif bir tensör tanımlayabiliriz:

$$\Pi_{\parallel}^{\text{eff}} \equiv \frac{\vec{k}^2}{k^2 - k_0^2} \Pi_{\parallel} = \frac{1}{1 - \frac{k_0^2}{k^2}} \Pi_{\parallel} \simeq \Pi_{\parallel}. \quad (4.7)$$

Görüldüğü üzere, eşyönlü bir plazma için matris elemanı, ayar parçacığının çarpışmalarda aktardığı enerji, ω ve momentum, k cinsinden ve aynı zamanda madde akımlarının zamansal ve enine bileşenleri cinsinden ifade edilebilir. Matris elemanının zamansal kısmı elektrik etkileşimlerini temsil ederken, enlemsel kısmı manyetik etkileşimlere karşılık gelir. Zamansal kısım rölativistik olmayan parçacıklar için baskın etkileşimi belirlerken, enlemsel kısım rölativistik parçacık etkileşimlerinde baskın hale gelmektedir. Bu sebeple diyebilirizki çekirdeğe yakın bölgelerde ve hafif parçacıklar için manyetik etkileşimleri, çekirdekten uzak ve ağır parçacıklar için elektriksel etkileşimleri dikkate almalıyız. Matris elemanının bileşenlerine baktığımızda, elektriksel etkileşimlerin enine plazmonlar, manyetik etkileşimlerin de boyuna plazmonlar tarafından gerçekleştirildiğini söyleyebiliriz. Elektromanyetik etkileşim çerçevesinde bu uyarılmış yarı-parçacıkların farklı momentum limitlerinde nasıl davrandıkları Ek B’de gösterilmiştir. Matris elemanının karesi

$$|M_{st}|^2 = \mathcal{S}_{st}^2 \left(\frac{J_{sn}^0 J_{tn}^0}{|\vec{k}|^2 + \Pi_{\parallel}^{\text{eff}}} - \frac{\vec{J}_{\perp sn} \cdot \vec{J}_{\perp tn}}{|\vec{k}|^2 - \omega^2 + \Pi_{\perp}} \right) \left(\frac{J_{tm}^{0*} J_{sm}^{0*}}{|\vec{k}|^2 + \Pi_{\parallel}^{\text{eff}*}} - \frac{\vec{J}_{\perp tm} \cdot \vec{J}_{\perp sm}}{|\vec{k}|^2 - \omega^2 + \Pi_{\perp}} \right) \quad (4.8)$$

olarak hesaplanır. Boyuna kısım aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$J_{sn}^0 J_{tn}^0 J_{tm}^{0*} J_{sm}^{0*} = \bar{u}_{s\sigma_3}^{a\alpha}(p_3) \gamma_{ab}^0 g T_n^{\alpha\beta} u_{s\sigma_1}^{b\beta}(p_1) \bar{u}_{t\sigma_4}^{c\gamma}(p_4) \gamma_{cd}^0 g T_n^{\gamma\delta} u_{t\sigma_2}^{d\delta}(p_2) \quad (4.9)$$

$$\bar{u}_{t\sigma_2}^{e\epsilon}(p_2) g T_m^{\epsilon\phi} \gamma_{ef}^0 u_{t\sigma_4}^{f\phi}(p_4) \bar{u}_{s\sigma_1}^{g\gamma}(p_1) g T_m^{\gamma\eta} \gamma_{gh}^0 u_{s\sigma_3}^{h\eta}(p_3).$$

Hem boyuna hem de enine kısımdan gelen karışık bileşen aşağıdaki gibidir:

$$J_{sn}^0 J_{tn}^0 \vec{J}_{\perp tm} \cdot \vec{J}_{\perp sm} = \bar{u}_{s\sigma_3}^{a\alpha}(p_3) \gamma_{ab}^0 g T_n^{\alpha\beta} u_{s\sigma_1}^{b\beta}(p_1) \bar{u}_{t\sigma_4}^{c\gamma}(p_4) \gamma_{cd}^0 g T_n^{\gamma\delta} u_{t\sigma_2}^{d\delta}(p_2) \quad (4.10)$$

$$\bar{u}_{t\sigma_2}^{e\epsilon}(p_2) g T_m^{\epsilon\phi} \gamma_{ef}^j u_{t\sigma_4}^{f\phi}(p_4) \bar{u}_{s\sigma_1}^{g\gamma}(p_1) g T_m^{\gamma\eta} \gamma_{gh}^j u_{s\sigma_3}^{h\eta}(p_3).$$

Sadece enine akımları içeren kısım aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\perp sn} \cdot \vec{J}_{\perp tn} \vec{J}_{\perp tm}^* \cdot \vec{J}_{\perp sm}^* = & \bar{u}_{s\sigma_3}^{a\alpha}(p_3) \gamma_{ab}^i g T_n^{\alpha\beta} u_{s\sigma_1}^{b\beta}(p_1) \bar{u}_{t\sigma_4}^{c\gamma}(p_4) \gamma_{cd}^i g T_n^{\gamma\delta} u_{t\sigma_2}^{d\delta}(p_2) \\ & \bar{u}_{t\sigma_2}^{e\epsilon}(p_2) g T_m^{\epsilon\phi} \gamma_{ef}^j u_{t\sigma_4}^{f\phi}(p_4) \bar{u}_{s\sigma_1}^{g\gamma}(p_1) g T_m^{\gamma\eta} \gamma_{gh}^j u_{s\sigma_3}^{h\eta}(p_3). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Buradaki madde akımlarının çarpımlarını spin toplam kuralı $\sum_{\sigma} u_{s\sigma}^{a\alpha}(p) \bar{u}_{s\sigma}^{b\beta}(p) = (\not{p}_{ab} + m_s \delta_{ab}) \delta_{\alpha\beta}$ ile A ve B uzaysal ve zamansal indislerini kullanarak toplu bir şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = \mathcal{S}_{st}^2 \text{tr}_D [T_n T_m] \text{tr}_D [T_n T_m] \text{tr} [(\not{p}'_1 + m_s) \gamma^A (\not{p}_1 + m_s) \gamma^B] \\ \text{tr} [(\not{p}'_2 + m_t) \gamma^A (\not{p}_2 + m_t) \gamma^B]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sadece spinler üzerinden değil aynı zamanda renk serbestlik dereceleri üzerinden de toplam almalıyız. Ayar jeneratörleri üzerinden alınan toplam ifadesini kullanarak efektif bir etkileşim faktörü belirleyebiliriz:

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{S}_{st}^2 \left(\delta_{N1} + \frac{N^2 - 1}{4N^2} \right) g^4. \quad (4.13)$$

Dirac matrislerinin iz özelliklerini kullanarak \mathcal{X} ifadesini ayar parçacığının momentumunu kullanarak $k = p_3 - p_1 = p_2 - p_4$ hesaplayabiliriz. Böylece her bir durum için ayrı ayrı matris elemanını yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\parallel} & \equiv \mathcal{C} \sum_{m,n} (J_n^0)^2 (J_m^{0*})^2 \\ & = 4\mathcal{C} \left(4\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 + 4(\epsilon_1 \epsilon_2^2 \omega - \epsilon_1^2 \epsilon_2 \omega) - 4\epsilon_1 \epsilon_2 \omega^2 + 2(\epsilon_1^2 + \epsilon_1 \omega)(\epsilon_2 \omega - p_2 k \cos \theta_2) \right. \\ & \quad \left. + 2(\epsilon_2^2 - \epsilon_2 \omega)(-\epsilon_1 \omega + p_1 k \cos \theta_1) \right) \\ \mathcal{M}_{\parallel\perp} & \equiv \mathcal{C} \sum_{m,n} (J_n^0)^2 \vec{J}_{\perp m}^* \cdot \vec{J}_{\perp m} \\ & = 4\mathcal{C} \left(4\epsilon_1 \epsilon_2 p_1 p_2 \cos \theta_{12} + 2(\epsilon_2 - \epsilon_1 \omega p_1 p_2 \cos \theta_{12}) \right. \\ & \quad \left. + 2\epsilon_1 \epsilon_2 k (p_2 \cos \theta_2 - p_1 \cos \theta_1) \right. \\ & \quad \left. - \omega^2 p_1 p_2 \cos \theta_{12} + \epsilon_1 \epsilon_2 k^2 + \omega k (\epsilon_1 p_2 \cos \theta_2 + \epsilon_2 p_1 \cos \theta_1) \right) \\ \mathcal{M}_{\perp} & \equiv \mathcal{C} \sum_{m,n} \vec{J}_{\perp n} \cdot \vec{J}_{\perp n} \vec{J}_{\perp m}^* \cdot \vec{J}_{\perp m} \\ & = 4\mathcal{C} \left(4p_1^2 p_2^2 \cos^2 \theta_{12} + 4(p_2 \cos \theta_2 - p_1 \cos \theta_1) k p_1 p_2 \cos \theta_{12} \right. \\ & \quad \left. - (2k^2 p_1 p_2 \cos \theta_{12} + 2p_1 p_2 k^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) \right. \\ & \quad \left. + 2((p_1^2 + p_1 k \cos \theta_1)(\epsilon_2 \omega - p_2 k \cos \theta_2)) \right. \\ & \quad \left. - (p_2^2 - p_2 k \cos \theta_2)(\epsilon_1 \omega - p_1 k \cos \theta_1) \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Yukarıdaki ifadeleri kullanarak $|M_{st}|^2$ ifadesinin açık hali

$$|M_{st}|^2 = \left(\frac{\mathcal{M}_{\parallel}}{(k^2 + \Pi_{\parallel}^{\text{eff}})^2} - 2 \frac{\mathcal{M}_{\parallel\perp}}{(k^2 - \omega^2 + \Pi_{\perp})(k^2 + \Pi_{\parallel}^{\text{eff}})} + \frac{\mathcal{M}_{\perp}}{(k^2 - \omega^2 + \Pi_{\perp})^2} \right) \quad (4.15)$$

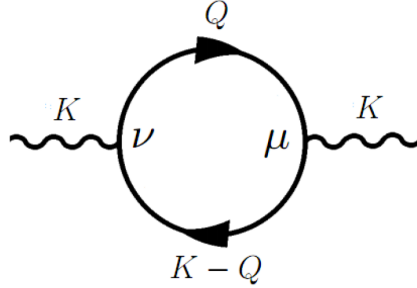
olarak hesaplanır.

4.1 Polarizasyon Tensörü

Polarizasyon tensörünün yapısını anlamak için kuantum elektrodinamiğindeki temel etkileşime bakalım. Elektron foton etkileşimi için öz enerji diyagramı kullanılarak fotonun polarizasyon tensörü hesaplanabilir. Ultra-rölativistik limitte elektron kütlelerinin ihmal edildiği durumda Fermiyon propagatörü basit bir hale indirgenir ve polarizasyon tensörü Şekil 4.2 için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = e^2 \frac{T}{V} \sum_Q \frac{1}{Q^2} \frac{1}{P^2} \text{Tr}[\gamma_{\mu} \gamma^{\sigma} Q_{\sigma} \gamma_{\nu} \gamma^{\rho} P_{\rho}] \quad (4.16)$$

Dirac matrislerinin iz bağıntılarını kullanırsak bu ifadeyi daha açık bir şekilde



Şekil 4.2: Foton için öz enerji Feynman diyagramı [64]

yazabiliriz.

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = 4e^2 \frac{T}{V} \sum_Q \frac{1}{Q^2} \frac{1}{P^2} [Q_{\mu} P_{\nu} + Q_{\nu} P_{\mu} - g_{\mu\nu} Q \cdot P] \quad (4.17)$$

Bu ifadenin bileşenlerini elde ederken polarizasyon tensörünü zamansal ve uzaysal kısımlarına ayıracağız. Projeksiyon operatörlerini kullandığımızda polarizasyon tensörünün bileşenleri için elimizde aşağıdaki ifadeler kalır:

$$\Pi_{00}(Q) = 4e^2 \frac{T}{V} \sum_Q \frac{\omega p_0 + \vec{q} \cdot \vec{p}}{(q^2 - \omega^2)(p^2 - p_0^2)}, \quad (4.18)$$

$$\Pi_{i0}(Q) = 4e^2 \frac{T}{V} \sum_Q \frac{\omega p_i + q_i p_0}{(q^2 - \omega^2)(p^2 - p_0^2)}, \quad (4.19)$$

$$\Pi_{ij}(Q) = 4e^2 \frac{T}{V} \sum_Q \frac{q_i p_j + q_j p_i + \delta_{ij}(\omega p_0 - \vec{q} \cdot \vec{p})}{(q^2 - \omega^2)(p^2 - p_0^2)}. \quad (4.20)$$

Fermiyonik ilmek (loop) üzerinden toplam yapıldıktan sonra polarizasyon tensörünün bileşenleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \Pi_{00} = e^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} & \left[\left(\frac{1}{p - q - \omega} - \frac{1}{\omega - q + p} \right) (1 + \hat{q} \cdot \hat{p}) (f_q - f_p) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{q + p - \omega} + \frac{1}{q + p + \omega} \right) (1 - \hat{q} \cdot \hat{p}) (1 - f_q - f_p) \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Burada $P = Q - K$

$$\begin{aligned} \Pi_{i0} = -e^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} & \left[\left(\frac{1}{p - q - \omega} + \frac{1}{q - p - \omega} \right) (\hat{p}_i + \hat{q}_i) (f_q - f_p) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{q + p - \omega} - \frac{1}{q + p + \omega} \right) (\hat{p}_i - \hat{q}_i) (1 - f_q - f_p) \right], \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = e^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} & \left[\left(\frac{1}{p + q - \omega} - \frac{1}{q - p - \omega} \right) [\delta_{ij} (1 - \hat{q} \cdot \hat{p}) + \hat{q}_i \hat{p}_j + \hat{q}_j \hat{p}_i] (f_q - f_p) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{q + p - \omega} + \frac{1}{\omega + q + p} \right) [\delta_{ij} (1 + \hat{q} \cdot \hat{p}) - \hat{q}_i \hat{p}_j - \hat{q}_j \hat{p}_i] (1 - f_q - f_p) \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

biçimindedir. Bu bileşenleri hesaplarırken tüm ifadeyi değil baskın terimleri hesaplamak istiyoruz. Fermiyon momentumunun $q \sim T$ olduğu mertebeden terimler bizim için önemli terimlerdir. Bu yaklaşıklık dikkate alarak integral ifadeleri içindeki paydaları $p = |\vec{q} - \vec{k}|$ olduğunu kullanarak sadeleştirebiliriz. Benzer şekilde dağılım fonksiyonlarını da basitleştirebiliriz:

$$f_q - f_p = f(q) - f(|\vec{q} - \vec{k}|) = f(q) - \left(f(q) - \hat{q} \cdot \vec{k} \frac{\partial f(q)}{\partial q} + \dots \right) \approx \hat{q} \cdot \vec{k} \frac{\partial f(q)}{\partial q}, \quad (4.24)$$

$$1 - f_q - f_p = 1 - f_q - f_q + \hat{q} \cdot \vec{k} \frac{\partial f(q)}{\partial q} \approx 1 - 2f_q.$$

İlk olarak 4.22 ifadesine bakalım. $\hat{q} \cdot \hat{p} = 1 + \mathcal{O}(2)$ mertebesinde olduğundan ikinci satırı ihmal edebiliriz:

$$\Pi_{00} = 2e^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\omega + \hat{q} \cdot \vec{k}} - \frac{1}{\omega - \hat{q} \cdot \vec{k}} \right) \hat{q} \cdot \vec{k} \frac{\partial f_q}{\partial q}. \quad (4.25)$$

Açısal integrali hesaba kattığımızda görülmektedir ki parantez içindeki ifadeler $\cos \theta = x \rightarrow -x$ dönüşümü altında birbirine eşittir:

$$\begin{aligned}\Pi_{00} &= 4e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\hat{q} \cdot \vec{k}}{\omega + \hat{q} \cdot \vec{k}} \frac{\partial f_q}{\partial q}, \\ &= 4e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(1 - \frac{\omega}{\omega + \hat{q} \cdot \vec{k}}\right) \frac{\partial f_q}{\partial q}.\end{aligned}\quad (4.26)$$

İkinci olarak 4.23 ifadesine bakalım. Benzer şekilde $\hat{p} - \hat{q} \approx 0$ olduğundan yine ikinci satırı ihmal edebiliriz:

$$\begin{aligned}\Pi_{i0} &= -2e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\omega + \hat{q} \cdot \vec{k}} + \frac{1}{\omega - \hat{q} \cdot \vec{k}}\right) \hat{q}_i \hat{q} \cdot \vec{k} \frac{\partial f_q}{\partial q} \\ &= -2e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(1 - \frac{\omega}{\omega + \hat{q} \cdot \vec{k}} - 1 - \frac{\omega}{\omega + \hat{q} \cdot \vec{k}}\right) \hat{q}_i \frac{\partial f_q}{\partial q}, \\ \Pi_{i0} &= 4e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\frac{\omega}{\omega + \hat{q} \cdot \vec{k}}\right) \hat{q}_i \frac{\partial f_q}{\partial q}.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Son olarak uzaysal bileşenlerin olduğu kısma bakalım. Bu ifade için öncekiler gibi ihmal edeceğimiz terimler bulunmuyor ancak belli yaklaşıklıklar yaparak bu kısmı sadeleştirebiliriz. $(1 - \hat{q} \cdot \hat{p}) \approx 0$, $(1 + \hat{q} \cdot \hat{p}) \approx 2$, $\hat{p}_j = |\hat{q}_j - \hat{k}_j| \approx \hat{q}_j$ yaklaşıklıkları ile

$$\Pi_{ij} = 2e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\left(\frac{1}{\omega + \hat{q} \cdot \vec{k}} - \frac{1}{\omega - \hat{q} \cdot \vec{k}}\right) \hat{q}_i \hat{q}_j \hat{q} \cdot \vec{k} \frac{\partial f_q}{\partial q} - \frac{1}{q} (\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j) (1 - 2f_q) \right] \quad (4.28)$$

elde ederiz. Bu durumda elimizde kalan sonuç

$$\Pi_{ij} = -4e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\frac{\omega}{\omega + \hat{q} \cdot \vec{k}}\right) \hat{q}_i \hat{q}_j \frac{\partial f_q}{\partial q} \quad (4.29)$$

şeklinindedir. Elde ettiğimiz bütün ifadelerde görülen ortak momentum integraline bakalım. Herbiri için Fermiyon momentumu, q , üzerinden alınan bir integral mevcuttur:

$$\int_0^\infty dq q^2 \frac{\partial f_q}{\partial q} = \int_0^\infty dq q^2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{e^{q/T} + 1}\right). \quad (4.30)$$

$q/T = x$ dönüşümü yapıp hiperbolik cosinüs fonksiyonunu kullanırsak integral ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\int_0^\infty dq q^2 \frac{\partial f_q}{\partial q} = -\frac{T^2}{2} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{1 + \cosh x} = -\frac{T^2 \pi^2}{6} \quad (4.31)$$

Bu sonuçla birlikte yukarıda elde ettiğimiz ifadeleri foton termal kütlesi, $m^2 \equiv \frac{e^2 T^2}{6}$ cinsinden yeniden yazalım:

$$\begin{aligned}\Pi_{00} &= -2m^2 \left[1 - \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\omega}{\omega + \vec{k} \cdot \hat{q}} \right], \\ \Pi_{i0} &= -2m^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\omega \hat{q}_i}{\omega + \vec{k} \cdot \hat{q}}, \\ \Pi_{ij} &= 2m^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\omega \hat{q}_i \hat{q}_j}{\omega + \vec{k} \cdot \hat{q}}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Polarizasyon tensörünün bileşenlerini belirledikten sonra plazma içindeki modları belirleyebiliriz. Foton öz enerjisi, tıpkı propagatörde olduğu gibi, projeksiyon operatörleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir [65]:

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi_{\parallel} P_{\mu\nu, \parallel} + \Pi_{\perp} P_{\mu\nu, \perp}.\tag{4.33}$$

Burada Π_{\parallel} ve Π_{\perp} momentuma bağlı skaler fonksiyonlardır. Polarizasyon tensörü üzerinden skaler olan bu fonksiyonların neye eşit olduklarını belirleyebiliriz. Bunun için 4.3 ifadelerinden yararlanarak aradığımız skaler ifadeleri hesaplayacağız:

$$\Pi_{00} = \Pi_{\parallel} P_{00, \parallel} + \Pi_{\perp} P_{00, \perp} \quad \Rightarrow \quad \Pi_{\parallel} = \frac{(\omega^2 - k^2)}{k^2} \Pi_{00}.\tag{4.34}$$

Açık sonuçları kullanıp integralleri alırsak Π_{\parallel} skaler fonksiyonunun açık formunu elde etmiş oluruz:

$$\Pi_{\parallel} = \frac{(\omega^2 - k^2)}{k^2} \left(-2m^2 \left(1 - \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\omega}{\omega + \vec{k} \cdot \hat{q}} \right) \right).\tag{4.35}$$

Burada \hat{q} foton momentumu yönündeki birim vektörü göstermektedir. Açısal integrali çözmek için $\vec{k} \cdot \hat{q} = k \cos \theta = kx$ dönüşümü yapabiliriz. Bu durumda elimizde aşağıdaki ifade kalır:

$$\begin{aligned}\Pi_{\parallel} &= -2m^2 \frac{(\omega^2 - k^2)}{k^2} \left(1 - \int d\phi \int_{-1}^1 \frac{dx}{4\pi} \frac{\omega}{\omega + kx} \right) \\ &= -2m^2 \frac{(\omega^2 - k^2)}{k^2} \left(1 - \frac{\omega}{2k} \ln \frac{\omega + k}{\omega - k} \right).\end{aligned}\tag{4.36}$$

Bir diğer skaler fonksiyon Π_{\perp} yine polarizasyon tensörünün bileşeni olarak hesaplanabilir. Π_{ij} bileşenini düşünelim ve bu ifadeyi $P_{ij, \perp}$ ile çarpalım:

$$\Pi_{ij} = \Pi_{\parallel} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - k^2)} \frac{\hat{k}_i \hat{k}_j}{k^2} + \Pi_{\perp} (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j / q^2) \cdot P_{ij, \perp}\tag{4.37}$$

$$(\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j / k^2) \Pi_{ij} = \Pi_{\perp} (\delta_{ii} - \hat{k}_i \hat{k}_i / k^2) \quad \Rightarrow \quad \Pi_{\perp} = \Pi_{xx} = \Pi_{yy} = \Pi_{zz}. \quad (4.38)$$

Küresel koordinatlarda birim vektörlerin açılarla olan ilişkisini kullanarak Π_{\perp} skaler fonksiyonunun açık ifadesini daha önce hesapladığımız bileşenleri kullanarak bulabiliriz:

$$\Pi_{\perp} = \Pi_{xx} = \frac{m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\omega + \vec{k} \cdot \hat{q}} \sin \theta. \quad (4.39)$$

Açısal integrali hesaplarırken önce azimutal açı üzerinden olan integrali hesaplayıp daha sonra polar açı üzerinden olan kısma değişken dönüşümü uygulayabiliriz. Bu durumda şu integrali elde ederiz:

$$\Pi_{\perp} = \frac{m^2 \omega}{2} \left[\int_{-1}^{+1} dx \left(\frac{1}{\omega + kx} - \frac{x^2}{\omega + kx} \right) \right]. \quad (4.40)$$

İntegralin ilk kısmı daha önce çözdüğümüz integrallerle birebir aynıdır. İkinci kısım için $\omega + kx = u$ dönüşümü yapıp çözüm arayabiliriz:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} dx \frac{x^2}{\omega + qx} &= \frac{1}{q^3} \int du \frac{(u - \omega)^2}{u} \\ &= \frac{1}{k^3} \left[\frac{(\omega + kx)^2}{2} \Big|_{-1}^{+1} - 2\omega(\omega + kx) \Big|_{-1}^{+1} + \omega^2 \ln(\omega + kx) \Big|_{-1}^{+1} \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Bu çözümle birlikte skaler fonksiyon Π_{\perp} için aradığımız sonuç aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \Pi_{\perp} &= \frac{m^2 \omega}{2} \left[\frac{1}{k} \ln \frac{\omega + k}{\omega - k} + \frac{2\omega}{k^2} - \frac{\omega^2}{k^3} \ln \frac{\omega + k}{\omega - k} \right] \\ &= m^2 - \frac{1}{2} \Pi_{\parallel}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Polarizasyon tensörünün fotonun dispersiyon ifadesi üzerine olan etkileri Ek B'de görülebilir [66, 67, 68]. Elde ettiğimiz skaler fonksiyonların ikisi de kompleks düzlemde tanımlı $Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ fonksiyonu cinsinden ifade edilebilirler:

$$\begin{aligned} \Pi_{\parallel} &= -2m^2 \frac{(\omega^2 - k^2)}{k^2} \left(1 - \frac{\omega}{k} Q_0 \left(\frac{\omega}{k} \right) \right), \\ \Pi_{\perp} &= m^2 \frac{\omega}{k} \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2} \right) Q_0 \left(\frac{\omega}{k} \right) + \frac{\omega}{k} \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Nötron yıldızı içinde ayar parçacığının dalgaboyunun Fermi momentumundan çok küçük olduğu durumlar göz önüne alındığında etkileşim sırasında aktarılan enerji $\omega \sim T \ll \mu$ olarak görülebilir [69]. Bu limitte Q_0 fonksiyonu seri açılabilir ve ilk mertebeden ifadeler aşağıdaki gibi hesaplanabilir. Bu yaklaşıklıkta Landau ve

Debye kütleleri, $m_D/\sqrt{2} = m_L = m$, tek bir kütle parametresi cinsinden ifade edilebilirler [70]:

$$\Pi_{\parallel} = 2m^2 = m_D^2, \quad (4.44)$$

$$\Pi_{\perp} = i\frac{\pi}{2}m^2 \left| \frac{\omega}{\vec{k}} \right| = i\frac{\pi}{2}m_L^2 \left| \frac{\omega}{k} \right|. \quad (4.45)$$

En düşük mertebeden bakıldığında görüleceği üzere boyuna perdeleme statiktir. Bu sebeple boyuna etkileşimler için baskın olan momentum değerleri $k^2 < \Pi_{\parallel}$ kısmından gelir. Enine durum için ise polarizasyon tensörü sönümlü bir yapıya sahiptir. Efektif kütle ifadeleri kimyasal potansiyelin sıfır olmadığı durumda sıcaklığa bağlı olarak ifade edilebilir. Kuantum elektrodinamiği ve kuantum renk dinamiği için bu kütle ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$m_{\text{QED}}^2 = \frac{1}{6}e^2(T^2 + \frac{3}{\pi^2}\mu^2), \quad (4.46)$$

$$m_{\text{QCD}}^2 = \frac{1}{6}C_A g^2 T^2 + \frac{1}{12}g^2 N_F (T^2 + \frac{3}{\pi^2}\mu^2). \quad (4.47)$$

Düşük sıcaklık limitiyle ilgilendiğimiz için bu efektif kütleleri sadece kimyasal potansiyele bağlı ifadeler olarak ele alacağız. Bu ifadelerin elde edilmesinden sonra ilgilendiğimiz kinematik bölge için matris elemanının karesi ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$|M_{st}|^2 = \left(\left(\frac{k^2 - \omega^2}{k^2} \right)^2 \frac{\mathcal{M}_{\parallel}}{(k^2 - \omega^2 + m_D^2)^2} - 2 \frac{(k^2 - \omega^2)k^2 \mathcal{M}_{\parallel\perp}}{(k^2 - \omega^2 + m_D^2)(k^6 + \frac{\pi^2}{4}m_L^4 \omega^2)} + \frac{k^2 \mathcal{M}_{\perp}}{(k^6 + \frac{\pi^2}{4}m_L^4 \omega^2)} \right) \quad (4.48)$$

Matris elemanı ifadesinden görüleceği üzere farklı bileşenler ayar parçacığının momentumuna farklı formlarda bağlıdır. Bu sebeple matris elemanının karesini ve buna karşılık gelen çarpışma integrali ifadelerini bileşenler cinsinde yazabiliriz. Bir sonraki bölümde en genel haliyle çarpışma integralinin formuna ve çarpışma frekanslarının her bir durum için nasıl hesaplanacağına bakacağız.

5 ÇARPIŞMA İNTEGRALI VE FREKANSLARI

Farklı materyal özelliklerini incelerken karşımıza çıkan çarpışma integralinin genel formunu Bölüm 3’de elde etmiştik. Genel bir enerji dispersiyon ilişkisi düşündüğümüzde $\tilde{\epsilon}_i(p)$, $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ saçılma etkileşimi için çarpışma integrali aşağıdaki gibidir:

$$I_{qst} = \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \int_{p_4} W_{st}(p_i) P_q(p_i) f_{1,s}^{(0)} f_{2,t}^{(0)} \left(1 - f_{3,s}^{(0)}\right) \left(1 - f_{4,t}^{(0)}\right). \quad (5.1)$$

Burada $W_{st}(p_i)$ geçiş genliği ifadesidir ve matris elemanı ile birlikte momentum ve enerji korunumunu ifadelerini barındırır:

$$W_{st}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4) = \frac{1}{2\tilde{\epsilon}_1(p_1)} \frac{1}{2\tilde{\epsilon}_2(p_2)} \frac{1}{2\tilde{\epsilon}_3(p_3)} \frac{1}{2\tilde{\epsilon}_4(p_4)} |M_{st}|^2(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4) \quad (5.2)$$

$$\times (2\pi)^4 \delta(\vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta(\tilde{\epsilon}_3(p_3) + \tilde{\epsilon}_4(p_4) - \tilde{\epsilon}_1(p_1) - \tilde{\epsilon}_2(p_2)).$$

Ayar parçacığının enerji ω ve momentum \vec{k} bileşenlerini integral değişkenleri olarak kullanıp simetrik bir şekilde verilen integralleri hesaplamak için, geçiş genliği ifadesinde verilen momentum δ fonksiyonunu kullanabiliriz. Momentum korunumu sayesinde $\vec{p}_3 = \vec{k} - \vec{p}_1$ ve $\vec{p}_4 = \vec{p}_2 - \vec{k}$ aynı zamanda enerji ifadelerini momentum değişimlerinin mutlak karesi cinsinden yazmak mümkündür. Enerji integralleri için $d\epsilon = \frac{d\epsilon}{dp} dp$ dönüşümü kullanılabilir. Ayar parçacığı üzerinden alacağımız integral için koordinat sistemimizin z -eksenini parçacığın momentumu yönünde seçebiliriz. Bu sayede gelen parçacıkların ayar parçacığı ile olan açısız bağımlılıkları açık bir şekilde ifade edilebilir [71, 72]. Enerji δ fonksiyonlarını da açısız integralleri hesaplamak için kullandığımızda çarpışma integrali için aşağıdaki genel ifadeyi elde ederiz:

$$I_{qst} = (2\pi)^{12} \int d\omega \int dk k^2 \int d\Omega \int d\epsilon_1 \tilde{p}'_1(\epsilon_1) \tilde{p}_1(\epsilon_1)^2 \int d\phi_1 \int d\epsilon_2 \tilde{p}'_2(\epsilon_2) \tilde{p}_2(\epsilon_2)^2 \quad (5.3)$$

$$\times \int d\phi_2 \frac{\tilde{p}_3(\epsilon_1 + \omega)}{\tilde{\epsilon}'_3(\tilde{p}_3(\epsilon_1 + \omega))} \frac{\tilde{p}_4(\epsilon_2 - \omega)}{\tilde{\epsilon}'_4(\tilde{p}_4(\epsilon_2 - \omega))} \tilde{p}_1(\epsilon_1) \tilde{p}_2(\epsilon_2) k n_1(\epsilon_1) n_2(\epsilon_2) (1 - n_3(\epsilon_1 + \omega))$$

$$\times (1 - n_4(\epsilon_2 - \omega)) W_{st}(\epsilon_{1,2}, \cos \theta_{1,2}, \phi_{1,2}, \vec{k}, \omega) P_q(\epsilon_{1,2}, \cos \theta_{1,2}, \phi_{1,2}, \vec{k}, \omega).$$

Buradaki açı ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\cos \theta_{1/2} \rightarrow \pm \frac{(\tilde{p}_{3/4}(\epsilon_{1/2} \pm \omega))^2 - (\tilde{p}_{1/2}(\epsilon_{1/2}))^2 - k^2}{2\tilde{p}_{1/2}(\epsilon_{1/2})k}. \quad (5.4)$$

Ayar parçacığı üzerinden alınan integralin sınırları parçacıkların dağılım fonksiyonları ve açılar yüzünden sınırlanmıştır. Bu sebeple öncelikle enerji integrallerinin ne olduklarını belirlemeliyiz. Gelen parçacıkların enerjileri sıcaklık bağımlılığını ortadan kaldırmak adına boyutsuz değişkenlere dönüştürülebilir:

$$x_{1/2} \equiv \frac{\epsilon_{1/2} - \mu_{1/2}}{T} \Rightarrow \epsilon_{1/2} = \mu_{1/2} + x_{1/2}T \Rightarrow d\epsilon_{1/2} = Tdx_{1/2}. \quad (5.5)$$

Çarpışma etkileşimleri ile kimyasal potansiyelde değişim olmayacağı için, ayar parçacığı üzerinden alınan enerji integrali de benzer şekilde boyutsuz hale getirilebilir: $d\omega = Tdx_\omega$. Bu sayede dağılım fonksiyonlarını boyutsuz hale getirip enerji momentum integrallerini kimyasal potansiyelin dengede olduğu durum için belirleyebiliriz. Açısal integralleri belirlerken, ayar parçacığının momentumu üzerine elde ettiğimiz kısıt saçılan parçacıkların momentumlarının boyları üzerinden belirlenmektedir. Saçılım etkileşimi için elde ettiğimiz matris elemanının karesi, taşınım katsayıları için belirlediğimiz polinom ifadeleri ve dağılım fonksiyonları gelen parçacıkların arasındaki açığa bağlıdır. Enerji ifadelerini boyutsuz hale getirdiğimiz için dağılım fonksiyonları açısal bağımlılıktan kurtulmuştur. Dolayısıyla çarpışma integrali ifadesini aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} I_{qst} = & \frac{T^3}{2^{12}\pi^8} \int_{-\infty}^{\infty} dx_\omega \int_{-\frac{\mu_s}{T}}^{\infty} dx_1 \frac{\tilde{p}'_1(\mu_s + x_1T) \tilde{p}_1(\mu_s + x_1T) \tilde{p}_3(\mu_3 + x_1T + x_\omega T)}{\tilde{e}'_3(\tilde{p}_3(\mu_3 + x_1T + x_\omega T)) (\mu_s + x_1T) (\mu_3 + x_1T + x_\omega T)} \\ & \times \tilde{n}_+(x_1) \tilde{n}_+(-x_1 - x_\omega) \\ & \times \int_{-\frac{\mu_t}{T}}^{\infty} dx_2 \frac{\tilde{p}'_2(\mu_t + x_2T) \tilde{p}_2(\mu_t + x_2T) \tilde{p}_4(\mu_4 + x_2T - x_\omega T)}{\tilde{e}'_4(\tilde{p}_4(\mu_4 + x_2T - x_\omega T)) (\mu_t + x_2T) (\mu_4 + x_2T - x_\omega T)} \\ & \times [\tilde{n}_+(x_2) \tilde{n}_+(x_\omega - x_2)] \\ & \times \int_{\Delta p}^{2\bar{p}} dk \int d\Omega \int d\phi_1 \int d\phi_2 |M_{st}|^2 \left(\epsilon_i, \cos \theta_i, \phi_i, \vec{k}, \omega \right) P_q \left(\epsilon_i, \cos \theta_i, \phi_i, \vec{k}, \omega \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Fermi-akışkan teorisinde enerji ve momentum ifadelerini T/p_F parametresi etrafında seriye açabiliriz. Böylece boyutsuz enerji integrali değişkenlerine bağlı bir kuvvet serisi elde ederiz. Polinom şeklinde bir ifade elde edeceğimiz için açısal integral bundan etkilenmez ve onu her mertebede integre edip aradığımız sonuca istediğimiz mertebede ulaşabiliriz. Sadece Fermi-akışkan teorisi ve saçılma etkileşimlerini düşündüğümüz durumda yukarıda elde ettiğimiz çarpışma integrali

ifadesi oldukça sadeleşecektir. Matris elemanı, $|M_{st}|^2$ ve taşınım katsayılarından gelen polinom ifadeleri, P_q için açısız bağımlılık ifadesini düşünelim. Eğer herhangi bir dış alanın etkisi yoksa bu iki ifade de gelen parçacıkların arasındaki açıya bağlıdır, $\cos\theta_{12}$. Bu açıyı o iki vektörün birim vektörlerinin iç çarpımı olarak hesaplamak mümkündür $\cos\theta_{12} = \hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2$. Koordinat sistemimizi p_1 vektörünün yönünde seçersek, $\cos\theta_{12}$ 'yi etkileşime giren parçacıkların ayar parçacığıyla yaptığı açılar cinsinden $\omega, k \ll p_i$ limitinde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\cos\theta_{12} &= \hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi_2 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ &= \sqrt{1 - \cos^2\theta_1} \sqrt{1 - \cos^2\theta_2} \cos\phi_2 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 = \cos\phi_2.\end{aligned}\quad (5.7)$$

Görüldüğü üzere matris elemanının karesi ve polinom ifadesi ilgilendiğimiz limitte $\cos\phi_2$ 'ye bağlı olarak yazılabilir. Bu yükükleri açı üzerinden integre etmek çok basittir. İkisi de en yüksek mertebede $\cos\theta_{12}$ 'in karesi olacak şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}|M_{st}|^2 &= M_{0st} + M_{1st} \cos\theta_{12} + M_{2st} \cos^2\theta_{12}, \\ P_q &= P_{q0} + P_{q1} \cos\theta_{12} + P_{q2} \cos^2\theta_{12}.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Katsayılar sadece enerjilere ve etkileşime giren parçacıklar ile ayar parçacığının momentumuna bağlıdır, herhangi bir açısız bağımlılık yoktur. Açılar üzerinden ortalama olarak ve $\cos\phi_2$ 'nin tek kuvvetlerinin sıfır olmasından dolayı matris elemanı ile taşınım katsayılarından gelen polinom ifadesinin çarpımını ayar parçacığı ile etkileşime giren parçacıklar arasındaki açılar $\cos\theta_{1,2}$ cinsinden yazabiliriz bakınız Ek C. Saçılma etkileşimlerini dikkate alırsak, Fermi-akışkan teorisi çerçevesinde çarpışma integrali aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}I_{qst} &= \frac{T^3 p_{Fs}^2 p_{Ft}^2}{2^8 \pi^5 \mu_s^2 \mu_t^2 v_{Fs}^2 v_{Ft}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_\omega \int_{-\frac{\mu_s}{T}}^{\infty} dx_1 \int_{-\frac{\mu_t}{T}}^{\infty} dx_2 \\ &\quad \times \tilde{n}_+(x_1) \tilde{n}_+(-x_1 - x_\omega) [\tilde{n}_+(x_2) \tilde{n}_+(x_\omega - x_2)] \int_{2\Delta p}^{2\bar{p}} dk \langle |M_{st}|^2 P_q \rangle\end{aligned}\quad (5.9)$$

Matris elemanının karesinin farklı momentum limitleri için ayrıştırılabileceğini görmüştük $|M|^2 = |M|_{\parallel}^2 + |M|_{\perp\parallel}^2 + |M|_{\perp}^2$. Bu sebeple çarpışma integrali de enlemsel, boylamsal ve karışık kısım olmak üzere üç kısma ayrılabilir: $I_q \equiv I_{q\parallel} + I_{q\parallel\perp} + I_{q\perp}$. Açısız ayrışmadan elde ettiğimiz matris elemanı ile polinom ifadesinin çarpımının açık formu Ek C.3'de verilmiştir. Matris elemanını da boyuna, enine ve karışık durum için açısız bağımlılıklarına göre ayırıp yazmak mümkündür Ek

C.4. Bu sayede her bir ayrı durum için çarpışma integrallerini belirleyebiliriz.

5.1 Çarpışma İntegralinin Boyuna Kısım

Boyuna kısım için momentum integralinin nasıl ölçekleneceğini propagatörün zamansal kısmına bakarak görebiliriz. Boyuna kısım efektif Debye kütesine bağlı olarak statik olarak ölçeklenebilir:

$$k = \sqrt{m_D^2} x_k \quad \Rightarrow \quad dk = \sqrt{m_D^2} dx_k. \quad (5.10)$$

Bu durumda çarpışma integralini en genel haliyle aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$I_{q\parallel} = \frac{T^3 p_{F_s}^2 p_{F_t}^2}{2^8 \pi^5 m_D^3 \mu_s^2 \mu_t^2 v_{F_s}^2 v_{F_t}^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_\omega \int_{-\frac{\mu_s}{T}}^{\infty} dx_1 \int_{-\frac{\mu_t}{T}}^{\infty} dx_2 \quad (5.11)$$

$$\times \tilde{n}_+(x_1) \tilde{n}_+(x_2) \tilde{n}_+(x_\omega - x_1) \tilde{n}_+(-x_\omega - x_2) \int_{\frac{\Delta p_{F>}}{m_D}}^{\frac{2p_{F<}}{m_D}} \frac{dx_k}{(x_k^2 + 1)^2} \mathcal{M}_{\parallel} P_q.$$

Ek C'de verilen matris elemanın ve polinomların bileşenlerinin açık ifadeleri kullanılarak boyuna durumda her bir taşınım katsayısı için çarpışma integrali, Ek A'daki enerji ve momentum integralleri yardımıyla hesaplanabilir.

Elektriksel iletkenlik için boyuna durumda çarpışma integralinin normal, $I_{\sigma\parallel st}$ ve üssü $I'_{\sigma\parallel st}$ bileşenleri aşağıdaki gibidir.

$$I_{\sigma\parallel st} = \frac{C p_{F_2}^2 \Phi_\sigma T^3}{2^6 3 \pi^2 v_{F_t}^2 m_D} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^5 \quad (5.12)$$

$$I'_{\sigma\parallel st} = -\frac{C p_{F_s} p_{F_t} \Phi_\sigma T^3}{2^6 3 \pi^2 v_{F_s} v_{F_t} m_D} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^5 \quad (5.13)$$

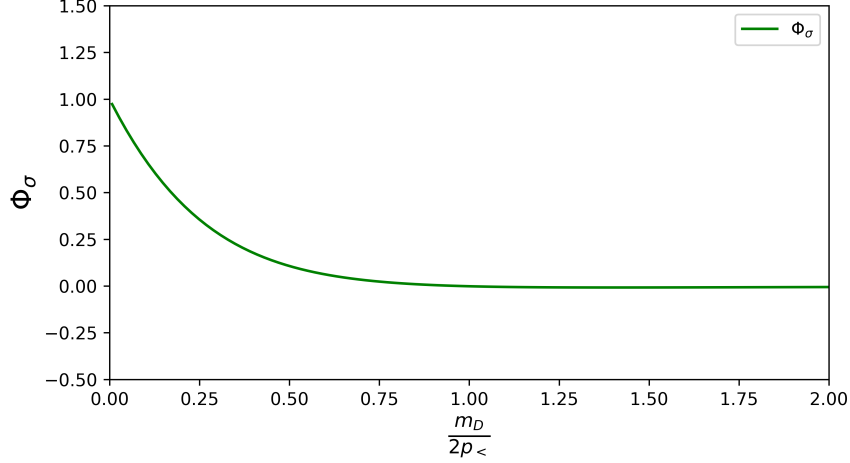
$I_{\sigma\parallel st}$ ifadesinde bulunan ve perdeleme fonksiyonu olarak tanımlayıp normalize ettiğimiz $\Phi_{\sigma st}$ fonksiyonunun açık ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\Phi_{\sigma st} = \frac{2}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{2p_{F<}}{m_D}\right) - \left(2 \frac{(\mu_s^2 + \mu_t^2) p_{F<}^2}{\mu_s^2 \mu_t^2} + \frac{1}{(1 + (m_D/2p_{F<})^2)} \right) \frac{m_D}{2p_{F<}} \right) \quad (5.14)$$

$$+ 3 \frac{(\mu_s^2 + \mu_t^2) p_{F<}^2}{\mu_s^2 \mu_t^2} \left(\frac{m_D}{2p_{F<}} \right)^2 \arctan\left(\frac{2p_{F<}}{m_D}\right)$$

$$- \frac{(\mu_s^2 + \mu_t^2) p_{F<}^2}{\mu_s^2 \mu_t^2} \frac{1}{(1 + (m_D/2p_{F<})^2)} \left(\frac{m_D}{2p_{F<}} \right)^3$$

Bu fonksiyonun limit durumlarda nasıl davrandığını görmek için aynı parçacık türleri için ultra-rölativistik limite bakabiliriz. Bu limitte kimyasal potansiyel parçacığın Fermi momentumuna eşit olacaktır, $p_{Fi} = \mu_i \cdot \frac{m_D}{2p_{F<}}$ 'yi fonksiyon parametresi olarak alırsak Şekil 5.1'deki grafiği elde ederiz.



Şekil 5.1: Boylamsal durum için elektriksel iletkenlik perdeleme fonksiyonu.

Perdeleme fonksiyonunun davranışı zayıf çiftlenim durumları için beklediğimiz gibidir. $\frac{m_D}{2p_{F<}}$ ifadesi, Denklem 4.47'den görüleceği üzere ultra-rölativistik limitte ince yapı sabitinin kareköküyle orantılıdır. Dolayısıyla elektromanyetik etkileşimler için istenilen davranışı sergiler.

Isıl iletkenlik için boylamsal durumda çarpışma integralinin normal $I_{\kappa\parallel st}$ ve üssü $I'_{\kappa\parallel st}$ bileşenleri sıcaklığa beşinci mertebeden bağlıdır ve ilgilendiğimiz düşük sıcaklık limitinde ihmal edilebilir:

$$I_{\kappa\parallel st} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^5, \quad I'_{\kappa\parallel st} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^5. \quad (5.15)$$

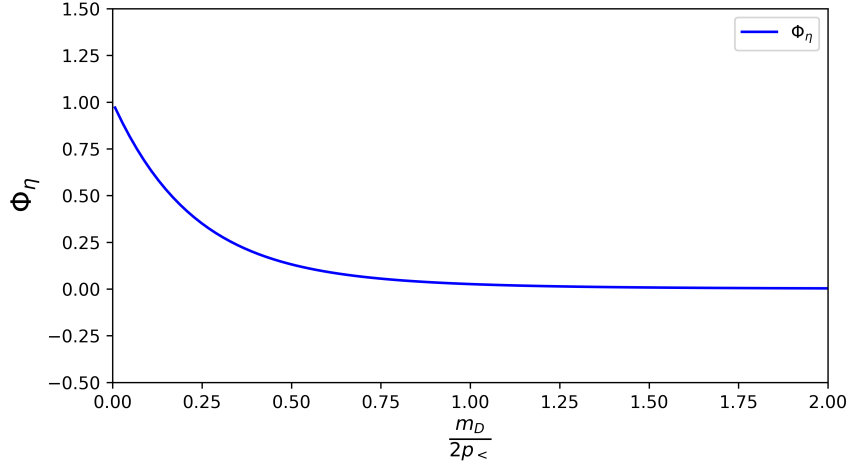
Benzer şekilde kayma viskozitesi için boyuna durumda çarpışma integralinin normal $I_{\eta\parallel st}$ ve üssü $I'_{\eta\parallel st}$ bileşeni hesaplanabilir:

$$I_{\eta\parallel st} = \frac{C p_{Fs}^2 p_{Ft}^2 T^3}{2^5 3 \pi^2 m_D v_{Ft}^2} \Phi_{\eta\parallel st} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^4, \quad I'_{\eta\parallel st} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^4. \quad (5.16)$$

Boyuna durum için $I_{\eta\parallel st}$ ifadesinde bulunan perdeleme fonksiyonunun açık ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta\parallel st} = & \frac{2}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{2p_{F<}}{m_D}\right) + 5 \frac{(\mu_s^2 + \mu_t^2) p_{F<}^4}{\mu_s^2 \mu_t^2 p_{F_s}^2} \left(\frac{m_D}{2p_{F<}}\right)^4 \arctan\left(\frac{2p_{F<}}{m_D}\right) \right) \quad (5.17) \\ & - \left(\frac{1}{1 + (m_D/(2p_{F<}))^2} + 2 \left(\frac{(\mu_s^2 + \mu_t^2) p_{F<}^2}{\mu_s^2 \mu_t^2} + \frac{p_{F<}^2}{p_{F_s}^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{(\mu_s^2 + \mu_t^2) p_{F<}^4}{\mu_s^2 \mu_t^2 p_{F_s}^2} \right) \frac{m_D}{2p_{F<}} \\ & + 3 \left(\frac{(\mu_s^2 + \mu_t^2) p_{F<}^2}{\mu_s^2 \mu_t^2} + \frac{p_{F<}^2}{p_{F_s}^2} \right) \left(\frac{m_D}{2p_{F<}}\right)^2 \arctan\left(\frac{2p_{F<}}{m_D}\right) \\ & - \left(\left(\frac{(\mu_s^2 + \mu_t^2) p_{F<}^2}{\mu_s^2 \mu_t^2} + \frac{p_{F<}^2}{p_{F_s}^2} \right) \frac{1}{1 + (m_D/2p_{F<})^2} + 4 \frac{(\mu_s^2 + \mu_t^2) p_{F<}^4}{\mu_s^2 \mu_t^2 p_{F_s}^2} \right) \left(\frac{m_D}{2p_{F<}}\right)^3 \\ & - \frac{(\mu_s^2 + \mu_t^2) p_{F<}^4}{\mu_s^2 \mu_t^2 p_{F_s}^2} \frac{1}{1 + (m_D/2p_{F<})^2} \left(\frac{m_D}{2p_{F<}}\right)^5 \Big). \end{aligned}$$

Limit davranışlarını görmek için, aynı tip parçacıkların ultra-rölativistik limitte nasıl davrandığına bakabiliriz. Bu durumda Şekil 5.2'deki sonucu elde ederiz.



Şekil 5.2: Boylamsal durum için kayma viskozitesi perdeleme fonksiyonu.

5.2 Çarpışma İntegralinin Enine Kısım

Enine kısım için momentum integralinin nasıl ölçekleneceğini anlamak için propagatörün uzaysal kısmına bakabiliriz. Enine kısım,

$$k = \left(\frac{\pi}{2} m_L^2 |x_\omega| T \right)^{\frac{1}{3}} x_k \quad \Rightarrow \quad dk = \left(\frac{\pi}{2} m_L^2 |x_\omega| T \right)^{\frac{1}{3}} dx_k \quad (5.18)$$

olarak ölçeklenebilir. $T \ll p_F$ limitinde enerji integrallerinin alt limiti üstel olarak baskılanacağı için sonsuza götürülebilir. Benzer şekilde momentum integrali için

alt limiti sıfır olarak alabiliriz. Bu durumda enine çarpışma integrali aşağıdaki gibi elde edilir:

$$I_{q\perp} = \frac{T^2 p_{Fs}^2 p_{Ft}^2}{2^7 \pi^6 m_L^2 \mu_s^2 \mu_t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_\omega}{|x_\omega|} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \tilde{n}_+(x_1) \tilde{n}_+(x_2) \tilde{n}_+(x_\omega - x_1) \tilde{n}_+(x_\omega - x_2) \quad (5.19)$$

$$\times \left(\int_0^{\frac{2p_{<}}{(\frac{\pi}{2} m^2 |x_\omega| T)^{\frac{1}{3}}}} dx_k \frac{x_k^2 \langle \mathcal{M}_\perp P_q \rangle}{x_k^6 + 1} \right) + O\left(\frac{T}{p_F}\right).$$

Ek C'de verilen matris elemanın ve polinom bileşenlerinin açık ifadeleri enine durum için kullanılarak çarpışma integralleri Ek A'daki enerji ve momentum integralleri yardımıyla elde edilebilir.

Elektrik iletkenlik enine çarpışma integralinin normal $I_{\sigma\perp st}$ ve üssü $I'_{\sigma\perp st}$ bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$I_{\sigma\perp st} = \frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \zeta\left(\frac{5}{3}\right) \mathcal{C} p_{Fs}^2 p_{Ft}^4 v_{Fs}^2 v_{Ft}^2 T^{\frac{8}{3}}}{2^{\frac{14}{3}} 3\pi^{\frac{13}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_L^{\frac{2}{3}}} - \frac{\mathcal{C} p_{Ft}^2 p_{F<} (6p_{F>}^2 - p_{F<}^2) v_{Fs}^2 T^3}{2^5 3^2 \pi^3 \mu_s^2 \mu_t^2} \quad (5.20)$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) \zeta\left(\frac{7}{3}\right) \mathcal{C} (p_{Fs}^2 + p_{Ft}^2) p_{Ft}^2 m_L^{\frac{2}{3}} v_{Fs}^2 T^{\frac{10}{3}}}{2^{\frac{22}{3}} \pi^{\frac{11}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^4,$$

$$I'_{\sigma\perp st} = -\frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \zeta\left(\frac{5}{3}\right) \mathcal{C} v_{Fs} v_{Ft} p_{Fs}^3 p_{Ft}^3 T^{\frac{8}{3}}}{2^{\frac{14}{3}} 3\pi^{\frac{13}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_L^{\frac{2}{3}}} + \frac{\mathcal{C} p_{Fs} p_{Ft} p_{F<} (6p_{F>}^2 - p_{F<}^2) v_{Fs} v_{Ft} T^3}{2^5 3^2 \pi^3 \mu_s^2 \mu_t^2} \quad (5.21)$$

$$- \frac{\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) \zeta\left(\frac{7}{3}\right) \mathcal{C} v_{Fs} v_{Ft} p_{Fs} p_{Ft} (p_{Fs}^2 + p_{Ft}^2) m_L^{\frac{2}{3}} T^{\frac{10}{3}}}{2^{\frac{22}{3}} \pi^{\frac{11}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^4.$$

İlk üç merteye sonuçlar arasında $I_{\sigma\perp st} = -\frac{v_{Ft} p_{Fs}}{v_{Fs} p_{Ft}} I'_{\sigma\perp st}$ şeklinde bir ilişki sağlanmaktadır.

Isıl iletkenlik için enine durumda çarpışma integralinin normal $I_{\kappa\perp st}$ ve üssü $I'_{\kappa\perp st}$ bileşenleri Fermi-akışkan teorisi çerçevesinde aşağıdaki gibidir:

$$I_{\kappa\perp st} = \frac{\zeta(3) \mathcal{C} v_{Fs}^2 p_{Fs}^4 p_{Ft}^4 T^4}{2^4 \pi^5 \mu_s^2 \mu_t^2 m_L^2} \quad (5.22)$$

$$- \frac{\mathcal{C} v_{Fs}^2 p_{Fs}^2 p_{Ft}^2 T^{\frac{14}{3}}}{2^{\frac{20}{3}} 3\pi^{\frac{13}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_L^{\frac{2}{3}}} \left(\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \zeta\left(\frac{11}{3}\right) \left(3p_{Fs}^2 + \frac{19p_{Ft}^2}{3}\right) + \frac{4\pi^2 p_{Ft}^2}{3} \Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \zeta\left(\frac{5}{3}\right) \right),$$

$$I'_{\kappa\perp st} = -\frac{\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \zeta\left(\frac{11}{3}\right) \mathcal{C} v_{Fs} v_{Ft} p_{Fs}^3 p_{Ft}^3 T^{\frac{14}{3}}}{2^{\frac{17}{3}} 3\pi^{\frac{13}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_L^{\frac{2}{3}}} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^5. \quad (5.23)$$

Kayma viskozitesi için enine durumda çarpışma integralinin normal $I_{\eta_{\perp st}}$ ve üssü $I'_{\eta_{\perp}}$ bileşenleri Fermi-akışkan teorisi çerçevesinde aşağıdaki gibi hesaplanabilir. Normal bileşen,

$$I_{\eta_{\perp st}} = \frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \zeta\left(\frac{5}{3}\right) \mathcal{C} v_{F_s}^2 p_{F_s}^4 p_{F_t}^4 T^{\frac{8}{3}}}{2^{\frac{11}{3}} 3\pi^{\frac{13}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_L^{\frac{2}{3}}} - \frac{\mathcal{C} v_{F_s}^2 p_{F_s}^2 p_{F_t}^2 p_{F<} (6p_{F>}^2 - p_{F<}^2 + \frac{9}{5} p_{F<}^4 / p_{F_s}^2) T^3}{2^5 3\pi^3 \mu_s^2 \mu_t^2} \quad (5.24)$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) \zeta\left(\frac{7}{3}\right) \mathcal{C} v_{F_s}^2 p_{F_s}^2 p_{F_t}^2 (3p_{F_s}^2 + 4p_{F_t}^2) m_L^{\frac{2}{3}} T^{\frac{10}{3}}}{2^{\frac{19}{3}} 3\pi^{\frac{11}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^{\frac{11}{3}}$$

olarak bulunur. Üssü bileşen sıcaklığa açılım limitlerimizin ötesinde bir mertebeden bağlı olduğu için ihmal edilebilir:

$$I'_{\eta_{\perp st}} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^{\frac{11}{3}}. \quad (5.25)$$

5.3 Çarpışma İntegralinin Karışık Kısmı

Karmaşık kısım için momentum integralinin nasıl ölçekleneceği ilgilendiğimiz integrantın, $\langle \mathcal{M}_{\parallel\perp} P_q \rangle$ en düşük mertebede momentuma nasıl bağlı olduğuna bağlıdır. Çarpışma integralini ara bir ölçek üzerinden, $(m_L^2 T)^{\frac{1}{3}} \ll \Lambda \ll m_D$, ikiye ayırıp aşağıdaki gibi yazabiliriz, $I_{j\parallel\perp} = I_{j\parallel\perp}^{\perp} + I_{j\parallel\perp}^{\parallel}$. İntegralin enine kısmı $k = (\frac{\pi}{2} m_L^2 |x_{\omega}| T)^{\frac{1}{3}} x_k$ olarak ölçeklenir ve aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$I_{q\parallel\perp}^{\perp} = -\frac{p_{F_s}^2 p_{F_t}^2 T^{\frac{8}{3}}}{2^{\frac{20}{3}} \pi^{\frac{16}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_D^2 m_L^{\frac{2}{3}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_{\omega}}{|x_{\omega}|^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \frac{1}{w_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \frac{1}{w_2^2} \quad (5.26)$$

$$\times \tilde{n}_+(x_1) \tilde{n}_+(x_2) \tilde{n}_+(x_{\omega} - x_1) \tilde{n}_+(-x_{\omega} - x_2) \int_0^{\frac{\Lambda}{(\frac{\pi}{2} m_L^2 |x_{\omega}| T)^{\frac{1}{3}}}} dx_k \frac{x_k^4}{(x_k^6 + 1)} \langle \mathcal{M}_{\parallel\perp}^{\perp} P_j \rangle.$$

İntegralin boyuna kısmı ise $k = \sqrt{m_D^2} x_k$ olarak ölçeklenir ve aşağıdaki gibi elde edilir:

$$I_{q\parallel\perp}^{\parallel} = -\frac{p_{F_s}^2 p_{F_t}^2 T^3}{2^7 \pi^5 \mu_s^2 \mu_t^2 m_D^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{\omega} \int_{-\frac{\mu_s}{T}}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \frac{1}{w_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \frac{1}{w_2^2} \quad (5.27)$$

$$\times \tilde{n}_+(x_1) \tilde{n}_+(x_2) \tilde{n}_+(x_{\omega} - x_1) \tilde{n}_+(-x_{\omega} - x_2) \int_{\frac{\Lambda}{m_D}}^{\frac{2\bar{p}}{m_D}} dx_k \frac{1}{(x_k^2 + 1) x_k^2} \langle \mathcal{M}_{\parallel\perp}^{\parallel} P_j \rangle.$$

Eğer integrant $\langle \mathcal{M}_{\parallel\perp} P_q \rangle = O(k^2)$ mertebesinde ise çarpışma integraline düşük momentum limitinden gelen katkı enine kısımdan gelemez ve ihmal edilebilir. Bu durumda baskın katkı sadece boyuna integralden gelir. Eğer integrant $\langle \mathcal{M}_{\parallel\perp} P_q \rangle =$

$O(1)$ mertebesinde ise iki kısımdan gelen katkı da hesaba katılmalıdır.

Elektriksel iletkenlik için Ek C'de verilen matris elemanı ve polinomlar karışık durum için hesaplandığında elde edilen integrantın en düşük mertebede $O(1)$ mertebesinde olduğu görülür. Bu sebeple her bileşeni dikkate almak gerekir. Ek A'da verilen integraller yardımıyla hesaplanan sonuçlar aşağıdaki gibidir:

$$I_{\sigma_{\parallel\perp st}}^{\perp} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^5, \quad I_{\sigma_{\parallel\perp st}}^{\parallel} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^6, \quad (5.28)$$

$$I'_{\sigma_{\parallel\perp st}}^{\perp} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^{\frac{11}{3}}, \quad I'_{\sigma_{\parallel\perp st}}^{\parallel} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^4. \quad (5.29)$$

Elektriksel iletkenlik çarpışma integraline gelen ilk mertebeden terimlerin $O(T^{8/3})$ olduğunu dikkate aldığımızda karışık durumdan gelen katkıların daha düşük mertebelerden olduğunu ve ihmal edilebileceğini söyleyebiliriz.

Isıl iletkenlik için integrant hesaplandığında elde edilen sonuç en düşük mertebede $O(1)$ şeklindedir. Benzer şekilde iki kısımdan da gelen katkıları dikkate almalıyız. Her bir durum için elde edilen sonuçların sıcaklığa bağımlılığı aşağıdaki gibidir:

$$I_{\kappa_{\parallel\perp st}}^{\perp} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^{\frac{20}{3}}, \quad I_{\kappa_{\parallel\perp st}}^{\parallel} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^7, \quad I'_{\kappa_{\parallel\perp st}} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^5. \quad (5.30)$$

Isıl iletkenlik durumunda çarpışma integraline karmaşık kısımdan gelen ilgilendiğimiz mertebeden katkı sadece üssü bileşenin enine olarak ölçeklendiği kısımdan gelir:

$$I_{\kappa_{\parallel\perp}}^{\perp} = \frac{\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \zeta\left(\frac{11}{3}\right) C p_{Fs}^3 p_{Ft}^3 \nu_{\kappa_{\parallel\perp}} T^{\frac{14}{3}}}{2^{\frac{11}{3}} 3\pi^{\frac{13}{3}} \mu_s \mu_t m_D^2 m_L^{\frac{2}{3}}} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^5 \equiv I'_{\kappa_{\parallel\perp}}. \quad (5.31)$$

Kayma viskozitesi için hesaplanan integrantın normal bileşenleri en düşük mertebede $O(1)$ olarak hesaplanır. Bu durum için hesaplanan çarpışma integralleri aşağıdaki gibidir:

$$I_{\eta_{\parallel\perp}}^{\perp} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^5, \quad I_{\eta_{\parallel\perp}}^{\parallel} = O\left(\frac{T}{p_F}\right)^5. \quad (5.32)$$

İntegrantın üssü bileşenleri için enlemsel olarak ölçeklenen $O(k^2)$ mertebesinde bulunur. Bu kısımdan gelen katkı küçük momentum limiti için önemli değildir.

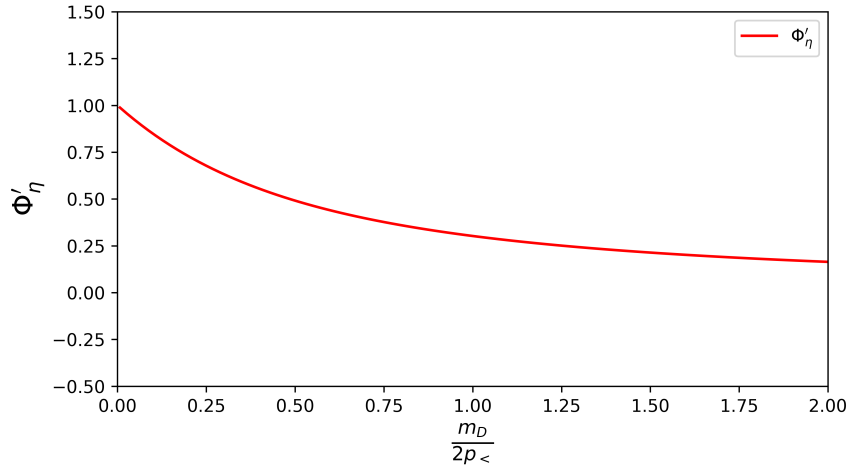
Boyuna olarak ölçeklenen kısımdan gelen çarpışma integralinin sonucu aşağıdaki gibidir:

$$I'_{\eta\parallel\perp} = \frac{\mathcal{C}p_{F_s}^3 p_{F_t}^3 \Phi'_{\eta st} T^3}{2^4 3 \pi^2 \mu_s \mu_t m_D} + O\left(\frac{T}{p_{F_i}}\right)^4 \equiv I'_{\eta\parallel\perp}. \quad (5.33)$$

Kayma viskozitesinin karışık durumu için bulduğumuz perdeleme fonksiyonu, $\Phi'_{\eta st}$ 'in açık ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \Phi'_{\eta st} = & \frac{2}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{2p_{F<}}{m_D}\right) - \left(\frac{p_{F<}^2}{p_{F_s}^2} + \frac{p_{F<}^2}{p_{F_t}^2} - \frac{p_{F<}^4}{3p_{F_s}^2 p_{F_t}^2} \right) \frac{m_D}{2p_{F<}} \right. \\ & + \left(\frac{p_{F<}^2}{p_{F_s}^2} + \frac{p_{F<}^2}{p_{F_t}^2} \right) \left(\frac{m_D}{2p_{F>}} \right)^2 \arctan\left(\frac{2p_{F<}}{m_D}\right) - \frac{p_{F<}^4}{p_{F_s}^2 p_{F_t}^2} \left(\frac{m_D}{2p_{F<}} \right)^3 \\ & \left. + \frac{p_{F<}^4}{p_{F_s}^2 p_{F_t}^2} \left(\frac{m_D}{2p_{F<}} \right)^4 \arctan\left(\frac{2p_{F<}}{m_D}\right) \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Limit durumlarda bu fonksiyonun nasıl davrandığına bakmak için, kimyasal potansiyelin Fermi momentumuna eşit olduğu ultra-rölativistik duruma bakabiliriz. Bu limitte elde edilen fonksiyon grafiği Şekil 5.3'te verilmiştir.



Şekil 5.3: Karışık durum için kayma viskozitesi perdeleme fonksiyonu

5.4 Elektriksel İletkenlik Çarpışma Frekansları

Elektriksel iletkenlik çarpışma frekanslarını bulmak için yukarıda elde ettiğimiz sonuçları Bölüm 3.2.1'de bulduğumuz ifadelerde yerine yazmalıyız. Çarpışma fre-

kanslarının normal bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\nu_{\sigma st}^{\perp} &= \frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \zeta\left(\frac{5}{3}\right) N_t \mathcal{C} p_{Ft}^4 v_{Fs} T^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{11}{3}} 3\pi^{\frac{7}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_L^{\frac{2}{3}}} - \frac{N_t \mathcal{C} p_{Ft}^2 p_{F<} (6p_{F>}^2 - p_{F<}^2) v_{Fs} T^2}{2^4 3^2 \pi \mu_s^2 \mu_t^2 p_{Fs}^2} \\
&+ \frac{\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) \zeta\left(\frac{7}{3}\right) N_t \mathcal{C} (p_{Fs}^2 + p_{Ft}^2) p_{Ft}^2 m_L^{\frac{2}{3}} v_{Fs} T^{\frac{7}{3}}}{2^{\frac{19}{3}} \pi^{\frac{5}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 p_{Fs}^2} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^{\frac{8}{3}}, \\
\nu_{\sigma st}^{\parallel} &= \frac{\mathcal{C} N_t p_{Ft}^2 \Phi_{\sigma} T^2}{2^5 3 p_{Fs}^2 m_D v_{Fs} v_{Ft}^2} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^4, \\
\nu_{\sigma st}^{\perp\parallel} &= O\left(\frac{T}{p_{Fi}}\right)^5.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Çarpışma frekanslarının üssü bileşenleri ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\nu'_{\sigma st}{}^{\perp} &= -\frac{v_{Ft} p_{Fs}}{v_{Fs} p_{Ft}} \nu_{\sigma st}^{\perp}, \\
\nu'_{\sigma st}{}^{\parallel} &= -\frac{v_{Ft} p_{Fs}}{v_{Fs} p_{Ft}} \nu_{\sigma st}^{\parallel}, \\
\nu'_{\sigma st}{}^{\perp\parallel} &= O\left(\frac{T}{p_{Fi}}\right)^5.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Enine ve boyuna sonuçlar için elde edilen sonuçlar incelendiğinde iki büyüklük arasındaki farkın sıcaklık azaldıkça arttığı görülmektedir. Bu da bize düşük sıcaklıklarda enine plazmonlardan gelen katkının arttığını söylemektedir[73]. Toplu sonuçlar aşağıdaki gibi yazılabilir. Enine kısma gelen ikinci mertebeden düzeltme terimi standart Fermi-akışkan formunda olmasına rağmen işareti negatiftir. Bu terim etkileşime giren parçacıkların Fermi momentumuna bağlı olarak sıcaklık yükseldikçe çarpışma frekansında artışa sebep olabilir:

$$\begin{aligned}
\nu_{\sigma st} &= N_t \mathcal{C} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \zeta\left(\frac{5}{3}\right) p_{Ft}^4 v_{Fs} T^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{11}{3}} 3\pi^{\frac{7}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_L^{\frac{2}{3}}} - \frac{p_{Ft}^2 p_{F<} (6p_{F>}^2 - p_{F<}^2) v_{Fs} T^2}{2^4 3^2 \pi \mu_s^2 \mu_t^2 p_{Fs}^2} \right. \\
&+ \left. \frac{p_{Ft}^2 \Phi_{\sigma} T^2}{2^5 3 p_{Fs}^2 m_D v_{Fs} v_{Ft}^2} + \frac{\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) \zeta\left(\frac{7}{3}\right) (p_{Fs}^2 + p_{Ft}^2) p_{Ft}^2 m_L^{\frac{2}{3}} v_{Fs} T^{\frac{7}{3}}}{2^{\frac{19}{3}} \pi^{\frac{5}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 p_{Fs}^2} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^{\frac{8}{3}} \right), \\
\nu'_{\sigma st} &= -\frac{v_{Ft} p_{Fs}}{v_{Fs} p_{Ft}} \nu_{\sigma st}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Tek parçacık türü için toplam elektriksel iletkenlik çarpışma frekansı sifıra eşittir.

5.5 Isıl İletkenlik Çarpışma Frekansları

Benzer şekilde ısı iletkenlik çarpışma frekanslarını bulmak için elde ettiğimiz çarpışma integrali sonuçlarını Bölüm 3.2.2'de elde ettiğimiz ifadelerde yerine yazdığımızda ısı iletkenlik çarpışma frekanslarının normal bileşenleri için aşağıdaki

sonuçları elde ederiz [74, 75]:

$$\begin{aligned}
\nu_{\kappa st}^{\perp} &= \left(\frac{3\zeta(3) N_t \mathcal{C} v_{\text{Fs}} p_{\text{Fs}}^2 p_{\text{Ft}}^4 T}{2^3 \pi^5 \mu_s^2 \mu_t^2 m_{\text{L}}^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{N_t \mathcal{C} v_{\text{Fs}} p_{\text{Ft}}^2 T^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{17}{3}} \pi^{\frac{13}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_{\text{L}}^{\frac{2}{3}}} \left(\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \zeta\left(\frac{11}{3}\right) \left(3p_{\text{Fs}}^2 + \frac{19p_{\text{Ft}}^2}{3} \right) + \frac{4\pi^2 p_{\text{Ft}}^2}{3} \Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \zeta\left(\frac{5}{3}\right) \right) \right), \\
\nu_{\kappa st}^{\parallel} &= O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right)^2, \\
\nu_{\kappa st}^{\perp\parallel} &= O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right)^4.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Isıl iletkenlik çarpışma frekanslarının üssü bileşenleri ise aşağıdaki gibidir:

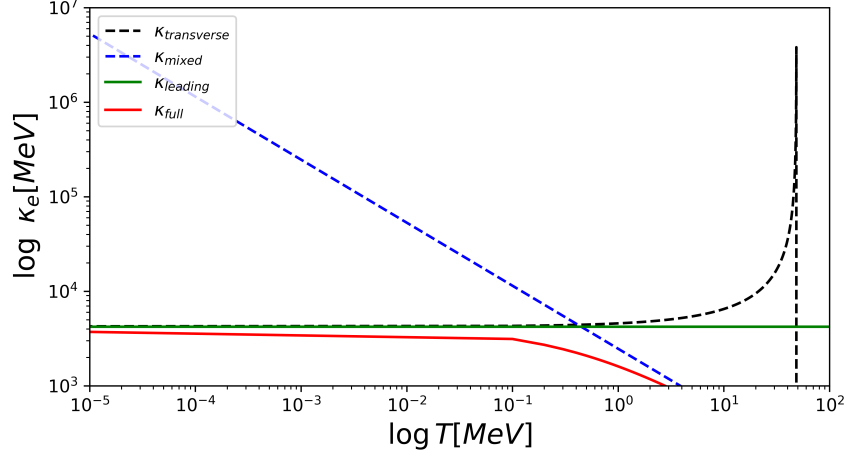
$$\begin{aligned}
\nu_{\kappa st}^{\perp} &= -\frac{\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \zeta\left(\frac{11}{3}\right) N_t \mathcal{C}_r v_{\text{Ft}} p_{\text{Fs}} p_{\text{Ft}}^3 T^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{14}{3}} \pi^{\frac{13}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_{\text{L}}^{\frac{2}{3}}} + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right)^2, \\
\nu_{\kappa st}^{\parallel} &= O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right)^2, \\
\nu_{\kappa st}^{\perp\parallel} &= \frac{\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \zeta\left(\frac{11}{3}\right) N_t \mathcal{C} p_{\text{Fs}} p_{\text{Ft}}^3 T^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{8}{3}} \pi^{\frac{13}{3}} \mu_s \mu_t m_{\text{D}}^2 m_{\text{L}}^{\frac{2}{3}} v_{\text{Fs}}} + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right)^2.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde baskın katkıların enine etkileşim kanallarından geldiği görülmektedir. Isıl iletkenlik taşınım katsayısı enine etkileşimler dikkate alındığında sıcaklıktan bağımsızdır ve sadece taşınım parçacıklarının Fermi momentumuna bağlıdır. Boyuna sonuçlar en düşük mertebede $O(T^2)$ mertebesinde olduğu için bütün boyuna katkılar, enine ve karışık kısımlarla kıyaslandığında alt mertebelerde katkılar vermektedir:

$$\begin{aligned}
\nu_{\kappa st} &= \left(\frac{3\zeta(3) N_t \mathcal{C} v_{\text{Fs}} p_{\text{Fs}}^2 p_{\text{Ft}}^4 T}{2^3 \pi^5 \mu_s^2 \mu_t^2 m_{\text{L}}^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{N_t \mathcal{C} v_{\text{Fs}} p_{\text{Ft}}^2 T^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{17}{3}} \pi^{\frac{13}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_{\text{L}}^{\frac{2}{3}}} \left(\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \zeta\left(\frac{11}{3}\right) \left(3p_{\text{Fs}}^2 + \frac{19p_{\text{Ft}}^2}{3} \right) + \frac{4\pi^2 p_{\text{Ft}}^2}{3} \Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \zeta\left(\frac{5}{3}\right) \right) \right), \\
\nu_{\kappa st}' &= \frac{\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \zeta\left(\frac{11}{3}\right) N_t \mathcal{C} p_{\text{Fs}} p_{\text{Ft}}^3 T^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{8}{3}} \pi^{\frac{13}{3}} \mu_s \mu_t m_{\text{D}}^2 m_{\text{L}}^{\frac{2}{3}} v_{\text{Fs}}} \left(1 - \frac{m_{\text{D}}^2}{4\mu_s \mu_t} \right) + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right)^2.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\tag{5.41}$$

Tek parçacık türü için çarpışma frekanslarını kullanarak Denklem 3.44 ifadesinden rahatlama zamanı, τ_{κ} , belirlenerek ısı iletkenlik katsayısı, κ , hesaplanabilir, Denklem 3.29. Düşük sıcaklıklarda ısı iletkenlik sıcaklıktan bağımsız bir fonksiyon gibi davranır ve parçacıkların Fermi momentumuna bağlıdır. Yüksek sıcaklıklarda, 0.1 MeV civarında, düzeltme terimleri ısı iletkenlik katsayısını etkilemeye başlar.



Şekil 5.4: Elektron ısı iletkenlik katsayısının sıcaklıkla değişimi, $p_F = 100$ MeV.

5.6 Kayma Viskozitesi

Aynı şekilde kayma viskozitesi için çarpışma frekansları elde edilen çarpışma integralleri kullanılarak Bölüm 3.2.3'de belirlenen ifadelerle bulunabilir. Kayma viskozitesi çarpışma frekansının normal bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur[76, 77, 78]:

$$\begin{aligned} \nu_{\eta st}^{\perp} &= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \zeta\left(\frac{5}{3}\right) N_t \mathcal{C} v_{Fs} p_{Ft}^4 T^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{11}{3}} \pi^{\frac{7}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_L^{\frac{2}{3}}} - \frac{N_t \mathcal{C} v_{Fs} p_{Ft}^2 p_{F<} (6p_{F>}^2 - p_{F<}^2 + \frac{9}{5} p_{F<}^4 / p_{Fs}^2) T^2}{2^5 \pi \mu_s^2 \mu_t^2 p_{Fs}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) \zeta\left(\frac{7}{3}\right) N_t \mathcal{C} v_{Fs} p_{Ft}^2 (3p_{Fs}^2 + 4p_{Ft}^2) m_L^{\frac{2}{3}} T^{\frac{7}{3}}}{2^{\frac{19}{3}} \pi^{\frac{5}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 p_{Fs}^2} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^{\frac{8}{3}} \right), \\ \nu_{\eta st}^{\parallel} &= \frac{N_t \mathcal{C} p_{Ft}^2 \Phi_{\eta st} T^2}{2^5 p_{Fs}^2 m_D v_{Fs} v_{Ft}^2} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^3, \\ \nu_{\eta st}^{\parallel\perp} &= O\left(\frac{T}{p_F}\right)^3. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Kayma viskozitesi çarpışma frekanslarının üssü bileşenleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \nu_{\eta st}^{\prime\perp} &= O\left(\frac{T}{p_F}\right)^{\frac{8}{3}}, \\ \nu_{\eta st}^{\prime\parallel} &= O\left(\frac{T}{p_F}\right)^3, \\ \nu_{\eta st}^{\prime\parallel\perp} &= \frac{N_t \mathcal{C} p_{Ft}^3 \Phi'_{\eta st} T^2}{2^4 \mu_s \mu_t p_{Fs} m_D v_{Fs}} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^3 = \nu'_{\eta st}. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Enine etkileşimlerden gelen sonuçlar kayma viskozitesi çarpışma frekanslarının düşük sıcaklık limitinde baskın olduklarını göstermektedir. Görece düşük sıcaklık limitinde kayma viskozitesi ifadesi üssü bileşenleri sıcaklığa $O(T^2)$ mertebesinde

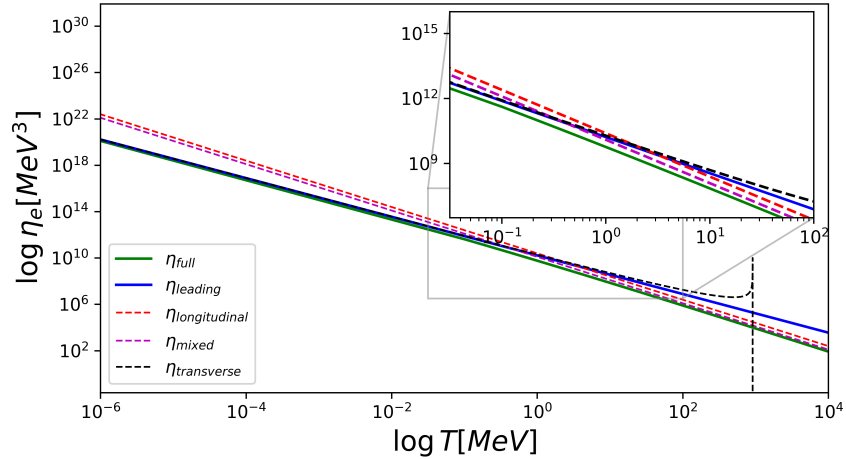
bağlı olduğu için ayrışabilir. Bu durumda taşınım katsayısı ifadesi momentum taşıyıcılarının ayrı ayrı katkılarını düşüneceğimiz bir hal alır. Toplu sonuçları normal ve üssü bileşen cinsinden aşağıdaki gibi yazabiliriz. Enine sonuca gelen ikinci mertebeden düzeltme terimi, etkileşime giren parçacıkların Fermi momentumlarına göre görece yüksek sıcaklıklarda çarpışma frekansında artışa sebep olabilir:

$$\nu_{\eta st} = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \zeta\left(\frac{5}{3}\right) N_t \mathcal{C} v_{F_s} p_{F_t}^4 T^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{11}{3}} \pi^{\frac{7}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 m_L^{\frac{2}{3}}} - \frac{N_t \mathcal{C} v_{F_s} p_{F_t}^2 p_{F<} (6p_{F>}^2 - p_{F<}^2 + \frac{9}{5} p_{F<}^4 / p_{F_s}^2) T^2}{2^5 \pi \mu_s^2 \mu_t^2 p_{F_s}^2} \right. \quad (5.44)$$

$$\left. + \frac{N_t \mathcal{C} p_{F_t}^2 \Phi_{\eta||st} T^2}{2^5 p_{F_s}^2 m_D v_{F_s} v_{F_t}^2} + \frac{\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) \zeta\left(\frac{7}{3}\right) N_t \mathcal{C} v_{F_s} p_{F_t}^2 (3p_{F_s}^2 + 4p_{F_t}^2) m_L^{\frac{2}{3}} T^{\frac{7}{3}}}{2^{\frac{19}{3}} \pi^{\frac{5}{3}} \mu_s^2 \mu_t^2 p_{F_s}^2} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^{\frac{8}{3}} \right),$$

$$\nu'_{\eta st} = \frac{N_t \mathcal{C} p_{F_t}^3 \Phi'_{\eta st} T^2}{2^4 \mu_s \mu_t p_{F_s} m_D v_{F_s}} + O\left(\frac{T}{p_F}\right)^3. \quad (5.45)$$

Benzer şekilde yine tek parçacık türü için çarpışma frekanlarını kullanarak Denklem 3.44 ifadesinden rahatlama zamanı, τ_η , belirlenerek kayma viskozitesi katsayısı, η , hesaplanabilir, Denklem 3.38. Düşük sıcaklıklarda düzeltme terimleri ihmal edilebilir ve ilk mertebeden terimler yeterlidir. Yüksek sıcaklıklarda ilk mertebe terimler kayma viskozitesi katsayısını bir kaç mertebe yüksek olarak vermektedir. Düzeltme terimlerini dahil etmek bu sorunu ortadan kaldırır.



Şekil 5.5: Elektron kayma viskozitesi katsayısının sıcaklıkla değişimi, $p_F = 100$ MeV.

6 SONUÇ

Bu çalışmada $SU(N)$ ayar etkileşimlerine uyan, süperakışkanlık veya süperiletkenlik fazlarına girmeyen fermiyonik parçacıklar için Fermi-akışkan teorisi çerçevesinde taşınım katsayıları ve çarpışma frekansları elde edildi. Bulduğumuz sonuçlar literatürde verilen belli başlı madde dağılımlarından elde edilen sonuçların aksine herhangi farklı sayıda fermiyonik parçacık çeşidi için geçerlidir. Kontrollü bir şekilde yaptığımız düşük sıcaklık açılımı sayesinde literatürde verilen ifadelerin ötesine geçerek düzeltme terimlerini hesapladık. Elde ettiğimiz sonuçların taşınım katsayıları cinsinden yorumlanması özel durumların incelenmesini gerektirmektedir ancak yine de sıcaklık parametresi nicel olarak madde bileşenleri hakkında fikir edinmemizi sağlayabilir.

Hesaplanan taşınım katsayılarının hepsi plazma ortamından kaynaklanan perdeleme etkileri dikkate alınarak boylamsal ve enlemsel durumlar için, birinci mertebe terimlerin ötesine gidilerek belirlenmiştir. Bu düzeltme terimlerine nötron yıldızı çarpışma olaylarının anlaşılmasında ihtiyaç olabilir çünkü sıcaklıklar Fermi momentumuna kıyasla çok düşük değildir.

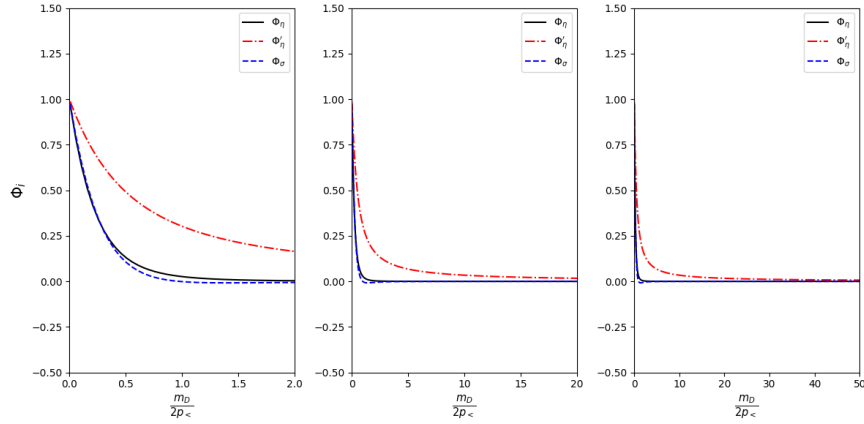
Elektriksel iletkenlik çarpışma frekansları için düşük sıcaklık limitinde bas-
kım terim enlemsel plazmonlardan gelmektedir. İkinci mertebe için hesaplanan ifade, dinamik perdeleme etkilerinin hesaba katılmadığı standart Fermi-akışkan sonuçlarıyla aynı sıcaklık bağımlılığına sahiptir [19]. Elektriksel iletkenlikle kayma viskozitesi arasında birinci mertebede $\nu_{\sigma st}^{(0)} = \frac{1}{3}\nu_{\eta st}^{(0)}$ şeklinde bir ilişki mevcuttur.

Isıl iletkenlik için elde edilen çarpışma frekansı birinci mertebede enlemsel plazmonlar için sıcaklığa lineer olarak bağlıdır. Bu bize süperiletkenliğin olmadığı durumda rölativistik parçacıklar için en düşük mertebede ısıl iletkenlik katsayısının sıcaklıktan bağımsız olarak parçacıkların Fermi momentumuyla orantılı olduğunu göstermektedir. Enlemsel plazmonlar için elde ettiğimiz düzeltme terimi sıcaklığa $O(T^{-2/3})$ kuvvetiyle bağlıdır. Bu sonuç genç yıldızların ısıl iletkenlik

özelliklerini anlamada standart Fermi-akışkan davranışından $O(T^{-1})$ daha doğru sonuçlar verebilir. Isıl iletkenlik için çarpışma frekansına gelen boylamsal katkılar $O(T^2)$ mertebesinde olduğu için, ultra-rölativistik parçacıkların varlığında yüksek oranda baskılanmaktadır [58].

Kayma viskozitesi çarpışma frekansı için elde ettiğimiz genel sonuçlar enlemsel plazmonlar için birinci mertebeden terimleri ve onlara gelen ikinci, üçüncü mertebeden düzeltme terimlerini içermektedir. Baskın etkileşim enlemsel plazmonlardan $O(T^{5/3})$ gelir [79]. Kayma viskozitesi düşük sıcaklıklarda baskındır, düzeltme terimleri kütleçekimsel dalga kaynaklı kararsızlıkların daha iyi anlaşılması için kullanılabilir [80].

Çarpışma frekanslarının boylamsal kısımlarında karşımıza çıkan Φ_i perdeleme fonksiyonu efektif Debye kütlesiyle, kütle ifadesi ise çiftlenim sabitiyle orantılıdır Denklem 4.47. Şekil 6.1'den anlaşılacağı üzere çarpışma frekansları küçük çiftlenim limitinde (elektromanyetik çiftlenim) sonlu bir değere giderken, büyük çiftlenim (kuantum renk dinamiği) değerleri için sıfıra gitmektedir ve boylamsal etkileşimler önemsizleşmektedir, bu sebeple büyük çiftlenim değerleri için kompakt yıldızlarda enlemsel etkileşimlerin daha baskın olacağı söylenebilir.



Şekil 6.1: Elektrik ve kayma viskozitesi için farklı değerlerde perdeleme fonksiyonları.

Bulduğumuz sonuçların genel yapısı kompakt yıldızlarda farklı bileşenler için karşılaştırma yapmamıza olanak tanıyıp gözlemler sayesinde bu bileşenlerle alakalı sınırlama getirmemizi sağlayabilir.

KAYNAKLAR

- [1] J. M. Lattimer and M. Prakash, “Neutron star structure and the equation of state,” *Astrophys. J.*, vol. 550, p. 426, 2001.
- [2] J. M. Lattimer and M. Prakash, “The physics of neutron stars,” *Science*, vol. 304, pp. 536–542, 2004.
- [3] J. M. Lattimer, “Neutron stars,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 46, p. 1713, 2014.
- [4] M. G. Alford, S. Han, and K. Schwenzer, “Signatures for quark matter from multi-messenger observations,” *J. Phys. G*, vol. 46, no. 11, p. 114001, 2019.
- [5] M. Alford, A. Harutyunyan, and A. Sedrakian, “Bulk viscosity of baryonic matter with trapped neutrinos,” *Phys. Rev. D*, vol. 100, no. 10, p. 103021, 2019.
- [6] A. Schmitt, *Dense matter in compact stars: A pedagogical introduction*, vol. 811. 2010.
- [7] P. Haensel, A. Y. Potekhin, and D. G. Yakovlev, *Neutron stars 1: Equation of state and structure*, vol. 326. New York, USA: Springer, 2007.
- [8] G. F. Burgio, M. Baldo, P. K. Sahu, A. B. Santra, and H. J. Schulze, “Maximum mass of neutron stars with a quark core,” *Phys. Lett. B*, vol. 526, pp. 19–26, 2002.
- [9] M. G. Alford, H. Nishimura, and A. Sedrakian, “Transport coefficients of two-flavor superconducting quark matter,” *Phys. Rev. C*, vol. 90, no. 5, p. 055205, 2014.
- [10] M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal, and T. Schäfer, “Color superconductivity in dense quark matter,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 80, pp. 1455–1515, 2008.

- [11] G. Baym, T. Hatsuda, T. Kojo, P. D. Powell, Y. Song, and T. Takatsuka, “From hadrons to quarks in neutron stars: a review,” *Rept. Prog. Phys.*, vol. 81, no. 5, p. 056902, 2018.
- [12] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black holes, white dwarfs, and neutron stars : the physics of compact objects*. 1983.
- [13] N. Chamel and P. Haensel, “Physics of Neutron Star Crusts,” *Living Rev. Rel.*, vol. 11, p. 10, 2008.
- [14] T. Schäfer, “Phase Structure and Transport Properties of Dense Quark Matter,” 1 2010.
- [15] J. Schaffner-Bielich, “Signals of the QCD Phase Transition in the Heavens,” *PoS*, vol. CPOD07, p. 062, 2007.
- [16] P. Shternin, “Transport coefficients of leptons in superconducting neutron star cores,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, no. 6, p. 063015, 2018.
- [17] A. Schmitt and P. Shternin, “Reaction rates and transport in neutron stars,” *Astrophys. Space Sci. Libr.*, vol. 457, pp. 455–574, 2018.
- [18] P. Haensel, “Transport properties of strange matter,” *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, vol. 24, no. 2, pp. 23–28, 1991.
- [19] E. Flowers and N. Itoh, “Transport properties of dense matter.,” *apj*, vol. 206, pp. 218–242, May 1976.
- [20] E. Flowers and N. Itoh, “Transport properties of dense matter. ii.,” *apj*, vol. 230, pp. 847–858, June 1979.
- [21] H. Heiselberg and C. J. Pethick, “Transport and relaxation in degenerate quark plasmas,” *Phys. Rev. D*, vol. 48, pp. 2916–2928, 1993.
- [22] H. Heiselberg, G. Baym, C. Pethick, and J. Popp, “Transport coefficients of relativistic plasmas,” *Nuclear Physics A*, vol. 544, no. 1, pp. 569–572, 1992.
- [23] H. Heiselberg, “Transport properties of quark and gluon plasmas,” in *Workshop on Pre-Equilibrium Parton Dynamics in Heavy Ion Collisions*, pp. 125–136, 1 1994.

- [24] P. S. Shternin and D. G. Yakovlev, “Electron thermal conductivity owing to collisions between degenerate electrons,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 043004, 2006.
- [25] P. S. Shternin and D. G. Yakovlev, “Electron-muon heat conduction in neutron star cores via the exchange of transverse plasmons,” *Phys. Rev. D*, vol. 75, p. 103004, 2007.
- [26] P. S. Shternin and D. G. Yakovlev, “Shear viscosity in neutron star cores,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 063006, 2008.
- [27] P. Haensel, K. P. Levenfish, and D. G. Yakovlev, “Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. I. direct urca processes in npe mu matter,” *Astron. Astrophys.*, vol. 357, pp. 1157–1169, 2000.
- [28] P. Haensel, K. P. Levenfish, and D. G. Yakovlev, “Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. 2. Modified Urca processes in npe mu matter,” *Astron. Astrophys.*, vol. 327, pp. 130–137, 2001.
- [29] D. G. Yakovlev, M. E. Gusakov, and P. Haensel, “Bulk viscosity in a neutron star mantle,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 481, no. 4, pp. 4924–4930, 2018.
- [30] J. Madsen, “Bulk viscosity of strange quark matter, damping of quark star vibration, and the maximum rotation rate of pulsars,” *Phys. Rev. D*, vol. 46, pp. 3290–3295, Oct 1992.
- [31] N. Andersson, “A New class of unstable modes of rotating relativistic stars,” *Astrophys. J.*, vol. 502, pp. 708–713, 1998.
- [32] J. L. Friedman and S. M. Morsink, “Axial instability of rotating relativistic stars,” *Astrophys. J.*, vol. 502, pp. 714–720, 1998.
- [33] B. Haskell, “R-modes in neutron stars: Theory and observations,” *Int. J. Mod. Phys. E*, vol. 24, no. 09, p. 1541007, 2015.
- [34] N. Andersson and K. D. Kokkotas, “The R mode instability in rotating neutron stars,” *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 10, pp. 381–442, 2001.

- [35] N. Andersson, D. I. Jones, K. D. Kokkotas, and N. Stergioulas, “R mode runaway and rapidly rotating neutron stars,” *Astrophys. J. Lett.*, vol. 534, p. L75, 2000.
- [36] K. Schwenzer, “How long-range interactions tune the damping in compact stars,” 12 2012.
- [37] M. G. Alford, L. Bovard, M. Hanauske, L. Rezzolla, and K. Schwenzer, “Viscous Dissipation and Heat Conduction in Binary Neutron-Star Mergers,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 120, no. 4, p. 041101, 2018.
- [38] A. I. Chugunov and D. G. Yakovlev, “Shear viscosity and oscillations of neutron star crusts,” *Astron. Rep.*, vol. 49, pp. 724–738, 2005.
- [39] C. Hoyos, N. Jokela, M. Jarvinen, J. G. Subils, J. Tarrío, and A. Vuorinen, “Transport in strongly coupled quark matter,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 125, p. 241601, 2020.
- [40] D. G. Yakovlev, A. D. Kaminker, O. Y. Gnedin, and P. Haensel, “Neutrino emission from neutron stars,” *Phys. Rept.*, vol. 354, p. 1, 2001.
- [41] J. M. Lattimer, M. Prakash, C. J. Pethick, and P. Haensel, “Direct urca process in neutron stars,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 66, pp. 2701–2704, 1991.
- [42] D. Page, U. Geppert, and F. Weber, “The Cooling of compact stars,” *Nucl. Phys. A*, vol. 777, pp. 497–530, 2006.
- [43] D. G. Yakovlev and C. J. Pethick, “Neutron star cooling,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 42, pp. 169–210, 2004.
- [44] D. Viganò, N. Rea, J. A. Pons, R. Perna, D. N. Aguilera, and J. A. Miralles, “Unifying the observational diversity of isolated neutron stars via magnetothermal evolution models,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 434, p. 123, 2013.
- [45] D. A. Baiko, P. Haensel, and D. G. Yakovlev, “Thermal conductivity of neutrons in neutron star cores,” *Astron. Astrophys.*, vol. 374, p. 151, 2001.

- [46] L. B. Leinson, “Direct Urca processes on nucleons in cooling neutron stars,” *Nucl. Phys. A*, vol. 707, pp. 543–560, 2002.
- [47] O. Y. Gnedin and D. G. Yakovlev, “Thermal conductivity of electrons and muons in neutron star cores,” *Nucl. Phys. A*, vol. 582, pp. 697–716, 1995.
- [48] I. A. Shovkovy and P. J. Ellis, “Thermal conductivity of dense quark matter and cooling of stars,” *Phys. Rev. C*, vol. 66, p. 015802, 2002.
- [49] P. S. Shternin, “Exchange of transverse plasmons and electrical conductivity of neutron star cores,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 107, Aug. 2008.
- [50] D. G. Yakovlev and D. A. Shalybkov, “Electrical conductivity of neutron star cores in the presence of a magnetic field - part one - general solution for a multicomponent fermi liquid,” *apss*, vol. 176, pp. 171–189, Feb. 1991.
- [51] P. Haensel, V. A. Urpin, and D. G. Yakovlev, “Ohmic decay of internal magnetic fields in neutron stars,” *aap*, vol. 229, pp. 133–137, Mar. 1990.
- [52] S. Sarkar and S. P. Adhya, “Quantized electrical conductivity in binary neutron star mergers,” 8 2021.
- [53] J. Madsen, “Physics and astrophysics of strange quark matter,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 516, pp. 162–203, 1999.
- [54] N. Andersson, G. L. Comer, and K. Glampedakis, “How viscous is a superfluid neutron star core?,” *Nucl. Phys. A*, vol. 763, pp. 212–229, 2005.
- [55] P. Shternin and D. Ofengeim, “Transport coefficients of magnetized neutron star cores,” *Eur. Phys. J. A*, vol. 58, no. 3, p. 42, 2022.
- [56] P. Haensel and A. J. Jerzak, “Transport in strange stars,” *Acta Physica Polonica, Series B*, vol. 20, no. 2, pp. 141–161, 1989.
- [57] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part 1*, vol. 5 of *Course of Theoretical Physics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1980.

- [58] P. S. Shternin, M. Baldo, and P. Haensel, “Transport coefficients of nuclear matter in neutron star cores,” *Phys. Rev. C*, vol. 88, no. 6, p. 065803, 2013.
- [59] G. Baym and C. J. Pethick, “Landau fermi-liquid theory,” 1991.
- [60] C. Song, “Dense nuclear matter: Landau Fermi liquid theory and chiral Lagrangian with scaling,” *Phys. Rept.*, vol. 347, pp. 289–371, 2001.
- [61] G. Rupak and T. Schäfer, “Shear viscosity of a superfluid Fermi gas in the unitarity limit,” *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 053607, 2007.
- [62] A. Harutyunyan and A. Sedrakian, “Electrical conductivity of a warm neutron star crust in magnetic fields,” *Phys. Rev. C*, vol. 94, no. 2, p. 025805, 2016.
- [63] H. A. Weldon, “Covariant Calculations at Finite Temperature: The Relativistic Plasma,” *Phys. Rev. D*, vol. 26, p. 1394, 1982.
- [64] M. L. Bellac, *Thermal Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 3 2011.
- [65] J. I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [66] M. Laine and A. Vuorinen, *Basics of Thermal Field Theory*, vol. 925. Springer, 2016.
- [67] H. A. Weldon, “Effective fermion masses of order gT in high-temperature gauge theories with exact chiral invariance,” *Physical Review D*, vol. 26, no. 10, p. 2789, 1982.
- [68] S. Stetina, E. Rrapaj, and S. Reddy, “Photons in dense nuclear matter: Random-phase approximation,” *Phys. Rev. C*, vol. 97, no. 4, p. 045801, 2018.
- [69] J. Polchinski, “Effective field theory and the Fermi surface,” in *Theoretical Advanced Study Institute (TASI 92): From Black Holes and Strings to Particles*, pp. 0235–276, 6 1992.

- [70] T. Schäfer, “Quark matter,” in *14th National Nuclear Physics Summer School*, pp. 185–233, 4 2003.
- [71] A. D. Kaminker, D. G. Yakovlev, and P. Haensel, “Theory of neutrino emission from nucleon–hyperon matter in neutron stars: angular integrals,” *Astrophys. Space Sci.*, vol. 361, no. 8, p. 267, 2016.
- [72] G. Baym, H. Monien, C. J. Pethick, and D. G. Ravenhall, “Transverse Interactions and Transport in Relativistic Quark - Gluon and Electromagnetic Plasmas,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, pp. 1867–1870, 1990.
- [73] A. Harutyunyan and A. Sedrakian, “Electrical conductivity tensor of dense plasma in magnetic fields,” *PoS*, vol. MPC2015, p. 011, 2016.
- [74] D. Page and S. Reddy, “Thermal and transport properties of the neutron star inner crust,” 1 2012.
- [75] M. Braby, J. Chao, and T. Schäfer, “Thermal conductivity of color-flavor locked quark matter,” *Phys. Rev. C*, vol. 81, p. 045205, 2010.
- [76] B. Bertoni, S. Reddy, and E. Rrapaj, “Electron-neutron scattering and transport properties of neutron stars,” *Phys. Rev. C*, vol. 91, no. 2, p. 025806, 2015.
- [77] C. Cutler and L. Lindblom, “The effect of viscosity on neutron star oscillations,” *apj*, vol. 314, p. 234, Mar. 1987.
- [78] L. Tolos and C. Manuel, “Shear viscosity in superfluid neutron stars,” *PoS*, vol. QNP2012, p. 150, 2012.
- [79] R. Nandi, S. Banik, and D. Bandyopadhyay, “Shear viscosity in antikaon condensed matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 123015, 2009.
- [80] K. D. Kokkotas and K. Schwenzer, “R-mode astronomy,” *Eur. Phys. J. A*, vol. 52, no. 2, p. 38, 2016.
- [81] M. H. Thoma, “What can we learn from electromagnetic plasmas about the quark-gluon plasma?,” *J. Phys. A*, vol. 42, p. 214004, 2009.

A Momentum ve Enerji İntegralleri

Taşıyım katsayılarını hesaplarken karşımıza çıkan integraller ve çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{e^z + 1} \frac{1}{e^{-z} + 1} &= 1, \\
 \int_{-\infty}^{\infty} dz z \frac{1}{e^z + 1} \frac{1}{e^{-z} + 1} &= 0, \\
 \int_{-\infty}^{\infty} dz z^2 \frac{1}{e^z + 1} \frac{1}{e^{-z} + 1} &= \frac{\pi^2}{3}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Ayar parçacığının momentumu ve enerjisi üzerinden alınan integraller ve çözümleri aşağıdaki gibidir. Enlemsel (transverse) durumda karşımıza çıkan momentum integralleri ve çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 \int_0^c dx_k \frac{x_k^2}{x_k^6 + 1} &\xrightarrow{c \rightarrow \infty} \frac{\pi}{6} + O\left(\left(\frac{1}{c}\right)^3\right), \\
 \int_0^c dx_k \frac{x_k^4}{x_k^6 + 1} &\xrightarrow{c \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3} - \frac{1}{c} + O\left(\left(\frac{1}{c}\right)^3\right), \\
 \int_0^c dx_k \frac{x_k^6}{x_k^6 + 1} &\xrightarrow{c \rightarrow \infty} c - \frac{\pi}{3} + O\left(\left(\frac{1}{c}\right)^2\right), \\
 \int_0^c dx_k \frac{x_k^8}{x_k^6 + 1} &\xrightarrow{c \rightarrow \infty} \frac{c^3}{3} - \frac{\pi}{6} + O\left(\left(\frac{1}{c}\right)^3\right), \\
 \int_0^c dx_k \frac{x_k^{10}}{x_k^6 + 1} &\xrightarrow{c \rightarrow \infty} \frac{c^5}{5} - \frac{\pi}{3} + O\left(\left(\frac{1}{c}\right)^3\right).
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Boylamsal (longitudinal) durumda karşımıza çıkan momentum integralleri ve çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\int dx_k \frac{1}{(x_k^2+1)^2} &= \frac{1}{2} \arctan(x_k) + \frac{x_k}{2(x_k^2+1)} \xrightarrow{x_k \gg 1} \frac{\pi}{4}, \\
\int dx_k \frac{x_k^2}{(x_k^2+1)^2} &= \frac{1}{2} \arctan(x_k) - \frac{x_k}{2(x_k^2+1)} \xrightarrow{x_k \gg 1} \frac{\pi}{4}, \\
\int dx_k \frac{x_k^4}{(x_k^2+1)^2} &= x_k - \frac{3}{2} \arctan(x_k) + \frac{x_k}{2(x_k^2+1)} \xrightarrow{x_k \gg 1} x_k, \\
\int dx_k \frac{x_k^6}{(x_k^2+1)^2} &= \frac{x_k^3}{3} - 2x_k + \frac{5}{2} \arctan(x_k) - \frac{x_k}{2(x_k^2+1)} \xrightarrow{x_k \gg 1} \frac{x_k^3}{3}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Enerji integrallerini de üst limitten gelen ve eksponansiyel olarak azalan düzeltmeleri ihmal ettiğimiz durumda analitik olarak hesaplamak mümkündür:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_x(a, b, c) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx_\omega |x_\omega|^c \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 x_1^a \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_2^b \\
&\quad \times \tilde{n}_+(x_1) \tilde{n}_+(x_2) \tilde{n}_+(x_\omega - x_1) \tilde{n}_+(-x_\omega - x_2), \\
\tilde{\mathcal{I}}_x(a, b, c) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx_\omega |x_\omega|^c \operatorname{sgn}(x_\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 x_1^a \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_2^b \\
&\quad \times \tilde{n}_+(x_1) \tilde{n}_+(x_2) \tilde{n}_+(x_\omega - x_1) \tilde{n}_+(-x_\omega - x_2).
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Özel olarak $a = b = 0$ durumunda yukarıdaki integraller Gama ve Zeta fonksiyonu cinsinden yazılabilirler:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_x(0, 0, c) &= 2\Gamma(c+3) \zeta(c+2), \\
\tilde{\mathcal{I}}_x(0, 0, c) &= 0.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

a ve b 'nin sıfır olmadığı durumlarda karşımıza çıkan integralleri yukarıdaki sonuçlar cinsinden yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_x(1, 0, c) &= -\mathcal{I}_x(0, 1, c) = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{I}}_x(0, 0, c+1) = 0, \\
\mathcal{I}_x(1, 1, c) &= -\frac{1}{4} \mathcal{I}_x(0, 0, c+2) = -\frac{1}{2} \Gamma(c+5) \zeta(c+4), \\
\mathcal{I}_x(2, 0, c) &= \mathcal{I}_x(0, 2, c) = \frac{1}{3} \left(\mathcal{I}_x(0, 0, c+2) + \pi^2 \mathcal{I}_x(0, 0, c) \right), \\
&= \frac{2}{3} \left(\Gamma(c+5) \zeta(c+4) + \pi^2 \Gamma(c+3) \zeta(c+2) \right).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Benzer şekilde mutlak değer fonksiyonuna sahip integral ifadeleri ise

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{I}}_x(1, 0, c) &= -\tilde{\mathcal{I}}_x(0, 1, c) = \frac{1}{2} \mathcal{I}_x(0, 0, c+1) = \Gamma(c+4) \zeta(c+3) \\
\tilde{\mathcal{I}}_x(1, 1, c) &= -\frac{1}{4} \tilde{\mathcal{I}}_x(0, 0, c+2) = 0 \\
\tilde{\mathcal{I}}_x(2, 0, c) &= \tilde{\mathcal{I}}_x(0, 2, c) = \frac{1}{3} \left(\tilde{\mathcal{I}}_x(0, 0, c+2) + \pi^2 \tilde{\mathcal{I}}_x(0, 0, c) \right) = 0
\end{aligned} \tag{A.7}$$

olarak hesaplanır. Boylamsal hesaplamalarda karşımıza çıkan ve mutlak değer fonksiyonu içermeyen integrallerin sonuçları ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dx_{\omega} x_{\omega}^c \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 x_1^a \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 x_2^b \tilde{n}_+(x_1) \tilde{n}_+(x_2) \\
& \times \tilde{n}_+(x_{\omega} - x_1) \tilde{n}_+(-x_{\omega} - x_2) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{I}}_x(a, b, c) & c \in \mathbb{Z}, \text{ tek} \\ \mathcal{I}_x(a, b, c) & c \in \mathbb{Z}, \text{ çift.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

B Enine ve Boyuna Modlar

Dispersiyon ilişkisinin farklı momentum limitlerindeki davranışlarını incelerken bu fonksiyonun limit durumlarına bakacağız [81]. Ortam etkileri hesaba katıldığında foton propagatörünü enine ve boyuna olarak iki kısma ayırmak mümkündür. Bu ayrışım sayesinde yoğun ortam içinde hangi modun nasıl davrandığını anlayabiliriz. Propagatörün tekil noktalarını inceleyip farklı momentum değerlerindeki limitlere bakabiliriz:

$$D_{\mu\nu} = \frac{P_{\mu\nu,\parallel}}{k^2 - \omega^2 - \Pi_{\parallel}} + \frac{P_{\mu\nu,\perp}}{k^2 - \omega^2 - \Pi_{\perp}}. \quad (\text{B.1})$$

İlk olarak boyuna modları inceleyelim. Denklem B.1 ifadesinin boyuna kısmındaki tekil noktalara bakalım:

$$\omega^2 - k^2 + m_D^2 \frac{\omega^2 - k^2}{k^2} \left[1 - \frac{\omega}{k} Q_0\left(\frac{\omega}{k}\right) \right] = 0. \quad (\text{B.2})$$

Bu dispersiyon ilişkisinin çözümleri bize modlar hakkında bilgi verecektir. Farklı momentum limitlerinde bu denklemin çözümüne bakmak istiyoruz. Büyük momentum değerleri için Legendre fonksiyonu Q_0 'nun limit durumlarına bakabiliriz. $\omega_L = \omega \approx k \gg \omega_P$ için Legendre fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$Q_0\left(\frac{\omega}{k}\right) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{2k}{\omega_L - k} \gg 1. \quad (\text{B.3})$$

Bu yaklaşıklık altında Denklem B.2 ifadesi

$$1 - \frac{m_D^2}{2k^2} \ln \frac{2k}{\omega_L - k} = 0 \quad (\text{B.4})$$

halini alır. Büyük momentum değerleri için bu ifadenin çözümünü aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$\omega_L = k \left(1 + 2e^{-k^2/m^2} \right). \quad (\text{B.5})$$

Küçük momentum değerleri için, $x = \omega/k \gg 1$, Legendre fonksiyonunun seri açılımını yapabiliriz:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \quad (\text{B.6})$$

Bu ifadeyi Denklem B.2'de yerine koyup küçük momentum limitinde boyuna modlar'ın nasıl davrandığını belirleyebiliriz. Plazma frekansı cinsinden dispersiyon denklemini yeniden yazarsak, $\omega_P = \sqrt{\frac{2}{3}}m = \frac{1}{3}eT$, 4. dereceden bir polinom denklemi elde ederiz. Bu ifadenin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\omega_L^2 = \omega_P^2 + \frac{3}{5}k^2 \quad (\text{B.7})$$

Enine uyarılmış modlar için benzer şekilde dispersiyon ilişkisini çözmeye çalışabiliriz:

$$\omega^2 - k^2 - m_L^2 \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 - m_L^2 \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 Q_0\left(\frac{\omega}{k}\right)\right] = 0. \quad (\text{B.8})$$

Boyutsuz değişken $x = \omega/k = \omega_T/k$ yardımıyla enine modlar için bu denklemi daha basit halde yazmak mümkündür:

$$(x^2 - 1) - \frac{m_L^2}{k^2} \left[x^2 + \frac{x(1-x^2)}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \right] = 0. \quad (\text{B.9})$$

Büyük momentum limitinde yani uyarılmış enerjiler momentum mertebesinde olduğu limitte $x \approx 1$ gibidir. Öncelikle parantez içindeki logaritma teriminin limit durumuna bakalım:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1-x^2)}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1-x)(1+x)}{2} (\ln(x+1) - \ln(x-1)) \Rightarrow 0. \quad (\text{B.10})$$

Logaritma bu limitte sıfıra giderken diğer terim bir mertebesinde. Bu durumda elimizde aşağıdaki denklem kalır:

$$x^2 - 1 - \frac{m_L^2}{k^2} = 0 \quad \Rightarrow \omega_T^2 = k^2 + m_L^2. \quad (\text{B.11})$$

Küçük momentum limitinde Denklem B.8'deki parantez içine bakalım:

$$x^2 + \frac{x(1-x^2)}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{15x^2}. \quad (\text{B.12})$$

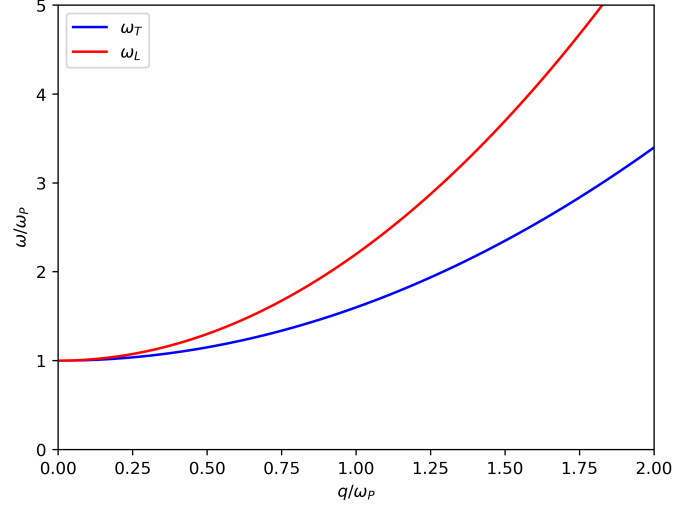
Bu ifadeyi Denklem B.9'de yerine koyup momentum değişkenleri ve plazma modları cinsinden yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\omega_T^4 - (\omega_P^2 + k^2)\omega_T^2 - \frac{1}{5}\omega_P^2 k^2 = 0. \quad (\text{B.13})$$

Bu polinom ifadesinin çözümü bize enine modların küçük momentum limitinde nasıl değiştiğini gösteren ifadeyi verir:

$$\omega_L^2 = \omega_P^2 + \frac{6}{5}k^2. \quad (\text{B.14})$$

Küçük momentum limitindeki boyuna (longitudinal) ve enine (transverse) foton modları için dispersiyon eğrileri Şekil B.1'de gösterilmiştir. Büyük momentum limitinde elde ettiğimiz ifadeler farklı karakterlere sahipken, küçük momentum limitinde, $\omega_L(k \rightarrow 0) = \omega_T(k \rightarrow 0) = \omega_P$, enine ve boyuna modlar ayırtedilemez durumdadır Bakınız Şekil B.1 [64]:



Şekil B.1: Foton dispersiyon ilişkisi için enlemsel ve boylamsal modlar.

C Polinom İfadeleri

Matris elemanının karesiyle polinom ifadelerini çarpımını açılmal ortalama olarak yazmak mümkündür:

$$\begin{aligned}
 \langle |M_{st}|^2 P_q \rangle &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |M|^2 P_j d\phi & (C.1) \\
 &= M_0 P_{j_0} + (M_0 P_{j_1} + M_1 P_{j_0}) \cos\theta_1 \cos\theta_2 + (M_2 P_{j_0} + M_0 P_{j_2} + M_1 P_{j_1}) \cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 \\
 &\quad + (M_1 P_{j_2} + M_2 P_{j_1}) \cos^3\theta_1 \cos^3\theta_2 + M_2 P_{j_2} \cos^4\theta_1 \cos^4\theta_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(M_2 P_{j_0} + M_0 P_{j_2} + M_1 P_{j_1} + 3 (M_1 P_{j_2} + M_2 P_{j_1}) \cos\theta_1 \cos\theta_2 \right. \\
 &\quad \quad \left. + 6 M_2 P_{j_2} \cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \right) \\
 &\quad + \frac{3}{8} M_2 P_{j_2} \sin^4\theta_1 \sin^4\theta_2.
 \end{aligned}$$

Bu ifadeyi polinomların derecelerine göre faktörize ederek yazabiliriz. Bazı durumlarda polinom ifadelerinin katsayıları sıfır olacağı için hesaplamaya açısından kolaylık sağlar:

$$\begin{aligned}
 \langle |M_{st}|^2 P_q \rangle &= \left(M_0 + M_1 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + M_2 \left(\cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 + \frac{1}{2} \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \right) \right) P_{j_0} \\
 &\quad + \left(M_0 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + M_1 \left(\cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 + \frac{1}{2} \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. + M_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \left(\cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 + \frac{3}{2} \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \right) \right) P_{j_1} \\
 &\quad + \left(M_0 \left(\cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 + \frac{1}{2} \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. + M_1 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \left(\cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 + \frac{3}{2} \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. + M_2 \left(\cos^4\theta_1 \cos^4\theta_2 + 3 \cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 + \frac{3}{8} \sin^4\theta_1 \sin^4\theta_2 \right) \right) P_{j_2}.
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Matris elemanının karesini boylamsal, enlemsel ve karışık durum için ayırıp bileşenleri $\cos \theta_{12}$ açısına bağılıklarına göre ayırıp yazabiliriz:

$$\mathcal{M}_{\parallel 0} = 8\mathcal{C} \left((\epsilon_1 (\epsilon_1 + \omega) (\epsilon_2^2 - p_2 k \cos \theta_2) + \epsilon_2 (\epsilon_2 - \omega) (\epsilon_1^2 + p_1 k \cos \theta_1)) \right) \quad (\text{C.3})$$

$$\mathcal{M}_{\parallel 1} = 0 \quad , \quad \mathcal{M}_{\parallel 2} = 0,$$

$$\mathcal{M}_{\parallel \perp 0} = 4\mathcal{C} \left(2\epsilon_1 \epsilon_2 k (p_2 \cos \theta_2 - p_1 \cos \theta_1) - \epsilon_1 \epsilon_2 k^2 - \omega k (\epsilon_1 p_2 \cos \theta_2 + \epsilon_2 p_1 \cos \theta_1) \right)$$

$$\mathcal{M}_{\parallel \perp 1} = 4\mathcal{C} p_1 p_2 (4\epsilon_1 \epsilon_2 + 2(\epsilon_2 - \epsilon_1)\omega - \omega^2) \quad , \quad \mathcal{M}_{\parallel \perp 2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\perp 0} &= 8\mathcal{C} \left(-p_1 p_2 k^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + (p_1^2 + p_1 k \cos \theta_1) (\epsilon_2 \omega - p_2 k \cos \theta_2) \right. \\ &\quad \left. - (p_2^2 - p_2 k \cos \theta_2) (\epsilon_1 \omega - p_1 k \cos \theta_1) \right), \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_{\perp 1} = 8\mathcal{C} \left(2(p_2 \cos \theta_2 - p_1 \cos \theta_1) k p_1 p_2 - k^2 p_1 p_2 \right) \quad , \quad \mathcal{M}_{\perp 2} = 16\mathcal{C} p_1^2 p_2^2.$$

Elektriksel iletkenlik hesaplamaları için kullandığımız polinom ifadesi bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibidir:

$$P_\sigma \equiv w_1^2 - \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_3 = w_1^2 - w_1 w_3 \frac{p_1^2 + p_1 k \cos \theta_1}{p_1 p_3}, \quad (\text{C.4})$$

$$P'_\sigma \equiv \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 - \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_4 = w_1 w_2 \cos \theta_{12} - w_1 w_4 \frac{p_1 p_2 \cos \theta_{12} - p_1 k \cos \theta_1}{p_1 p_4}.$$

Açısal ifadelerin değerlerini yerine yazıp, sıcaklık parametresine göre seri açılımı yaparak birinci mertebeden gelen ifadeleri $\cos \theta_{12}$ katsayısına göre faktörize ettiğimizde saçılma etkileşimleri için aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$P_{\sigma 0} = \frac{w_1^2 k^2}{2p_{\text{Fs}}^2} + \left(\frac{w_1 k^2}{2p_{\text{Fs}}^3} - a_1 \left(1 - \frac{k^2}{2p_{\text{Fs}}^2} \right) \right) x_\omega T + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right) \quad (\text{C.5})$$

$$P_{\sigma 1} = P_{\sigma 2} = 0,$$

$$P'_{\sigma 0} = -\frac{w_1 w_2 k^2}{2p_{\text{Fs}} p_{\text{Ft}}} + \frac{w_2}{p_{\text{Ft}}} x_\omega T + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right),$$

$$P'_{\sigma 1} = -\frac{w_1}{p_{\text{Ft}}} \left(1 - \frac{a_2 p_{\text{Ft}}}{w_2} \right) x_\omega T + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right),$$

$$P'_{\sigma 2} = 0.$$

Benzer şekilde ısı iletkenlik hesaplamaları için kullandığımız polinom ifadesi bileşenler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P_\kappa \equiv -(\epsilon_1 - \mu_1) \left((\epsilon_1 - \mu_1) w_1^2 - (\epsilon_3 - \mu_3) \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_3 \right) \quad (\text{C.6})$$

$$= -(\epsilon_1 - \mu_1) \left((\epsilon_1 - \mu_1) w_1^2 - (\epsilon_3 - \mu_3) w_1 w_3 \frac{p_1^2 + p_1 k \cos \theta_1}{p_1 p_3} \right),$$

$$P'_\kappa \equiv -(\epsilon_1 - \mu_1) \left((\epsilon_2 - \mu_2) \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 - (\epsilon_4 - \mu_4) \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_4 \right)$$

$$= -(\epsilon_1 - \mu_1) \left((\epsilon_2 - \mu_2) w_1 w_2 \cos \theta_{12} - (\epsilon_4 - \mu_4) w_1 w_4 \frac{p_1 p_2 \cos \theta_{12} - p_1 k \cos \theta_1}{p_1 p_4} \right).$$

Enerji terimlerini $x_{1/2} = \frac{\epsilon_{1/2} - \mu_{1/2}}{T}$ dönüşümünü kullanarak boyutsuz hale getirip, düşük sıcaklık limitinde seri açılımı yaptığımızda ilk mertebeden gelen terimleri elde edebiliriz. Açısal ifadeler yerine yazılıp katsayılara göre faktörize edildiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned}
P_{\kappa 0} &= x_1 x_\omega T^2 w_1^2 - x_1 (x_1 + x_\omega) T^2 w_1^2 \frac{k^2}{2p_{\text{Fs}}^2} + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right), \\
P_{\kappa 1} &= P_{\kappa 2} = 0, \\
P'_{\kappa 0} &= x_1 (x_2 - x_\omega) \frac{w_2}{p_{\text{Ft}}} \left(\frac{w_1 k^2}{2p_{\text{Fs}}} - x_\omega T \right) T^2 + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right), \\
P'_{\kappa 1} &= -x_1 x_\omega w_1 w_2 T^2 + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right) \\
P'_{\kappa 2} &= 0.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Kayma viskozitesi hesaplamaları için kullandığımız polinom ifadesini bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
P_\eta &= \frac{2}{3} w_1^2 p_1^2 - \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_3 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 + \frac{1}{3} \vec{w}_1 \cdot \vec{p}_1 \vec{w}_3 \cdot \vec{p}_3 \\
&= \frac{2}{3} w_1^2 p_1^2 - w_1 w_3 \frac{(p_1^2 + p_1 k \cos \theta_1)^2}{p_1 p_3} + \frac{1}{3} w_1 w_3 p_1 p_3, \\
P'_\eta &= \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - \frac{1}{3} \vec{w}_1 \cdot \vec{p}_1 \vec{w}_2 \cdot \vec{p}_2 - \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_4 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4 + \frac{1}{3} \vec{w}_1 \cdot \vec{p}_1 \vec{w}_4 \cdot \vec{p}_4 \\
&= w_1 w_2 \frac{(p_1 p_2 \cos \theta_{12})^2}{p_1 p_2} - \frac{w_1 p_1}{3} (w_2 p_2 - w_4 p_4) - w_1 w_4 \frac{(p_1 p_2 \cos \theta_{12} - p_1 k \cos \theta_1)^2}{p_1 p_4}.
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Sıcaklık parametresine göre seri açılımı yapıp ilk mertebeden terimleri hesaba katarak açısal eşitlikleri kullanırsak kayma viskozitesi polinomu için bileşenleri aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}
P_{\eta 0} &= w_1^2 \left(k^2 - \frac{k^4}{4p_{\text{Fs}}^2} \right) - \frac{2p_{\text{Fs}} w_1}{3} \left(1 + \frac{a_1 p_{\text{Fs}}}{w_1} \right) x_\omega T + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right), \\
P_{\eta 1} &= P_{\eta 2} = 0, \\
P'_{\eta 0} &= -\frac{w_1 w_2 k^4}{4p_{\text{Fs}} p_{\text{Ft}}} - w_1 \left(\frac{p_{\text{Fs}}}{3} \left(1 + \frac{a_2 p_{\text{Ft}}}{w_2} \right) - \frac{w_2 k^2}{w_1 p_{\text{Ft}}} \right) x_\omega T + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right), \\
P'_{\eta 1} &= -w_1 w_2 k^2 + 2w_2 p_{\text{Fs}} x_\omega T + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right), \\
P'_{\eta 2} &= -w_1 p_{\text{Fs}} \left(1 - \frac{a_2 p_{\text{Ft}}}{w_2} \right) x_\omega T + O\left(\frac{T}{p_{\text{F}}}\right).
\end{aligned} \tag{C.9}$$