MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIE VE NOETHER SİMETRİLERİ İLE ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan: Sevgi KOÇ

Ana Bilim Dalı: MATEMATİK

Programı: MATEMATİK YÜKSEK LİSANS

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Müge MEYVACI
İkinci Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Ahmet BAKKALOĞLU

İSTANBUL EYLÜL 2023

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIE VE NOETHER SİMETRİLERİ İLE ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sevgi KOÇ

Matematik Ana Bilim Dalı

Matematik Yüksek Lisans Programı

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Müge MEYVACI
İkinci Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Ahmet BAKKALOĞLU

EYLÜL 2023

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ücret karşılığı başka kişilere yazdırmadığımı (dikte etme dışında), uygulamalarımı yaptırmadığımı,
- bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

LIE VE NOETHER SİMETRİLERİ İLE ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

ÖZET

Bu tezde Lie ve Noether simetrileri ile adi diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerinde durulmuştur. Diferansiyel denklemler birçok teknolojik problemin yanı sıra doğanın temel yasalarının çoğunun formüle edilmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bazen denklemlerin analitik çözümünü elde etmek için geleneksel ve probleme özgü metotlar kullanıldığında denklemleri integre etmek mümkündür. Çoğu zaman bu denklemleri integre etmek mümkün değildir. Literatürde dört yüzden fazla integrallenebilir adi diferansiyel denklem bulunur ve bunların her biri kendilerine özgü çözüm yöntemlerine sahiptir. Lie grup analizi, tüm bu adi diferansiyel denklemleri dört farklı tipe indirgeyerek, çok daha genel bir çözüm yöntemi sağlamakta ve dolayısıyla Lie teorisi diferansiyel denklemlerin çözümünün elde edilmesinde çok önemli bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Diferansiyel denklemlerin analizinde önemli rol oynayan bir diğer araç ise Noether simetri yöntemidir. Bu yöntem için birinci ve ikinci mertebeden Lagrangianlara karşılık gelen Noether teoremi ve ilk integraller verilmiştir. İlk integralleri elde etmek için diferansiyel denklemlerin simetrileri kullanılmaktadır. Bu tezde birinci ve ikinci mertebeden Lagrangianlara karşılık gelen ilk integralleri elde etmek için Noether teoremi kullanılmıştır. Noether, diferansiyel denklemler için varyasyon ilkesinden elde edilen, her simetri üretecine karşılık gelen bir ilk integralin bulunduğunu kanıtlamıştır. Bu simetrilere Noether simetri üreteci adı verilir ve eğer Noether simetri üreteci mevcut ise Noether teoremi her simetri üretecine karşılık gelen ilk integralleri kolaylıkla sağlamaktadır. Lie teorisi ve Noether teoremi, bir sistemin simetrilerini belirlemeyi ve ardından sabitlerinin karşılık gelen değişmezlerini bulmayı içermektedir. Lie teorisi söz konusu olduğunda diferansiyel denklem değişmez bırakılırken, Noether teoremi Eylem İntegralini değişmez bırakmaktadır. Bunların elde edilmesi diferansiyel denklemlerin mertebesinde indirgeme sağlamasından dolayı denklemleri çözmek için kolaylık sağlamaktadır. Buna dayanarak, tez kapsamında Lie ve Noether simetri yöntemleri ile Emden-Fowler denklemi ve adi diferansiyel denklemlerin analizleri yapılmıştır ve elde edilenlerin verilen denklemin çözümünü elde etmek için nasıl kullanılabileceği açıklayıcı bir şekilde çeşitli örnekler üzerinde gösterilmiştir. Böylece kendine özgü yapısı sebebiyle bilinen yöntemlerle çözülemeyen bazı lineer olmayan denklemler için Lie ve Noether simetri yöntemleri ile çözümün nasıl getirilebileceği tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Adi diferansiyel denklemler, Değişmezlik, İlk integral, Lagrangian, Lie simetrileri, Noether simetrileri.

SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH LIE AND NOETHER SYMMETRIES

ABSTRACT

In this thesis, Lie and Noether symmetries and solutions of ordinary differential equations are focused on. Differential equations are widely used in formulating many technological problems as well as many of the fundamental laws of nature. Sometimes it is possible to integrate equations when traditional and problem-specific methods are used to obtain the analytical solution of the equations. Most of the time it is not possible to integrate these equations. There are more than four hundred integrable ordinary differential equations in the literature, and each of them has its own unique solution methods. Lie group analysis provides a much more general solution method by reducing all these ordinary differential equations to four different types, and therefore Lie theory appears as a very important tool in obtaining the solution of differential equations. Another tool that plays an important role in the analysis of differential equations is the Noether symmetry method. For this method, Noether's theorem and first integrals corresponding to first and second order Lagrangians are given. The symmetries of the differential equations are used to obtain the first integrals. In this thesis, Noether's theorem is used to obtain the first integrals corresponding to first and second order Lagrangians. Noether proved that for differential equations there is a first integral corresponding to every symmetry generator, obtained from the variation principle. These symmetries are called Noether symmetry generators, and if a Noether symmetry generator exists, Noether's theorem easily provides the first integrals corresponding to each symmetry generator. Lie theory and Noether's theorem involve determining the symmetries of a system and then finding the corresponding invariants of its constants. While the differential equation is left invariant in the case of Lie theory, Noether's theorem leaves the Action Integral invariant. Obtaining these makes it easier to solve the equations because it reduces the order of differential equations. Based on this, within the scope of the thesis, Lie and Noether symmetry methods were analyzed with the Emden-Fowler equation and ordinary differential equations, and how the obtained data can be used to obtain the solution of the given equation is shown in an explanatory manner on various examples. Thus, it is discussed how to find solutions using Lie and Noether symmetry methods for some nonlinear equations that cannot be solved by known methods due to their unique structure.

Keywords: Ordinary differential equations, Invariability, First integral, Lagrangian, Lie symmetries, Noether symmetries.

ÖNSÖZ

Öncelikle söze; Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi'ndeki çalışmalarım sırasında her konuda bana gösterdikleri sabır ve desteklerinden dolayı, değerli Doç. Dr. Müge MEYVACI ve Dr. Öğr. Üyesi Ahmet BAKKALOĞLU hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarak başlamak isterim.

Tez jürisinde bulunmayı kabul eden Dr. Öğr. Üyesi Gülay İlona TELSİZ KAYAOĞLU ve Doç. Dr. Hale GONCE KÖÇKEN'e çok teşekkür ederim.

Başarımda katkısı bulunan beni yetiştiren Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Matematik bölümü hocalarıma sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Yüksek lisans öğrenimim boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a sonsuz teşekkür ederim.

Son olarak, bu sürecin her aşamasında hep arkamda olan manevi desteklerini her zaman hissettiğim teşekkürün az kaldığı annem Saniye KOÇ, babam Hasan KOÇ ve kardeşlerim İbrahim KOÇ, Yusuf KOÇ ve Sefa KOÇ'a sonsuz destekleri ve sabırları için teşekkür ederim.

Sevgi KOÇ

İçindekiler

TABLO LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{X}$	: Simetri üreteci
$\mathbf{X^n}$	: Simetri üretecinin n. genişlemesi
$\mathbf{G}$	: Grup
$\mathbf{GL(n, F)}$	: $\mathbb{F}$ cismi üzerinde derecesi n olan genel lineer grup
$\mathbf{SL(n, F)}$	: $\mathbb{F}$ cismi üzerinde derecesi n olan özel lineer grup
$\mathbf{O(n, F)}$	: $\mathbb{F}$ cismi üzerinde derecesi n olan ortogonal matrisler grubu
$\mathbf{SO(n, F)}$	: $\mathbb{F}$ cismi üzerinde derecesi n olan özel ortogonal matrisler grubu
$\mathbf{sl(n, F)}$	: $\mathbb{F}$ cismi üzerinde derecesi n olan izi sıfır olan Lie cebiri
$\mathbf{A}$	: Eylem integrali
$\mathbf{L}$	: Lagrangian fonksiyonu
$\mathbf{I}$	: İlk integral
$\mathbf{f}$	: Ölçü fonksiyonu

Bölüm 1

GİRİŞ

1.1 Simetri

Simetri, etki ettiği şeyi değişmez bırakan bir işlemdir. Simetri fikrinin sanat, biyoloji, kimya ve fizikte uygulamaları vardır. Simetri fikrinin evrimi, kavramı açıklamak için gerekli matematiksel araçları geliştirmede önemli bir rol oynayan iki matematikçi, Alman Felix Klein ve Norveçli Sophus Lie ile ilişkilendirilebilir. Lie grup analizi, 19. yüzyılın önde gelen matematikçilerinden Lie tarafından 1870'lerde geliştirildi (James, 2013). Lie, keyfi mertebedeki tüm adi diferansiyel denklemlerin simetri grupları açısından bir sınıflandırmasını yapmak için grup-teorik yöntemleri kullandı ve bu nedenle grup-teorik yöntemlerle integrallenebilen tüm kümeyi tanımladı. Tarihsel olarak, Lie'nin diferansiyel denklemler teorisi, daha sonra Ritt (1950) ve Kolchin (1973) tarafından geliştirilen Vessiot ve Picard'ın diferansiyel Galois teorisiyle eşleşiyordu (Goldman, 1957). Diferansiyel Galois teorisinin çağdaş bir incelemesinde Kaplansky'de bulunabilir (Kaplansky, 1957). Çeşitli teknikleri içeren sonsuz küçük dönüşümler altında diferansiyel denklemlerin değişmezliği kavramı, diferansiyel denklemlerin çözümlerini oluşturmayı mümkün kılar. Öne çıkan ve Lie'nin çalışmasıyla yakından ilişkili olan bir diğer teknik, şu anda daha çok soyut cebir alanındaki çalışmalarıyla tanınan Emmy Noether'inkidir. Noether'in çalışması matematiksel olsa da, çalışmalarının teorik fizikteki uygulamaları, onun fizikte önde gelen kadınlardan biri olarak tanınmasına yol açtı (Kass-Simon & Farnes, 1990). Noether hayatı boyunca değişmezler teorisi üzerinde çalıştı, ancak Ernst Fischer'in etkisi altında cebirsel değişmezler teorisi alanına odaklandı (Brewer & Smith, 1981). Alexandrov bir konuşmasında Noether, modern zamanların önde gelen matematikçilerinden biri olarak tanımlandı (Harausgegeben von Jacobson, 1983).

1.2 Sophus Lie(1842-1899)

James (2013) kaynağından elde edilen bilgilerle Marius Sophus, 17 Aralık 1842'de dünyaya geldi. Marius henüz çok küçükken ailesi Christiania (Bugünkü Oslo) yakınlarındaki Moss kentine taşındı. Marius'un çocukluğu da burada geçti. Daha sonra Marius, 1859'da mezun olacağı Christiania'daki Nissan's Latin-og Realskole'ye gönderildi. Notları oldukça iyi olmasına rağmen öncü grup kuramcısı Ludvig Sylow Lie'deki potansiyeli fark edememişti.

1859'da dil eğitimi almak üzere üniversiteye girdi fakat Yunancadan kalınca bilim eğitiminde karar kıldı. O zamanlar eski öğretmeni Sylow, pek fazla yerde okutulmayan bir konu olan grup kuramı üzerine ders vermeye başlamıştı. Lie de bu derse katıldı. 1865'te Lie üniversitede istediği başarıyı elde edemeden mezun oldu. 1868'de Poncelet ve Plücker'in modern geometri üzerinde yaptıkları çalışmaları keşfetmesi hayatının kilit noktası olmuştu. Plücker'in bir uzay elemanı olarak nokta yerine doğru, eğri, ya da yüzey gibi daha karmaşık yapılar düşünmesi Lie'de uyandırmıştı.

1869'da Lie, kabul alana kadar bazı sorunlar yaşadığı Det Norske Videnskops-Akademi ile ilk makalesini yayımladı. Makalede kompleks düzlemin yeni bir gösterimi aktarılıyordu. Bu makale sayesinde kazanılmış olan bursla o zamanlar gidilebilecek yerlerin başında gelen Paris ve birkaç Alman üniversitesinde çalışmalarını sürdürdü. Lie, ilk olarak Berlin'e giderek 1869-70 kışını burada geçirdi. Berlin'de Felix Klein'la tanışma fırsatı yakaladı. Kişilikleri ve olaylara bakış açısı bir hayli farklı olsada yakın arkadaş oldular. Lie, Berlin'den ayrılınca Parise geçti. Klein da bir süre sonra Paris'te Lie'ye katıldı. Fransız matematikçiler arasında asıl iletişimde oldukları diferansiyel matematikçi Gaston Darboux'ydu. Lie dönüşüm grupları üzerine çalışmaya Paris'te bulunduğu bu dönemde başlamıştı.

Fransa-Prusya Savaşı'nın çıkmasıyla Lie Norveç'e dönmek durumunda kaldı. Lie hemen sonra Universitetet i Christiania'da göreve getirildi. Böylece "Bir Geometrik Dönüşüm Sınıfı Üzerine" başlıklı tezini tamamlayabilecekti. 1871'de Lie doktora derecesini aldı. Ertesi yıl tezi uzun bir makale formatında Annales'te yayımlandı. Lie, İsveç'teki Lunds Unıversitet'e profesörlük için başvurarak burada kısa bir süre ders verdi ama onu Christiania'da tutmak isteyen bazı arkadaşları 1872'de Norveç hükümetine başvurarak kendi okulunda doçentlik almasını sağladı. Klein, Lie ile çalışması için Friedrich Engel adındaki öğrencisini dokuz aylığına Christiania'ya gönderdi.

İki yıl sonra Lie, Klein'ın Göttingen'e gitmesiyle Leipzig'deki görev yeri açılınca gelen profesörlük teklifini kabul etti. Dönüşüm grupları kuramının diferansiyel denklemler ku-

ramıyla ilişkili olduğundan artık kesinlikle emindi. 1893'te üç ciltlik *Dönüşüm Grupları Kuramı* tamamlanmıştı. Lie eserin yalnızca önsözünü yazarken diğer her şey Engel ve Lie'nin öğrencisi Georg Scheffers tarafından kaleme alınmıştı.
1889'da uykusuzluk çekmeye başlayınca sinir krizi geçirdi. Hannover yakınlarında, kendisine verilen afyon tedavisini kabul etmediği için bir psikiyatri kliniğine yattı. Ertesi yıl tekrar ders vermeye başladı fakat tamamen iyileşebilmesi iki yılı bulmuştu. Ne kadar becerileri yerine gelse de krizden sonra kişiliği bir hayli bozulmuştu. En sadık öğrencisi Engel'le araları bozulmuştu. 1892'de Klein ve Lie arasında büyük anlaşmazlık başladı. Klein yirmi yıllık Erlangen Programı'nı Lie'nin çalışmalarını ekleyerek yeniden düzenlemek istiyordu. Fakat bunun nasıl yapılacağı konusunda fikir ayrılıkları yaşandı. 1893'te Lie, artık Alman matematik çevrelerinde yüksek bir konumda olan Klein'a açıkça saldırıya geçerek Alman matematikçilerini sarsmıştı. Lie Leipzig'e giderken Christiania'daki görevinden ayrılmamış, yalnızca izin almıştı. Altı ya da sekiz yılın ardından artık geri dönmeye hazırdı. Lie'nin ruh halinin farkında olan Norveç hükümeti Lie için Universitetet i Christiania'da dönüşüm grupları kuramı üzerine özel bir kürsü oluşturdu. Bu olaylar 1894'te gerçekleşmişti ama Lie Leipzig'den dört yıl daha ayrılmadı. 1898 güzünde ders vermeye başladı fakat bir kaç ay içerisinde dersi bırakmak durumunda kaldı. Artık o zamanlarda ölümle sonuçlanan pernisiyöz anemi hastası olduğu kesindi. Sağlığı hızla bozulmaya başladı. Lie, 18 Şubat 1899'da elli yedi yaşında hayatını kaybetti.

1.3 Emmy Noether(1882-1935)

James (2013) kaynağından elde edilen bilgilerle Amalie Emmy Noether, 23 Mart 1882'de Erlangen Almanya'da dünyaya geldi. Babası Max Noether üniversitede, ünlü bir matematikçi ve Erlangen Kraliyet Üniversitesi'nde profesördü. Emmy'nin annesi Ida Amalia'nın (kızlık soyadı Kaufmann) ailesi varlıklı Köln Yahudilerindendi. Emmy de diğer çocuklar gibi yetiştirilmiş, on sekiz yaşında Kadın Eğitim ve Öğretim Enstitüsü'nde Fransızca ve İngilizce öğretmeni olana dek Belediye Kız Yüksekokulu'na devam etmişti. 1904'te kadınlara üniversiteye girme hakkı ilk tanındığında Universitat Erlangen'e kaydını yaptırdı. 1908'de daha çocukken tanıdığı ve babasının meslektaşı Paul Albert Gordan yönetimindeki "Üçlü Bikuadratik Formlar İçin Tam Değişmezler Sistemi Üzerine" başlıklı tezini vererek *summa cum laude* derecesiyle doktorasını aldı.
Cebirci Ernst Fischer'le birlikte çalışmaya başladı. Fischer onu Gordan'ın algoritmik yöntemlerinden koparak Hilbert'in geniş kuramsal tarzına doğru sürükledi. Bu deği-

şiklik, Hilbert ve Klein'ın Noether'i birlikte çalışmak için Göttingen'e davet etmelerine yol açtı. O zamanlar yeni görelilik kuramı büyük bir heyecan yaratmaktaydı. Kuramdan yapılabilecek çıkarımları ilk anlayan kişilerden biri olan Emmy Noether genel kuram açısından önemli iki yeni sonuca ulaşmıştı. Noether 1919'da gerçekleştirilen reformlardan sonra ancak otuz yedi yaşında *privatdozent* olabilmişti. Noether üç yıl sonra resmi bir niteliği olmayan onursal doçentliğe getirildi.

Tarzındaki değişim, değişmeli olmayan alanlar (dördeyler gibi) üzerine yaptığı 1920 tarihli makalesiyle başlamıştır. Noether cebir üzerine yepyeni ve çığır açan bir düşünme tarzı oluşturmuştu. Bu tarz daha sonra eski öğrencilerinden van der Waerden'in modern cebir üzerine yazdığı ünlü ders kitabında düzenlenecekti. Noether'in ideal kuramına ilişkin, Noether halkaları kavramının ortaya çıktığı 1921 tarihli devrim niteliğindeki makalesi tartışmasız en iyi çalışmasıdır.

Georg-August'ta nihayet doçentliğe getirilmişti. Fakat Noether en yüksek mertebe olan profesörlüğü hiç elde edemedi. Ellinci yaş gününde Noether ailesi olarak adlandırılan cebirciler grubu onun onuruna bir kutlama düzenledi.

Yalnızca bir yıl sonra Naziler iktidarı elde ettiğinde ilk icraatlerinden biri üniversite hocaları da dahil olacak biçimde "Ari ırktan olmayan" tüm devlet memurlarını bazı istisnai durumlar dışında görevlerinden almaktı. Georg-August matematik bölümünün çoğu hocası Yahudiydi. Bundan sonra üniversitede ders vermeleri ve hatta bölüme girmeleri yasaklanmıştı. Emmy Noether bir süre öğrencileri ile meslektaşlarıyla gayri resmi olarak ne yapılması gerektiğini karar vermeye çalıştılar. Noether, yandaşı bir grubun bulunduğu Moskova'ya gitmeyi düşünse de Aleksandrov üniversite makamlarını hızlı davranma konusunda ikna edemedi. 1933 sona ermeden Noether Bryn Mawr College'da elde ettiği geçici bir görevle Amerika'ya gitti. İlk başta Noether'i Oxford'a davet etme düşüncesi olsa da en sonunda The Rockefeller Foundation'ca desteklenen Bryan Mawr 1933-34 dönemi için Noether'e görev teklif eden kurum olmuştu. Normalde The Rockefeller Foundation bağışları, yalnızca kalıcı bir görev verilmesinin kesin olduğu durumlarda kullanılabiliyordu. Noether lisans eğitimiyle ilgilenmediğinden Bryan Mawr'ın böylesi bir teklifte bulunma ihtimali yoktu. Ne var ki, Noether'in Birkhoff, Lefschetz ve Wiener gibi destekçileri koleji görev süresinin uzatılması konusunda ikna etmeye başardı.

Bryn Mawr'da ikinci yılının sonlarına doğru ise rahmindeki tümörü aldırmak için hastaneye yattı. Riskli olmasına karşın ameliyat başarılı geçti. Noether hastaneden çıkmadan baş gösteren yüksek ateş nedeniyle 14 Nisan 1935'te elli üç yaşındayken hayatını kaybetti. Ölüm sebebi muhtemelen ameliyat sonrasında oluşan emboli ya da enfeksiyondu.

Bölüm 2

GENEL BİLGİLER

Bu bölüm, Lie yaklaşımının bazı yönlerini açıklık getirmek için basit gösterimlerle diferansiyel denklemlere uygulanan genişletilmiş grupların klasik Lie teorisinin bazı temel fikirlerini içerir. Genişletilmiş grupların Lie teorisi, diferansiyel denklemleri verimli bir şekilde çözmek için kullanılan grup teorik araçlarından biridir (Bluman & Kumei, 1989). Bir diferansiyel denklemin simetri grubu bulunduğunda birçok amaç için kullanılabilir (Govinder & Leach, 1996). Simetri grubu, simetri azaltmayı gerçekleştirmek yani mertebeli diferansiyel denklemlerde mertebesini veya kısmi bir diferansiyel denklemdeki değişken sayısını azaltmak için kullanılabilir (Bluman & Kumei, 1989).

2.1 Dönüşüm Grupları

Grup: G boş olmayan bir küme ve ϕ, G de bir işlem olsun.

(i) **Kapalılık özelliği:** G'nin herhangi bir x ve y elemanları için $\phi(x, y)$, G'nin bir elemanıdır.

(ii) **Birleşme özelliği:** G'nin herhangi bir x, y ve z elemanları için

$$\phi(x, \phi(y, z)) = \phi(\phi(x, y), z).$$

(iii) **Birim eleman özelliği:** G'nin tek bir birim elemanı vardır. Öyle ki, G'nin herhangi bir x elemanı için

$$\phi(x, I) = \phi(I, x) = x.$$

(iv) **Ters eleman özelliği:** G'nin herhangi bir x elemanı için, G'de tek bir ters x^{-1} elemanı vardır, öyle ki

$$\phi(x, x^{-1}) = \phi(x^{-1}, x) = I.$$

aksiyomları sağlanırsa G'ye **grup** denir (Bluman & Kumei, 1989).

Alt grup: G'nin bir alt grubu, aynı ϕ işlemine sahip ve G'nin bir alt kümesi ise **alt grup** olarak tanımlanır.

Değişmeli grup: G'deki tüm x ve y elemanları için $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ ise, G grubuna **değişmeli grup** denir.

Dönüşüm grupları: S'de ε ve δ parametrelerinin birleşim yasasını tanımlayan $\phi(\varepsilon, \delta)$ ile $S \subset \mathbb{R}$ kümesinde yatan ε parametresine bağlı olarak, $D \subset \mathbb{R}^n$ alanındaki her x için tanımlanan

$$\overline{x} = X(x; \varepsilon)$$

dönüşüm kümesi, eğer D üzerinde bir dönüşümler grubu oluşturursa aşağıdaki

(i) S'deki ε parametreleri için dönüşümler D'ye birebirdir. Özellikle $\overline{x}$, D'de bulunur.

(ii) ϕ bileşim yasası ile S, bir G grubu oluşturur.

(iii) $\overline{x} = x$ iken $\varepsilon = I$, yani

$$X(x; I) = x.$$

(iv) Eğer $\overline{x} = X(x; \varepsilon)$ ve $\overline{x} = X(\overline{x}; \delta)$

$$\overline{x} = X(x; \phi(\varepsilon, \delta)).$$

aksiyomlar sağlanır.

Bir parametreli Lie dönüşüm grubu: Bir parametreli bir Lie dönüşüm grubu, aşağıdaki ek koşulları karşılayan bir dönüşüm grubudur:

(i) ε sürekli bir parametredir, yani S, $\mathbb{R}$'de bir aralıktır. Genellik kaybı olmadan $\varepsilon = 0$, birim eleman I 'ya karşılık gelir.

(ii) X, D'deki x'e göre her mertebeden sürekli türevlere sahip ve S'deki ε'nun analitik fonksiyonudur.

(iii) $\varepsilon \in S$ ve $\delta \in S$ olmak üzere $\phi(\varepsilon, \delta)$, ε ve δ un analitik bir fonksiyonudur.

Tüm tekil olmayan karmaşık $n \times n$ matrislerden oluşan grup, karmaşık genel doğrusal grup $GL(n,\mathbb{C})$ olarak adlandırılır ve gerçek genel doğrusal grup $GL(n,\mathbb{R})$, tüm tekil olmayan gerçek $n \times n$ matrisleri içerir. $GL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{C})$'nin bir alt grubudur. Karmaşık özel lineer grup $SL(n,\mathbb{C})$, determinantı bir olan matrislerden oluşan $GL(n,\mathbb{C})$'nin alt grubudur. Gerçek özel lineer grup $SL(n,\mathbb{R})$, karmaşık özel lineer grup $SL(n,\mathbb{C})$ ile gerçek genel doğrusal grup $GL(n,\mathbb{R})$ kesişimiyle verilen, yani

$$SL(n,\mathbb{R}) = SL(n,\mathbb{C}) \cap GL(n,\mathbb{R}),$$

gerçek özel lineer gruptur.

Rotasyon grubu: Döndürme grubu $SO(n,\mathbb{R})$, ortogonal matrisler $O(n,\mathbb{R})$ grubu ile karmaşık özel lineer grup kesişimiyle verilen, yani

$$SO(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R}) \cap SL(n,\mathbb{C}),$$

özel veya uygun gerçek ortogonal gruptur.

Lie cebiri:

$$[x,y] = xy - yx$$

formülüyle x ve y operatörlerinin bir Lie komütatörü $[x,y]$'sini tanımlarız. Bir komütatörün tanımlandığı bir V vektör uzayı

(i) Bilineerdir. Yani

$$[x, k_1 y + k_2 z] = k_1[x,y] + k_2[x,z] \quad , \quad [k_1 y + k_2 z, x] = k_1[y,x] + k_2[z,x].$$

(ii) Ters simetriktir. Yani

$$[x,y] = -[y,x].$$

(iii) Jacobi eşitliği

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \text{ sağlanır.}$$

Bu durumda V'deki tüm x, y ve z vektörleri için bir **Lie cebiri** denir.

Değişmeli cebir: $\forall\ x, y \in V$ için $[x,y] = 0$ ise bir Lie cebiri V'ye **değişmeli cebir** denir (Yaglom, 1988).

Çözülebilir cebir: Bir Lie cebiri V, eğer türetilmiş

$$\begin{aligned} V &\supseteq V' = [V, V] \\ &\supseteq V'' = [V', V'] \\ &\supseteq \cdots \\ &\supseteq V^k = [V^{k-1}, V^{k-1}] \end{aligned}$$

serisi $V^k = 0, k > 0$'yi sağlayacak şekildeyse **çözülebilir cebir** olarak adlandırılır. Her değişmeli cebir ve iki boyutlu Lie cebiri çözülebilirdir.

Açıklama: Bir Lie cebiri genellikle gerçek ve karmaşık cisimler üzerinde tanımlanır. x ve y operatörlerini kabul eden bir diferansiyel denklem aynı zamanda komütatörlerini $[x, y]$ de kabul eder. Sürekli bir Lie grubuna karşılık gelen bir Lie cebiri atanabilir. Örneğin gerçek özel lineer grup $SL(n, \mathbb{R})$ karşılık gelen Lie cebiri $sl(n, \mathbb{R})$ grubudur.

2.2 Lie Analizi Algoritması

Bu bölüm, diferansiyel denklemlerin Lie analizini vermektedir.

Diferansiyel operatör

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.2.1}$$

eğer

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{2.2.2}$$

eşitliğini sağlar ise $f = f(x, y)$ fonksiyonunun bir simetrisidir. Burada ξ ve η, sadece x ve y değişkenlerinin sonsuz küçük dönüşümleridir. Birleşmeli Lagrange sistemi

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)}, \tag{2.2.3}$$

ξ ve η fonksiyonlarını belirlemek için kullanılır. Bu da belirli bir dönüşüm altında fonksiyon değişmezinin belirlenmesini içerir. Sonsuz küçük dönüşüm

$$\overline{x} = x + \varepsilon\xi(x, y) \quad , \quad \overline{y} = y + \varepsilon\eta(x, y) \tag{2.2.4}$$

altında birinci ve ikinci türevler

$$\overline{y}' = y' + \varepsilon(\eta' - y'\xi'),$$

$$\overline{y}'' = y'' + \varepsilon(\eta'' - 2y''\xi' - y'\xi''),$$

şekildedir ve burada ε birinci mertebedendir (Bluman & Kumei, 1989). Bir diferansiyel denklem

$$E(x, y, y', \ldots, y^n) = 0, \tag{2.2.5}$$

X'in n'inci genişlemesi altında değişmez kalması durumunda (2.2.1) simetrisini kabul etmektedir, yani

$$X^{[n]}E|_{E=0} = 0, \tag{2.2.6}$$

denklemi sağlanmalıdır.

Bir diferansiyel denklemin simetri grubunu, söz konusu denklemin her çözümünü aynı denklemin bir çözümüne eşleyen bir dönüşüm grubu olarak tanımlayabiliriz (Ibragimov, 1994). Bir diferansiyel denklem sisteminin simetri grubu belirlendikten sonra, bilinenler sisteme yeni çözümler oluşturmak için kullanılabilir. Dolayısıyla simetri grubu, farklı simetri çözüm sınıflarının sınıflandırılmasında kullanılabilir. Çeşitli süreçlerden ve modellerden kaynaklanan diferansiyel denklemler için simetri ve değişmezlerin aranmasında kuşkusuz değişmezlik kavramı önemli bir rol oynamaktadır. Hem Lie teorisi hem de Noether teoremi, bir sistemin simetrilerini belirlemeyi ve ardından sabitlerinin karşılık gelen değişmezlerini bulmayı içermektedir. Lie teorisi söz konusu olduğunda diferansiyel denklem değişmez bırakılırken, Noether teoremi Eylem İntegralini değişmez bırakmaktadır. Böylelikle diferansiyel denklemin çözümünü elde edebilmeyi mümkün kılmaktadır.

n. mertebeden bir adi diferansiyel denklem

$$E(x, y, y', \ldots, y^n) = 0, \tag{2.2.7}$$

bir parametreli Lie gruplarının nokta dönüşümleri

$$\overline{x} = x + \varepsilon\xi, \tag{2.2.8}$$

$$\overline{y} = y + \varepsilon\eta, \tag{2.2.9}$$

ile sonsuz küçük üreteci

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.2.10}$$

olduğunu varsayalım. Daha sonra (2.2.6) denklemi ile verilen

$$X^{[n]}E|_{E=0} = 0, \tag{2.2.11}$$

denkleminde

$$X^{[n]} = X + \sum_{i=1}^{n}\left\{\eta^{(i)} - \sum_{j=0}^{i-1}\binom{i}{j}y^{(j+1)}\xi^{(i-j)}\right\}\frac{\partial}{\partial y^{(i)}}, \tag{2.2.12}$$

şeklindedir. (2.2.7) denklemindeki türevleri dönüştürmek için gereken X'nin n'inci genişlemesidir ve (2.2.12) denklemindeki indeksler toplam türev almayı göstermektedir. Kısmi diferansiyel denklemler ve sistemler için ξ, η, x ve y'ye ilgili alt simgeler verilmiştir. (2.2.7) denkleminin (2.2.10) simetrisine (grup üreteci) sahip olduğunu ancak ve ancak (2.2.11) denkleminin sağlanması durumunda söyleyebiliriz. Nokta simetrileri için katsayı fonksiyonları ξ ve η sadece x ve y'ye bağlıdır. Bu durumda, (2.2.12) denkleminin (2.2.7) denklemi üzerindeki işlemi, çözümü ξ ve η'yı veren, üst-belirlenmiş bir lineer kısmi diferansiyel denklemler sistemi üretir. Örnek olarak

$$y'' = y^{-3}, \tag{2.2.13}$$

denklemini ele alalım. (2.2.13) denklemi üzerindeki işlemi

$$X^{[2]} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + (\eta' - y'\xi')\frac{\partial}{\partial y'} + (\eta'' - 2y''\xi' - y'\xi'')\frac{\partial}{\partial y''}, \tag{2.2.14}$$

denkleminin (2.2.13) koşuluna bağlı olarak çözülmesi için gereken

$$\eta'' - 2y''\xi' - y'\xi'' + 3\eta y^{-4} = 0, \tag{2.2.15}$$

denkleminin çözülmesidir. Bu denklemin açılımı ise

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + 2y'\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + y'^2\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + y^{-3}\frac{\partial\eta}{\partial y} - 2y^{-3}\frac{\partial\xi}{\partial x} - 2y^{-3}y'\frac{\partial\xi}{\partial y}\\
&- y'\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2y'\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + y'^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + y^{-3}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + 3\eta y^{-4} = 0,
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

şeklindedir. ξ ve η, sadece x ve y'nin fonksiyonları olduğundan, lineer kısmi diferansiyel denklemler sistemini elde etmek için y''nin farklı kuvvetlerinin katsayılarını eşitliği sağlayacak şekilde ayırabiliriz.

Böylece (2.2.16) denklemi

$$
\begin{aligned}
y'^3 : &\quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0, \\
y'^2 : &\quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0, \\
y'^1 : &\quad 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - \frac{3}{y^3}\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \\
y'^0 : &\quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{1}{y^3}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{2}{y^3}\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{3\eta}{y^4},
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemlerin çözümünden

$$
\xi = A_0 + A_1 x + A_2 x^2,
$$

$$
\eta = \left(\frac{1}{2}A_1 + A_2 x\right)y,
$$

şeklinde elde edilir. O halde (2.2.13) denkleminin üç simetrisi

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
X_2 &= 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \\
X_3 &= x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}
\tag{2.2.17}
$$

şeklindedir. Karşılık gelen Lie komütatörleri

$$
[X_1, X_2] = 2X_1,
$$

$$
[X_1, X_3] = X_2,
$$

$$
[X_2, X_3] = 2X_3,
$$

şeklinde elde edilir. (2.2.17) simetrilerinin Lie komütatör ilişkileri Lie cebiri $sl(2, \mathbb{R})$'yi oluşturur (Mahomed & Leach, 1990).

Başka bir örneğe bakılacak olunursa eğer

$$y'' = y'^2 + 1,$$

denklemini ele alalım ve Lie simetri yöntemiyle lineer olmayan bu diferansiyel denklemin çözümünü elde edelim.
Belirleyici denklem

$$X^{[2]}(y'' - y'^2 - 1)|_{E=0} = 0, \tag{2.2.18}$$

şeklinde olduğuna göre

$$\left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial y'} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial y''}\right)(y'' - y'^2 - 1) = 0,$$

$$-2y'\zeta_1 + \zeta_2 = 0, \tag{2.2.19}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\zeta_1 = \eta' - y'\xi',$$

$$\zeta_2 = \eta'' - 2y''\xi' - y'\xi'',$$

şeklindedir. O halde (2.2.19) denkleminin açılımı

$$-2y'(\eta_x + y'(\eta_y - \xi_x) - y'^2\xi_y) + \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2$$

$$-\xi_{yy}y'^3 + (y'^2 + 1)(\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y) = 0, \tag{2.2.20}$$

şeklinde elde edilir. ξ ve η sadece x ve y'nin fonksiyonları olduğundan (2.2.20) denkleminde y''nin farklı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler

$$y'^3: \quad -\xi_{yy} - \xi_y = 0, \tag{2.2.21}$$

$$y'^2: \quad -\eta_y + \eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \tag{2.2.22}$$

$$y'^1: \quad -2\eta_x + 2\eta_{xy} - \xi_{xx} - 3\xi_y = 0, \tag{2.2.23}$$

$$y'^0: \quad \eta_{xx} + \eta_y - 2\xi_x = 0, \tag{2.2.24}$$

elde edilir. (2.2.21) denklemi düzenlenirse

$$\xi_{yy} = -\xi_y,$$

ve $v = \xi_y$ dönüşümü uygulanırsa

$$v_y = -v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -v,$$

$$\frac{\partial v}{v} = -\partial y,$$

$$\ln v = -y + \ln c_1,$$

$$\ln \frac{v}{c_1} = -y,$$

$$v = c_1 e^{-y},$$

$$\xi_y = c_1 e^{-y},$$

$$\xi(x,y) = -c_1 e^{-y} + a(x), \tag{2.2.25}$$

şeklinde elde edilir. (2.2.25) denkleminin gerekli olan türevi

$$\xi_{xy} = 0,$$

(2.2.22) denkleminde yerine konursa ve düzenlenirse

$$\eta_{yy} - \eta_y = 0,$$

$$\eta_{yy} = \eta_y,$$

(2.2.22) denklemi şeklinde elde edilir. Aynı şekilde $v = \eta_y$ dönüşümü uygulanırsa

$$v_y = v,$$

denkleminden

$$v = c_2 e^y,$$

elde edilir. O halde

$$\eta_y = c_2 e^y,$$

$$\eta(x.y) = c_2 e^y + b(x), \tag{2.2.26}$$

şeklinde elde edilir. (2.2.25) ve (2.2.26) eşitliklerinin gerekli olan türevleri (2.2.23) denkleminde yerine konursa

$$-2b' - a'' - 3c_1 e^{-y} = 0, \tag{2.2.27}$$

denklemi elde edilir ve (2.2.27) denkleminin y'ye göre türevi alınırsa

$$3c_1e^{-y} = 0,$$

$$c_1 = 0,$$

elde edilir. O halde $\xi(x, y)$

$$\xi(x, y) = a(x), \tag{2.2.28}$$

şeklinde elde edilir. (2.2.28) ve (2.2.26) eşitliklerinin gerekli olan türevleri (2.2.24) denkleminde yerine konursa

$$b'' + c_2e^y - 2a' = 0, \tag{2.2.29}$$

denklemi elde edilir ve (2.2.29) denkleminin y'ye göre türevi alınırsa

$$c_2e^y = 0,$$

$$c_2 = 0,$$

elde edilir. O halde $\eta(x.y)$

$$\eta(x.y) = b(x), \tag{2.2.30}$$

şeklinde elde edilir. O zaman (2.2.27) ve (2.2.29) denklemlerinden

$$-2b' - a'' = 0, \tag{2.2.31}$$

$$b'' - 2a' = 0, \tag{2.2.32}$$

denklemleri elde edilir. (2.2.31) denkleminden

$$b'' = -\frac{a'''}{2}, \tag{2.2.33}$$

elde edilir ve (2.2.33) denklemi (2.2.32) denkleminde yerine konursa

$$-\frac{a'''}{2} - 2a' = 0, \tag{2.2.34}$$

denklemi elde edilir. (2.2.34) denkleminde $u = a'$ dönüşümü uygulanırsa

$$-u'' - 4u = 0, \tag{2.2.35}$$

(2.2.34) denklemi şeklinde elde edilir. (2.2.35) denklemi ise operatör formunda yazılırsa

$$(-D^2 - 4)u = 0,$$

karakteristik denklemi

$$-r^2 - 4 = 0,$$

kökleri

$$r = \pm 2i,$$

şeklindedir. O halde (2.2.35) denkleminin çözümü

$$u = c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x,$$

şeklindedir ve $u = a'$ dönüşümü yerine konursa

$$a'(x) = c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x,$$

$$a(x) = \frac{1}{2}c_3 \sin 2x - \frac{1}{2}c_4 \cos 2x + c_5,$$

şeklinde elde edilir. (2.2.31) denkleminden

$$b' = -\frac{a''}{2},$$

olduğundan

$$b(x) = -\frac{a'(x)}{2},$$

olmalıdır. O halde

$$b(x) = -\frac{1}{2}c_3 \cos 2x - \frac{1}{2}c_4 \sin 2x,$$

şeklinde elde edilir. Yani

$$\xi(x, y) = \frac{1}{2}c_3 \sin 2x - \frac{1}{2}c_4 \cos 2x + c_5, \tag{2.2.36}$$

$$\eta(x, y) = -\frac{1}{2}c_3 \cos 2x - \frac{1}{2}c_4 \sin 2x, \tag{2.2.37}$$

şeklindedir.

O halde simetri üreteçleri;

(i) $c_3 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olması durumunda

$$X_1 = \frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial y},$$

(ii) $c_4 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olması durumunda

$$X_2 = -\frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial y},$$

(iii) $c_5 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olması durumunda

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x},$$

şeklinde elde edilir.
$X_3 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ simetri üreteci için (u, v) kanonik koordinatlarını elde edelim. Bunun için aşağıdaki denklemler

$$X(u) = \xi(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 1,$$

$$X(v) = \xi(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

X_3 simetri üreteci için yazılırsa

$$X_3 u = \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \tag{2.2.38}$$

$$X_3 v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{2.2.39}$$

denklemleri elde edilir. (2.2.38) denkleminden

$$u = x, \tag{2.2.40}$$

ve (2.2.39) denkleminden

$$v = y, \tag{2.2.41}$$

elde edilir. Yani

$$y = v,$$

$$x = u,$$

şeklindedir. O halde buradan y'nin türevleri

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dv}}{\frac{du}{dv}},$$

$$y' = \frac{1}{u'}, \tag{2.2.42}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u'}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{u'}\right)\frac{dv}{du},$$

$$y'' = -\frac{u''}{(u')^2}\frac{1}{u'} = -\frac{u''}{(u')^3}, \tag{2.2.43}$$

şeklinde elde edilir. (2.2.42) ve (2.2.43) eşitlikleri

$$y'' = y'^2 + 1,$$

denkleminde yerine konursa

$$-\frac{u''}{u'^3} = \left(\frac{1}{u'}\right)^2 + 1,$$

$$-u'' = u' + u'^3,$$

ve $s = u'$ dönüşümü uygulanırsa

$$s' + s^3 + s = 0,$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$\frac{ds}{dv} = -(s^3 + s),$$

$$\frac{ds}{s(s^2+1)} = -dv,$$

$$\ln s - \frac{1}{2}\ln(s^2+1) + \ln c = -v,$$

$$\ln\left[\frac{sc}{(s^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right] = -v,$$

$$\frac{sc}{(s^2+1)^{\frac{1}{2}}} = e^{-v},$$

$$s^2c^2 = e^{-2v}(s^2+1),$$

$$s^2 = \frac{e^{-2v}}{c^2 - e^{-2v}},$$

$$s = \pm \frac{e^{-v}}{\sqrt{c^2 - e^{-2v}}},$$

denklemin çözümü için

$$s = -\frac{e^{-v}}{\sqrt{c^2 - e^{-2v}}},$$

denklemi kullanılırsa ve $s = u'$ dönüşümü denklemde yerine konursa

$$u = -\int \frac{e^{-v}dv}{\sqrt{c^2 - e^{-2v}}},$$

şeklinde elde edilir. $r = e^{-v}$ dönüşümü integralde uygulanırsa

$$u = \int \frac{dr}{\sqrt{c^2 - r^2}},$$

elde edilir ve $r = c\sin\theta$ eşitliği kullanılırsa

$$u = \int \frac{c\cos\theta}{c\cos\theta} d\theta = \int d\theta,$$

$$u = \theta + c_6, \qquad (2.2.44)$$

şeklinde elde edilir.

$$r = c\sin\theta,$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{r}{c},$$

eşitliğinde $r = e^{-v}$ ve $v = y$ dönüşümleri yerine konursa

$$\theta = \sin^{-1}\frac{e^{-y}}{c}, \qquad (2.2.45)$$

şeklinde elde edilir. (2.2.44) denkleminde (2.2.40) ve (2.2.45) eşitlikleri yerine konursa

$$x = \sin^{-1}\frac{e^{-y}}{c},$$

$$e^{-y} = c\sin x,$$

denklemi elde edilir. O halde denklemin çözümü

$$y = -\ln(c\sin x),$$

şeklinde elde edilir.

Simetri üreteçleri

$$X_1 = \frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_2 = -\frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x},$$

için komütatörler hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= X_1(X_2) - X_2(X_1),\\
&= \left(\frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
&\quad -\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial y}\right),\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}X_3,\\
[X_1, X_3] &= X_1(X_3) - X_3(X_1),\\
&= \left(\frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&\quad -\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial y}\right),\\
&= 2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial y}\right) = 2X_2,\\
[X_2, X_3] &= X_2(X_3) - X_3(X_2),\\
&= \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&\quad -\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial y}\right),\\
&= -2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\cos 2x\frac{\partial}{\partial y}\right) = -2X_1,
\end{aligned}$$

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	$\frac{1}{2}X_3$	$2X_2$
X_2	$-\frac{1}{2}X_3$	0	$-2X_1$
X_3	$-2X_2$	$2X_1$	0

X_1, X_2 ve X_3 simetri üreteçleri tablodan da görüldüğü üzere bir Lie cebiri oluşturur.

2.3 Mertebe İndirgeme

Bir diferansiyel denklemin simetrileri, diferansiyel denklemin mertebesini indirgenmesi için kullanılabilir. Eğer n. mertebeden bir adi diferansiyel denklem

$$E = E(x, y, y', \dots, y^n), \tag{2.3.1}$$

simetri üreteci

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.3.2}$$

altında değişmez kalıyorsa mertebenin indirgenmesi için değişkenler,

$$X^{[1]}E = 0, \tag{2.3.3}$$

ifadesini gerektirerek elde edilir. Burada E bağımsız değişkenlerin keyfi bir fonksiyonudur. (2.3.3) denkleminden

$$\xi\frac{\partial E}{\partial x} + \eta\frac{\partial E}{\partial y} + (\eta' - y'\xi')\frac{\partial E}{\partial y'} = 0, \tag{2.3.4}$$

elde edilir ve bu eşitliğin ilişkili Lagrange sistemi

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy'}{\eta' - y'\xi'}, \tag{2.3.5}$$

şeklinde olduğuna göre ilk iki terimin integrasyonu, u ile gösterilen sıfırıncı mertebeden diferansiyel değişmezi ve ikinci ve üçüncü terimlerin integrasyonu, v ile gösterilen birinci mertebeden diferansiyel değişmezi verir. Bunu göstermek için

$$y^{iv} + y'y'' - yy''' = 0, \tag{2.3.6}$$

denklemini ele alalım (Stephen & Andrew, 1997). (2.3.6) denklemi iki Lie simetrisi

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.3.7}$$

ve Lie komütatörüne

$$[X_1, X_2] = X_1, \tag{2.3.8}$$

sahiptir. X_1 durumunda (2.3.3) eşitliğinin ilişkili Langrange sistemi,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dy'}{0}, \tag{2.3.9}$$

şeklindedir. O halde diferansiyel değişmezler

$$u = y \quad , \quad v = y' \tag{2.3.10}$$

şeklinde elde edilir. Aşağıdaki terimleri

$$y'' = vv',$$

$$y''' = vv'^2 + v^2v'',$$

$$y^{iv} = v^3v''' + 4v'v^2v'' + vv'^3,$$

(2.3.6) denkleminde yerine yazdığımızda, indirgenmiş denklem

$$v^3v''' + 4v'v^2v'' + vv'^3 + v^2v' - u(vv'^2 + v^2v'') = 0, \tag{2.3.11}$$

şeklinde elde edilir. İndirgenmiş denklemin doğrudan integrasyonu

$$I = v^2v'' + vv'^2 + v^2 - uvv', \tag{2.3.12}$$

elde edilir. Bu durumda, indirgeme denklemi kolayca çözülemez. Yani bir simetrinin varlığı, indirgenmiş denklemin çözümü için açık bir ifadenin bulunabileceğini garanti etmez.

(2.2.13) denklemi ve (2.2.17) denklemindeki üç nokta simetrisi

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y},$$

göz önüne alalım. X_1 simetri üreteciyle indirgemede, ilişkili Lagrange sistemi

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dy'}{0}, \tag{2.3.13}$$

şeklindedir (Bluman & Kumei, 1989). O halde diferansiyel değişmezler

$$u = y \quad , \quad v = y' \tag{2.3.14}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla (2.2.13) denklemi

$$\begin{aligned} v' &= \frac{dv}{du}, \\ &= \frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}}, \\ &= \frac{y^{-3}}{y'}, \\ &= \frac{u^{-3}}{v}, \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

ayrılabilir değişkenlere sahip bir denklem şekilde indirgenir. Benzer şekilde X_2 simetri üreteciyle indirgemede, ilişkili Lagrange sistemi

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y} = -\frac{dy'}{y'}, \tag{2.3.16}$$

şeklindedir. O halde diferansiyel değişmezler

$$u = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad v = y' x^{\frac{1}{2}} \tag{2.3.17}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla (2.2.13) denklemi

$$\frac{dv}{du} = \frac{u^{-3} + \frac{1}{2}v}{v - \frac{1}{2}u}, \tag{2.3.18}$$

ikinci türden bir Abel denklem şeklinde indirgenir. X_3 simetrisinin diferansiyel değişmezleri

$$u = \frac{y}{x} \quad , \quad v = xy' - y \tag{2.3.19}$$

ile (2.2.13) denklemi

$$\frac{dv}{du} = \frac{u^{-3}}{v}, \tag{2.3.20}$$

ayrılabilir değişkenlere sahip bir denklem şekilde indirgenir.

Sonlu (global) dönüşümü, sonsuz küçük dönüşümün üreticisinden belirlemenin mümkün olduğunu belirtmek de önemlidir. Diferansiyel operatör

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.3.21}$$

$\varepsilon = 0$ için

$$\frac{d\overline{x}}{\xi} = \frac{d\overline{y}}{\eta} = d\varepsilon, \tag{2.3.22}$$

integre edilirse

$$\overline{x} = x \quad , \quad \overline{y} = y \tag{2.3.23}$$

başlangıç koşullarına tabidir. Eğer

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

ve

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

ise, o zaman sırasıyla X_1 ve X_2 üreteçleri için sonlu dönüşümler

$$\overline{x} = x + \varepsilon \quad , \quad \overline{y} = y \tag{2.3.24}$$

$$\overline{x} = xe^{-\varepsilon} \quad , \quad \overline{y} = ye^{\varepsilon} \tag{2.3.25}$$

şeklindedir. O halde (2.3.6) denklemi

$$\overline{x} = (x + \varepsilon)e^{-\varepsilon} \quad , \quad \overline{y} = ye^{\varepsilon} \tag{2.3.26}$$

sonlu dönüşümleri altında değişmezdir.

Bölüm 3

NOETHER TEOREMİ

Bu bölümde Noether teoremi tanıtılmıştır. Teorem, Emmy Noether tarafından 1918'de değişmez varyasyonel problemler üzerine yazdığı Noether (1918) makalesinde açıklanmıştır, ancak bu makaleden bu yana bazı gelişmeler olmuştur. Bu bölümde teoremin bazı yönleri üzerinde durulmuştur ve bunlar belirli örnekler üzerinde gösterilmiştir. Sonraki analizde bize yardımcı olması için de Varyasyonlar Hesabına kısa bir giriş yapılmıştır.

3.1 Varyasyon Hesabı

A, x bağımsız değişken, y bağımlı değişken ve L x, y ve y''nin analitik fonksiyon olduğu

$$A[y] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y')dx, \tag{3.1.1}$$

tarafından tanımlanan bir fonksiyonel olsun. A'nın değeri, y'nin x'e olan fonksiyonel bağımlılığına bağlıdır. Problemimiz, A integraline maksimum veya minimum değeri veren $y = y(x)$'i bulmaktır. y'nin

$$\overline{y} = y + \varepsilon\eta(x), \tag{3.1.2}$$

sonsuz küçük bir şekilde değiştiğini varsayalım. Burada ε sonsuz küçük bir parametredir. O zaman A'nın varyasyonu

$$\delta A = \int_{x_0}^{x_1} L(x, \overline{y}, \overline{y}')dx - \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y')dx, \tag{3.1.3}$$

şeklindedir ve burada $\eta(x_0) = 0$ ve $\eta(x_1) = 0$ (Yani, uç noktalarda herhangi bir değişiklik yoktur; bu, y'deki değişimin uç noktaları etkilememesini sağlar) olarak alınır.

Taylor genişlemesi ile

$$\begin{aligned} L(x,\overline{y},\overline{y}') &= L(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta'), \\ &= L(x,y,y') + \varepsilon\bigg(\eta\frac{\partial L}{\partial y} + \eta'\frac{\partial L}{\partial y'}\bigg) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

yüksek mertebeli terimler ihmal edilirse (3.1.4) eşitliği elde edilir. Bu nedenle (3.1.3) denklemi

$$\delta A = \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon\bigg(\eta\frac{\partial L}{\partial y} + \eta'\frac{\partial L}{\partial y'}\bigg)dx, \tag{3.1.5}$$

şeklinde elde edilir. η ve η' birbirinden zorunlu olarak bağımsız olmadığından, bu ifade mevcut haliyle daha fazla analiz için elde edilebilir değildir. Bu durumu ortadan kaldırmak için kısmi integrasyon yöntemini uyguluyoruz. Bu da bize

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\eta\frac{\partial L}{\partial y} + \eta'\frac{\partial L}{\partial y'}\right)dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta\frac{\partial L}{\partial y}dx + \left(\eta\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}dx,$$

$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ olduğundan

$$= \int_{x_0}^{x_1} \eta\bigg(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\bigg)dx, \tag{3.1.6}$$

eşitliğini verir. A'nın maksimum veya minimum bir değer alması için $\delta A = 0$ olması gerekir, yani (3.1.5) denklemi

$$\varepsilon\int_{x_0}^{x_1} \eta\bigg(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\bigg)dx = 0, \tag{3.1.7}$$

şeklinde yazılabilir. η keyfi bir C^1 fonksiyonu olduğundan, $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ eşitliklerine tabidir, bunun anlamı ise

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0, \tag{3.1.8}$$

şeklindedir. Bu denkleme Varyasyonlar Hesabı'nın **Euler-Lagrange denklemi** denir. Denklemlerin maksimum veya minumum değerin niteliği belirtilmezken $\delta A = 0$ şartından kaynaklandığını burada belirtmek önemlidir. Maksimum veya minumum değer, varyasyondaki ikinci mertebeden terim tarafından belirlenir. Bu terim

$$\delta^2 A = \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta^2\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + 2\eta\eta'\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial y'} + \eta'^2\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}\right)dx, \tag{3.1.9}$$

tarafından verilir. $\delta^2 A$'nın işareti, Hessian matrisine

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} \\ \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} & \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \end{pmatrix}$$

bağlıdır. Hessian matrisi pozitif tanımlı ise değer minimum, negatif tanımlı ise değer maksimumdur. Matris belirsiz ise bir eyer noktasıdır. Fonksiyonel

$$A = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y', y'')dx, \tag{3.1.10}$$

için Euler-Lagrange denklemi aynı yöntem kullanılarak belirlenebilir. y'nin (3.1.2) denklemindeki dönüşümü yani

$$\overline{y} = y + \varepsilon\eta(x), \tag{3.1.11}$$

eşitliğini ele alalım. Burada ε, sonsuz küçük bir parametre, $\eta(x)$ keyfi bir C^2 fonksiyonu ve $\eta'(x_0) = 0$ ve $\eta'(x_1) = 0$'dır ($y(x)$ ve $\overline{y}(x)$ fonksiyonları uç noktalarda teğettir). Bu, A'daki varyasyonun

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{x_0}^{x_1} L(x, \overline{y}, \overline{y}', \overline{y}'')dx - \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y', y'')dx, \\ &= \int_{x_0}^{x_1} L(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', y'' + \varepsilon\eta'')dx - \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y', y'')dx, \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon\left(\eta\frac{\partial L}{\partial y} + \eta'\frac{\partial L}{\partial y'} + \eta''\frac{\partial L}{\partial y''}\right)dx, \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

olduğu anlamına gelir. İkinci kısıma biz kez, üçüncü kısıma iki kez kısmi integrasyon yönteminin uygulanması ile,

$$\begin{aligned} \delta A =&\varepsilon\left(\int_{x_0}^{x_1} \eta\frac{\partial L}{\partial y}dx + \left(\eta\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)dx\right) \\ &+ \varepsilon\left(\left(\eta'\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\Big|_{x_0}^{x_1} - \left(\eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\right)\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \eta\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)dx\right), \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Öyleyse

$$\delta A = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \eta\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial y''}\right), \tag{3.1.13}$$

şeklindedir. $\delta A = 0$ olmasını istediğimiz için, bu

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial y''} = 0, \tag{3.1.14}$$

anlamına gelir. Genel olarak

$$L = L(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), \tag{3.1.15}$$

formundaki n'inci mertebeden Lagrangian için karşılık gelen Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial L}{\partial y^n} = 0, \tag{3.1.16}$$

şeklindedir.

3.2 Klasik Noether Teoremleri

Bu alt bölümde Klasik Noether teoreminin formülasyonu verilmektedir. Teoremi formüle ederken, ξ ve η'nın sadece x ve y'nin fonksiyonları olduğu

$$\overline{x} \to x + \varepsilon\xi, \tag{3.2.1}$$

$$\overline{y} \to y + \varepsilon\eta, \tag{3.2.2}$$

tarafından tanımlanan (x, y)-uzayında sonsuz küçük bir dönüşümü dikkate alarak başlıyoruz. Bu nedenle, $[a, b]$ aralığında tanımlanan her bir $x \to y(x)$ eğrisinin, yeni değişkenlerde parametreye bağlı bir $\overline{x} \to \overline{y}(\overline{x})$ eğrisine dönüştürüldüğünü elde ederiz. x ve y'deki dönüşümün sonucu olarak birinci türevdeki dönüşüm

$$\begin{aligned}
\overline{y}' = \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} &= \frac{d(y + \varepsilon\eta)}{d(x + \varepsilon\xi)}, \\
&= \frac{y' + \varepsilon\eta'}{1 + \varepsilon\xi'}, \\
&= y' + \varepsilon(\eta' - y'\xi') + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Benzer şekilde, ikinci ve üçüncü türevler

$$\overline{y}'' = y'' + \varepsilon(\eta'' - 2y''\xi' - y'\xi''),$$

$$\overline{y}''' = y''' + \varepsilon(\eta''' - 3y'''\xi' - 3y''\xi'' - y'\xi'''),$$

şeklindedir. O halde genel formül

$$\overline{y}^{(n)} = y^{(n)} + \varepsilon\phi_n, \tag{3.2.3}$$

burada

$$\phi_n = \phi'_{n-1} - \xi' y^{(n)} \quad , \quad n \geq 1 \tag{3.2.4}$$

ve

$$\phi_0 = \eta,$$

şeklindedir. Sonsuz küçük dönüşümün Eylem İntegrali üzerindeki etkisini göz önünde bulunduralım. Eylem İntegrali sonsuz küçük bir sabitle değiştirilecek şekilde ξ ve η'yı elde ederiz. Dolayısıyla, εK'nin sonsuz küçük bir sabiti temsil ettiği

$$\int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}_1} L(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}')d\overline{x} = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y')dx + \varepsilon K, \tag{3.2.5}$$

eşitliğine sahibiz. Buradaki

$$\begin{aligned} L(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}')d\overline{x} &= L(x + \varepsilon\xi, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\zeta)d(x + \varepsilon\xi), \\ &= \left\{ L(x, y, y') + \varepsilon\xi\frac{\partial L}{\partial x} + \varepsilon\eta\frac{\partial L}{\partial y} + \varepsilon\zeta\frac{\partial L}{\partial y'} \right\}(dx + \varepsilon\xi' dx), \\ &= Ldx + \varepsilon\left(\xi\frac{\partial L}{\partial x} + \eta\frac{\partial L}{\partial y} + \zeta\frac{\partial L}{\partial y'} + \xi' L\right)dx, \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir ve bu eşitlikte $\zeta = \eta' - y'\xi'$ ile $O(\varepsilon^2)$ eşitliğine sahibiz. O halde (3.2.5) denklemi

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(L + \varepsilon\left(\xi\frac{\partial L}{\partial x} + \eta\frac{\partial L}{\partial y} + \zeta\frac{\partial L}{\partial y'} + \xi' L\right)\right)dx - \int_{x_0}^{x_1} Ldx = \varepsilon K, \tag{3.2.6}$$

şeklinde elde edilir. Yani

$$\int_{x_0}^{x_1} \varepsilon\left(\xi\frac{\partial L}{\partial x} + \eta\frac{\partial L}{\partial y} + \zeta\frac{\partial L}{\partial y'} + \xi' L\right)dx = \varepsilon K. \tag{3.2.7}$$

Bu

$$\xi\frac{\partial L}{\partial x}+\eta\frac{\partial L}{\partial y}+\zeta\frac{\partial L}{\partial y'}+\xi' L=f', \tag{3.2.8}$$

eşitliğinde $' = \frac{d}{dx}$ ve f'nin,

$$\int_{x_0}^{x_1} f'dx = K \iff f(x_1)-f(x_0)=K, \tag{3.2.9}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir C^1 fonksiyonu olduğu anlamına gelir. Öyle ki f fonksiyonuna **ölçü fonksiyonu** denir. İfadedeki görünümü, Euler-Lagrange denkleminin Lagrangian'a toplam zaman türevinin eklenmesinden etkilenmemesinden kaynaklanmaktadır. (3.2.8) denklemi, Sarlet ve Cantrijn (1981) tarafından **Killing tipi** bir denklem olarak adlandırılır. Bir Lagrangian $L(x,y,y')$ için Killing tipi (3.2.8) denklemi

$$f'=\xi' L+\xi\frac{\partial L}{\partial x}+\eta\frac{\partial L}{\partial y}+\left((\eta'-y'\xi')\frac{\partial L}{\partial y'}\right), \tag{3.2.10}$$

şeklindedir. Karşılık gelen ilk integralin ifadesini elde etmek için parantez altına bir toplam türev koymayı amaçlıyoruz. Böylece

$$(f-\xi L)'=f'-\xi' L-\xi\left(\frac{\partial L}{\partial x}+y'\frac{\partial L}{\partial y}+y''\frac{\partial L}{\partial y'}\right). \tag{3.2.11}$$

Daha sonra (3.2.10) denkleminde $f'-\xi' L$ ifadesi yerine konursa

$$\begin{aligned}
(f-\xi L)' &= -\xi\left(\frac{\partial L}{\partial x}+y'\frac{\partial L}{\partial y}+y''\frac{\partial L}{\partial y'}\right)+\xi\frac{\partial L}{\partial x}+\eta\frac{\partial L}{\partial y}+\left((\eta'-y'\xi')\frac{\partial L}{\partial y'}\right),\\
&= -\xi\left(y'\frac{\partial L}{\partial y}+y''\frac{\partial L}{\partial y'}\right)+\eta\frac{\partial L}{\partial y}+\left((\eta'-y'\xi')\frac{\partial L}{\partial y'}\right),\\
&= \left\{(\eta-y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}\right\}'-(\eta-y'\xi)\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}+(\eta-y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y},
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

ve eşitlik düzenlenirse Euler-Lagrange denkleminden

$$\begin{aligned}
\left\{f-\left(\xi L+(\eta-y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right\}' &= (\eta-y'\xi)\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right),\\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

elde edilir. (3.2.13) denkleminin integrasyonu bize birinci mertebeden Lagrangian $L(x,y,y')$ için karşılık gelen ilk integral

$$I=f-\left(\xi L+(\eta-y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}\right), \tag{3.2.14}$$

verir. Bu nedenle, belirli bir Lagrangian $L = L(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ için eğer

$$f' = X^{(n)}L + \xi' L, \tag{3.2.15}$$

ise Noether simetrisi

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.2.16}$$

sahiptir. Burada ξ ve η bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ve f bir ölçü fonksiyonudur.

Noether Dönüşüm: Belirli bir Lagrangian sistemi L ve bazı ölçü fonksiyonu f için L'ye karşılık gelen klasik bir Noether dönüşümü için (3.2.10) denklemini karşılayan sonsuz küçük bir dönüşüm (3.2.1) ve (3.2.2) denklemleri tanımlarız (Sarlet & Cantrijn, 1981). Noether teoremi, her (3.2.1) ve (3.2.2) Noether dönüşümüne bir sabitin karşılık geldiğini

$$I(x, y, y') = f(x, y) - \left(\xi L + (\eta - y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}\right),$$

belirtir. Bunun birinci mertebeden bir Lagrangian için bir teorem olduğuna dikkat edelim. Teorem, ilerleyen bölümlerde göreceğimiz gibi daha yüksek mertebeden Lagrangianlar için genişletilebilir.

Örnek olarak Ermakov-Pinney denkleminin özel bir durumu olan

$$y'' + y = \frac{1}{y^3}, \tag{3.2.17}$$

denklemi ele alalım (Noether, 1981). Lagrangian L'nin

$$L = -\frac{y'^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2}, \tag{3.2.18}$$

şekilde alınması durumunda koşul (3.2.8) denkleminden

$$f' = \eta\left(y - \frac{1}{y^3}\right) - y'(\eta' - y'\xi') + \xi'\left(-\frac{y'^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2}\right), \tag{3.2.19}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = {} & \eta\left(y - \frac{1}{y^3}\right) - y'\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + y'\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ & + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y'^2}{2} + \frac{1}{2y^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + y'\frac{\partial \xi}{\partial y}\right),\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

elde edilir.

ξ, η ve f fonksiyonları y' ifadesini içermediğinden, kısmi diferansiyel denklemler sistemini elde etmek için y''nin farklı kuvvetlerinin katsayıları eşitliği sağlayacak şekilde eşitlenirse aşağıdaki denklemler

$$y'^3: \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \tag{3.2.21}$$

$$y'^2: \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2}a', \tag{3.2.22}$$

$$y'^1: \quad \frac{1}{2y^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{y^2}{2}\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{3.2.23}$$

$$y'^0: \quad \eta\left(y - \frac{1}{y^3}\right) + \frac{y^2}{2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2y^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{3.2.24}$$

elde edilir. (3.2.21), (3.2.22) ve (3.2.23) denklemlerinden

$$\xi = a(x), \tag{3.2.25}$$

$$\eta = \frac{1}{2}a'y + b(x), \tag{3.2.26}$$

$$f = -\frac{1}{4}a''y^2 - b'y + g(x), \tag{3.2.27}$$

elde edilir ve (3.2.24) denkleminden

$$a = A_0 + A_1 cos2x + A_2 sin2x, \tag{3.2.28}$$

$$b = 0, \tag{3.2.29}$$

$$g = sabit, \tag{3.2.30}$$

elde edilir. Toplama sabiti olarak göründüğü için g göz ardı edilir. Tablo 3.1, Noether simetrilerini, karşılık gelen integralleri ve ölçü fonksiyonlarını verir.

Tablo 3.1: Ermakov-Pinney denklemi $y'' + y = \frac{1}{y^3}$ için Noether simetrileri, bunlara karşılık gelen ilk integraller ve ölçü fonksiyonları.

Noether Simetrileri	Noether İntegrali	Ölçü Fonksiyonu
$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$	$I_1 = \frac{1}{2}y'^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2}$	$f = 0$
$X_2 = \cos 2x\frac{\partial}{\partial x} - y\sin 2x\frac{\partial}{\partial y}$	$I_2 = \frac{1}{2}y^2\cos 2x - \frac{1}{2y^2}\cos 2x$ $+yy'\sin 2x - \frac{1}{2}y'^2\cos 2x$	$f = y^2\cos 2x$
$X_3 = \sin 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\cos 2x\frac{\partial}{\partial y}$	$I_3 = \frac{1}{2}y^2\sin 2x - \frac{1}{2y^2}\sin 2x$ $+yy'\cos 2x - \frac{1}{2}y'^2\sin 2x$	$f = y^2\sin 2x$

Bu durumda, diferansiyel denkleme Lie analizi uygulandığında elde edilen sayı ile aynı olan üç nokta simetrisi elde ederiz.

3.3 Fonksiyonel $L(x, y, y', y'')$ için Noether Teoremi

Eylem İntegrali A

$$\int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y', y'')dx,$$

şeklinde olsun. O zaman dönüştürülmüş fonksiyonel

$$\overline{A} = \int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}_1} L(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}', \overline{y}'')d\overline{x}, \tag{3.3.1}$$

şeklindedir.

$$\zeta_1 = \eta' - y'\xi',$$

$$\zeta_2 = \eta'' - 2y''\xi' - y'\xi'',$$

olduğu ve Taylor genişlemesi kullanımı ile

$$\overline{A} = \int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}_1} L(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}', \overline{y}'')d\overline{x},$$

$$= \int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}_1} L(x + \varepsilon\xi, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\zeta_1, y'' + \varepsilon\zeta_2)d(x + \varepsilon\xi),$$

farkın sonsuz küçük bir sabit olduğu, $A - \overline{A} = \varepsilon K$ gerekliliğinden

$$\overline{A} = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y', y'')dx + \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon\left(\xi\frac{\partial L}{\partial x} + \eta\frac{\partial L}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial L}{\partial y'} + \zeta_2\frac{\partial L}{\partial y''} + \xi' L\right)dx, \tag{3.3.2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$f' = \xi\frac{\partial L}{\partial x} + \eta\frac{\partial L}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial L}{\partial y'} + \zeta_2\frac{\partial L}{\partial y''} + \xi' L, \tag{3.3.3}$$

şeklindedir. İlk integralin ifadesi, yukarıdaki ifadenin değiştirilmesiyle elde edilir. Bunu kolayca yapmanın özel bir yöntemi yoktur. Bunu yapmak için, toplam türevleri bir tarafta gruplandırmayı amaçlıyoruz, böylece ifade kolayca integre edilebilir.

3.3.1 Bir fonksiyonel $L(x, y, y', y'')$ için ilk integral

İkinci mertebeden bir Lagrangian'ın ilk integralinin ifadesini bulmak için, birinci mertebeden Lagrangian için ilk integralin

$$I = f - \left(\xi L + (\eta - y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}\right), \tag{3.3.4}$$

tarafından verildiğini hatırlıyoruz. Ayrıca $L(x, y, y', y'')$ fonksiyoneli için

$$f' = \xi\frac{\partial L}{\partial x} + \eta\frac{\partial L}{\partial y} + (\eta' - y'\xi')\frac{\partial L}{\partial y'} + (\eta'' - 2y''\xi' - y'\xi'')\frac{\partial L}{\partial y''} + \xi' L, \tag{3.3.5}$$

denklemine sahibiz. (3.3.5) denkleminin her iki tarafına

$$\left((\eta - y'\xi)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\right)',$$

terimi eklenirse, o zaman

$$\left[f - \left(\xi L + (\eta - y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right]' = f' - \xi' L - \xi L' - (\eta' - y''\xi - y'\xi')\frac{\partial L}{\partial y'} - (\eta - y'\xi)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right),$$

olduğundan (3.3.5) denklemi

$$\begin{aligned}\left\{f - \left[\xi L + (\eta - y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'} - (\eta - y'\xi)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\right]\right\}' &= -\xi y''\frac{\partial L}{\partial y'} - \xi y'''\frac{\partial L}{\partial y''} \\ &+ \frac{d}{dx}\left[(\eta' - y''\xi - y'\xi')\frac{\partial L}{\partial y''}\right] \\ &+ y'''\xi\frac{\partial L}{\partial y''} + (\eta' - y'\xi')\frac{\partial L}{\partial y'} \\ &- (\eta' - y''\xi - y'\xi')\frac{\partial L}{\partial y'},\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$\left(f - \left[\xi L + (\eta - y'\xi)\left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\right)\right]\right)' = \frac{d}{dx}\left[(\eta' - y''\xi - y'\xi')\frac{\partial L}{\partial y''}\right], \tag{3.3.7}$$

elde edilir. Dolayısıyla ilk integral

$$I = f - \left[\xi L + (\eta - y'\xi)\left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)\right) + (\eta' - y''\xi - y'\xi')\frac{\partial L}{\partial y''}\right], \tag{3.3.8}$$

şeklinde elde edilir. Teoremin bir örneği olarak Euler-Lagrange denklemi

$$e^x(y^{iv} + 2y''' + y'') = 0$$

$$\Longleftrightarrow\ y^{iv} + 2y''' + y'' = 0,$$

ile Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}e^x y''^2, \tag{3.3.9}$$

ele alalım. (3.3.3) denkleminden

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\xi'}{2}e^x y''^2 + \frac{1}{2}\xi e^x y''^2 + (\eta'' - 2y''\xi' - y'\xi'')e^x y'', \tag{3.3.10}$$

elde edilir. Bu denklemin açılımı

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} = {} & \frac{e^x}{2}y''^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + y'\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\xi e^x y''^2 \\
& + e^x y''\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2y'\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + y''\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\
& - 2e^x y''^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + y'\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \\
& - e^x y' y''\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2y'\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + y''\frac{\partial \xi}{\partial y}\right),
\end{aligned}$$

şeklindedir. ξ ve η sadece x ve y'nin fonksiyonları olduğundan, kısmi diferansiyel denklemler sistemi aşağıdaki denklemler

$$y'y''^2 : \quad \frac{e^x}{2}\frac{\partial \xi}{\partial y} - 2e^x\frac{\partial \xi}{\partial y} - e^x\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \tag{3.3.11}$$

$$y''^2 : \quad \frac{e^x}{2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e^x}{2}\xi + e^x\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2e^x\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \tag{3.3.12}$$

$$y''^1 : \quad e^x\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2e^x y'\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + e^x y'^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - e^x y'\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2e^x y'^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} - e^x y'^3\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y'}, \tag{3.3.13}$$

$$y''^0 : \quad \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{3.3.14}$$

şeklinde elde edilir.

Bu kısmi diferansiyel denklem sisteminden aşağıdaki eşitlikler

$$\xi = a(x),$$

$$\eta = \left(\frac{3}{2}a' - \frac{a}{2}\right)y + b(x),$$

$$f = e^x y'\left(\left(\frac{3}{2}a''' - \frac{a''}{2}\right)y + b''\right) + e^x y'^2\left(\frac{3}{2}a'' - \frac{a'}{2}\right) - \frac{e^x}{2}y'^2 a'' + g(x,y),$$

elde edilir. (3.3.14) denkleminden ise

$$\begin{aligned}0 &= e^x y'\left(\left(\frac{3}{2}a''' - \frac{a''}{2}\right)y + b''\right)\\ &+e^x y'\left(\left(\frac{3}{2}a^{iv} - \frac{a'''}{2}\right)y + b'''\right) + e^x y'^2\left(\frac{3}{2}a'' - \frac{a'}{2}\right) + e^x y'^2\left(\frac{3}{2}a''' - \frac{a''}{2}\right)\\ &-\frac{e^x}{2}y'^2(a'' + a''') + \frac{\partial g}{\partial x} + y'\frac{\partial g}{\partial y} + y'^2 e^x\left(\frac{3}{2}a''' - \frac{a''}{2}\right),\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

elde edilir. (3.3.15) denklemindeki y''nin farklı kuvvetlerinin katsayıları eşitliği sağlayacak şekilde eşitlenirse aşağıdaki denklemler

$$y'^2: \quad \frac{5}{2}a''' - \frac{a'}{2} = 0, \tag{3.3.16}$$

$$y'^1: \quad e^x\left(\left(\frac{3}{2}a''' - \frac{a''}{2}\right)y + b''\right) + e^x\left(\left(\frac{3}{2}a^{iv} - \frac{a'''}{2}\right)y + b'''\right) = \frac{\partial g}{\partial y},$$

$$\Rightarrow h(x) - e^x\left(\frac{1}{4}(3a^{iv} + 2a''' - a'')y^2 + (b''' + b'')y\right) = g, \tag{3.3.17}$$

$$y'^0: \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \tag{3.3.18}$$

elde edilir. Böylece (3.3.17) ve (3.3.18) denklemlerinden

$$y^2: \quad 3a^v + 5a^{iv} + a''' - a'' = 0, \tag{3.3.19}$$

$$y^1: \quad b^{iv} + 2b''' + b'' = 0, \tag{3.3.20}$$

$$y^0: \quad h' = 0, \tag{3.3.21}$$

elde edilir. Bu nedenle (3.3.16) ve (3.3.19) denklemlerinden

$$a = A_0, \tag{3.3.22}$$

elde edilir. (3.3.20) denkleminden ise

$$b = B_0 + B_1 x + B_2 e^{-x} + x B_3 e^{-x}, \tag{3.3.23}$$

elde edilir. O halde

$$\xi = A_0, \tag{3.3.24}$$

$$\eta = -\frac{A_0}{2} y + B_0 + B_1 x + B_2 e^{-x} + x B_3 e^{-x}, \tag{3.3.25}$$

şeklinde elde edilir. Söz konusu Lagrangian'ın beş parametreli X simetrisi

$$X = A_0 \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{A_0}{2} y + B_0 + B_1 x + B_2 e^{-x} + x B_3 e^{-x} \right) \frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.3.26}$$

şeklindedir. O halde beş tane bir parametreli Noether simetrileri

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_3 = x \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_4 = e^{-x} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_5 = x e^{-x} \frac{\partial}{\partial y},$$

şekilde elde edilir. X_1 simetri üretecine karşılık gelen ilk integral ise

$$I = \frac{1}{2} e^x y''^2 - \frac{1}{2} y y'' e^x - \frac{1}{2} y' y'' e^x - \frac{1}{2} e^x y y''' - y' y''' e^x, \tag{3.3.27}$$

şeklindedir.

Teorem 3.3.1. *Muatjetjeja ve Khalique (2011) kaynağından X Noether simetrisine karşılık gelen I ilk integral,*

$$X^{[1]} I = 0,$$

eşitliğini sağlamalıdır, yani X, ilk integralin bir simetrisidir.

Kanıt. Kanıt için Ibragimov, Kara ve Mahomed (1998), Sarlet ve Cantrijn (1981), Kara, Vawda ve Mahomed (1994), Mahomed, Leach ve Kara (1993) kaynaklarına bakılabilir. □

Teorem 3.3.2. *$y'' = N(x, y, y')$ denkleminin Lagrangian $L(x, y, y')$ için bir Noether simetrisi varsa o zaman $y'' = N(x, y, y')$ denkleminin integral ifadesi şeklinde çözümü vardır (Muatjetjeja, & Khalique, 2011).*

Kanıt. Bu kanıt denklem (3.2.14) ve Teorem (3.3.1)'den elde edilebilir. □

3.3.2 $y'' = 0$ denkleminin $L = \frac{1}{2}y'^2$ Lagrangian yardımıyla Noether simetri yöntemiyle analizi

$y'' = 0$ denklemini $L = \frac{1}{2}y'^2$ Lagrangian yardımıyla Noether simetri yöntemiyle çözebilmek için denklemin Killing tipi denklemi

$$f' = X^{[1]}L + \xi' L,$$

şeklindedir.

$$X^{[1]} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \Big(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2\Big)\frac{\partial}{\partial y'},$$

olduğu hatırlanırsa ve L, $X^{[1]}$'e uygulanırsa

$$X^{[1]}L = \Big(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2\Big)y',$$

ve

$$\xi' = \xi_x + \xi_y y',$$

$$f' = f_x + f_y y',$$

eşitlikleri Killing tipi denklemde yerine konursa

$$f_x + f_y y' = \Big(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2\Big)y' + \Big(\xi_x + \xi_y y'\Big)\frac{1}{2}y'^2,$$

elde edilir ve bu denklem düzenlenirse

$$f_x + f_y y' = \Big(-\xi_y + \frac{1}{2}\xi_y\Big)y'^3 + \Big(\eta_y - \xi_x + \frac{1}{2}\xi_x\Big)y'^2 + \eta_x y',$$

Killing tipi denklem şeklinde elde edilir.

ξ, η ve f fonksiyonları y' ifadesini içermediğinden, y''nin farklı kuvvetlerinin katsayıları eşitliği sağlayacak şekilde eşitlenirse aşağıdaki denklemler

$$y'^3: \quad \frac{1}{2}\xi_y - \xi_y = 0, \tag{3.3.28}$$

$$y'^2: \quad \eta_y - \xi_x + \frac{1}{2}\xi_x = 0, \tag{3.3.29}$$

$$y'^1: \quad \eta_x = f_y, \tag{3.3.30}$$

$$y'^0: \quad f_x = 0, \tag{3.3.31}$$

elde edilir. (3.3.28) denkleminden

$$\frac{1}{2}\xi_y - \xi_y = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\xi_y = 0,$$

$$\xi_y = 0,$$

$$\xi = a(x), \tag{3.3.32}$$

şeklinde elde edilir. (3.3.29) denklemi

$$\eta_y - \xi_x + \frac{1}{2}\xi_x = 0,$$

$$\eta_y - \frac{1}{2}\xi_x = 0,$$

şeklinde olduğuna göre (3.3.32) denkleminin gerekli olan türevi

$$\xi_x = a'(x),$$

(3.3.29) denkleminde yerine konursa ve düzenlenirse

$$\eta_y = \frac{1}{2}a'(x), \tag{3.3.33}$$

(3.3.29) denklemi şeklinde elde edilir ve (3.3.33) denklemi y'ye göre integre edilirse

$$\eta = \frac{1}{2}a'y + b(x), \tag{3.3.34}$$

şeklinde elde edilir. (3.3.30) denklemi

$$\eta_x = f_y,$$

şeklinde olduğuna göre (3.3.34) denkleminin gerekli olan türevi

$$\eta_x = \frac{1}{2}a''y + b',$$

(3.3.30) denkleminde yerine konursa

$$\frac{1}{2}a''y + b' = f_y, \tag{3.3.35}$$

(3.3.30) denklemi şeklinde elde edilir ve (3.3.35) denklemi y'ye göre integre edilirse

$$f = \frac{1}{4}a''y^2 + b'y + c(x), \tag{3.3.36}$$

şeklinde elde edilir. (3.3.31) denklemi

$$f_x = 0,$$

şeklinde olduğuna göre (3.3.36) denkleminin gerekli olan türevi

$$f_x = \frac{1}{4}a'''y^2 + b''y + c',$$

(3.3.31) denkleminde yerine konursa

$$\frac{1}{4}a'''y^2 + b''y + c' = 0,$$

(3.3.31) denklemi şeklinde elde edilir. y'nin farklı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler

$$y^2: \quad \frac{1}{4}a''' = 0, \tag{3.3.37}$$

$$y^1: \quad b'' = 0, \tag{3.3.38}$$

$$y^0: \quad c' = 0, \tag{3.3.39}$$

elde edilir.

(3.3.37) denkleminden

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \tag{3.3.40}$$

(3.3.38) denkleminden

$$b(x) = b_0 + b_1 x, \tag{3.3.41}$$

ve (3.3.39) denkleminden

$$c(x) = c_0, \tag{3.3.42}$$

şeklinde elde edilir. O halde (3.3.32) denklemi

$$\xi = a(x),$$

şeklinde olduğuna göre (3.3.40) eşitliği denklemde yerine konursa

$$\xi = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

şeklinde elde edilir. (3.3.34) denklemi

$$\eta = \frac{1}{2} a' y + b(x),$$

şeklinde olduğuna göre (3.3.40) eşitliğinin gerekli olan türevi ve (3.3.41) eşitliği denklemde yerine konursa

$$\eta = \frac{1}{2}\Big(a_1 + 2a_2 x\Big) y + b_0 + b_1 x,$$

şeklinde elde edilir. (3.3.36) denklemi

$$f = \frac{1}{4} a'' y^2 + b' y + c(x),$$

şeklinde olduğuna göre (3.3.40) ve (3.3.41) eşitliklerinin gerekli olan türevleri ve (3.3.42) eşitliği denklemde yerine konursa

$$f = \frac{1}{2} a_2 y^2 + b_1 y + c_0,$$

ve $c_0 = 0$ için

$$f = \frac{1}{2} a_2 y^2 + b_1 y,$$

şeklinde elde edilir.

Simetri üreteçleri ise sırasıyla;

$a_0 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olmak üzere:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$a_1 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olmak üzere:

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial y},$$

$a_2 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olmak üzere:

$$X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y},$$

$b_0 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olmak üzere:

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial y},$$

$b_1 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olmak üzere:

$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial y},$$

şeklinde elde edilir. Yani Noether simetri üreteçleri;

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad X_5 = x\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklindedir.

Tüm durumlar için ilk integrallerin hesaplanması için

$$I = f - \left(\xi L + (\eta - y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}\right),$$

denklemi kullanılırsa

(i) $a_0 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olması durumunda, $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, Noether simetri üreteci için $\xi = 1$, $\eta = 0$, $f = 0$ ve $\dfrac{\partial L}{\partial y'} = \dfrac{\partial\left(\frac{1}{2}y'^2\right)}{\partial y'} = y'$ buradan

$$I = f - \left(\xi L + (\eta - y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}\right),$$

$$I = -\left(\frac{1}{2}y'^2 - y'y'\right),$$

eşitlikleri yardımıyla

$$I = \frac{1}{2}y'^2,$$

ilk integrali şeklinde elde edilir.

(ii) $a_1 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olması durumunda, $X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{2}y\dfrac{\partial}{\partial y}$, Noether simetri üreteci için $\xi = x$, $\eta = \dfrac{1}{2}y$ ve $f = 0$ olup buradan

$$I = f - \left(\xi L + (\eta - y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}\right),$$

$$= -\left(x\left(\frac{1}{2}y'^2\right) + (\frac{1}{2}y - y'x)y'\right),$$

eşitlikleri yardımıyla

$$I = \frac{1}{2}xy'^2 - \frac{1}{2}yy',$$

ilk integrali şeklinde elde edilir.

(iii) $a_2 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olması durumunda, $X_3 = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$, Noether simetri üreteci için $\xi = x^2$, $\eta = xy$ ve $f = \dfrac{y^2}{2}$ olup buradan

$$I = f - \left(\xi L + (\eta - y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}\right),$$

$$= \frac{y^2}{2} - \left(x^2\left(\frac{1}{2}y'^2\right) + (xy - y'x^2)y'\right),$$

eşitlikleri yardımıyla

$$I = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}x^2y'^2 - xyy',$$

ilk integrali şeklinde elde edilir.

(iv) $b_0 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olması durumunda, $X_4 = \dfrac{\partial}{\partial y}$, Noether simetri üreteci için $\xi = 0$, $\eta = 1$ ve $f = 0$ olup buradan

$$\begin{aligned} I &= f - \left(\xi L + (\eta - y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}\right), \\ &= -(1 - y'0)y', \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$I = -y',$$

ilk integraline ulaşılır.

(v) $b_1 = 1$ ve diğer tüm katsayılar "0" olması durumunda, $X_5 = x\dfrac{\partial}{\partial y}$, Noether simetri üreteci için $\xi = 0$, $\eta = x$ ve $f = y$ olup buradan

$$\begin{aligned} I &= f - \left(\xi L + (\eta - y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}\right), \\ &= y - (x - y'0)y', \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$I = y - xy',$$

ilk integrali şeklinde elde edilir.

Teorem 3.3.1 yardımıyla her X_i için,

$$X_i^{[1]} I = 0 \quad , \quad i = 1, 2, ..., 5 \quad (*)$$

sağlandığını, yani X_i'lerin I'nın simetrisi olduğunu gösterelim. (2.2.6) eşitliğinden, biliyoruz ki

$$X^{[1]} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \left(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2\right)\frac{\partial}{\partial y'},$$

şeklindedir ve tüm durumlar için $(*)$ doğruluğu incelenirse;

(i) $X_1^{[1]} = \dfrac{\partial}{\partial x}$.

$$X_1^{[1]} I = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{2}y'^2\right) = 0.$$

(ii) $X_2^{[1]} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial y} + \left(0 + (\tfrac{1}{2} - 1)y' - 0y'^2\right)\frac{\partial}{\partial y'},$

$$= x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}y'\frac{\partial}{\partial y'}.$$

$$X_2^{[1]}I = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}y'\frac{\partial}{\partial y'}\right)\left(\frac{1}{2}xy'^2 - \frac{1}{2}yy'\right),$$

$$= \frac{1}{2}xy'^2 - \frac{1}{4}yy' + \frac{1}{4}y'y - \frac{1}{2}xy'^2 = 0.$$

(iii) $X_3^{[1]} = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + \left(y + (x - 2x)y' - 0y'^2\right)\frac{\partial}{\partial y'},$

$$= x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + (y - xy')\frac{\partial}{\partial y'}.$$

$$X_3^{[1]}I = \left(x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + (y - xy')\frac{\partial}{\partial y'}\right)\left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}x^2y'^2 - xyy'\right),$$

$$= -x^2yy' + x^3y'^2 - x^2yy' + xy^2 - (y - xy')(xy - x^2y'),$$

$$= -x^2yy' + x^3y'^2 - x^2yy' + xy^2 - xy^2 + x^2y'y + x^2yy' - x^3y'^2 = 0.$$

(iv) $X_4^{[1]} = \frac{\partial}{\partial y}.$

$$X_4^{[1]}I = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-y'\right) = 0.$$

(v) $X_5^{[1]} = x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'}.$

$$X_5^{[1]}I = \left(x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'}\right)\left(y - xy'\right),$$

$$= x - x = 0.$$

Her X_i için $(*)$ sağlandığı görülmektedir. Yani her X_i simetri üreteci, Lagrangian L'ye karşılık gelen I ilk integrallerin Noether simetrileridir. O halde Teorem 3.3.2 den verilen denkleminin integral ifadesi şeklinde çözümü vardır. Bunun için $X_5 = x\frac{\partial}{\partial y}$ simetrisini ve Lagrangian L'ye karşılık gelen $I = y - xy'$ ilk integralini ele alalım. İndirgenmiş denklem

$$I = c \quad , \quad c = sabit$$

şeklinde olduğuna göre yani

$$y - xy' = c,$$

olduğundan ve bu denklem

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = -\frac{c}{x^2},$$

şeklinde yazılabildiğinden her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\frac{y}{x} = -\int \frac{c}{x^2},$$

$$\frac{y}{x} = \frac{c}{x} + h,$$

$$y = c + hx,$$

elde edilir. O halde difensiyel denklemin çözümü

$$y = c + hx,$$

şeklinde elde edilir.

Ancak X_5, birinci mertebeden denklemin bir simetrisidir, bu nedenle bu denklemi çözmek için

$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow X_5 = x\frac{\partial}{\partial u},$$

kullanabiliriz. $X_5 = x\frac{\partial}{\partial y}$ için (u, v) kanonik koordinatlarını elde edelim. Bunun için aşağıdaki denklemler

$$X(u) = \xi(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 1,$$

$$X(v) = \xi(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

X_5 simetri üreteci için yazılırsa

$$X_5(u) = x\frac{\partial u}{\partial y} = 1, \tag{3.3.43}$$

$$X_5(v) = x\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3.3.44}$$

denklemleri elde edilir. Burada $v = v(u)$ olduğunu unutmayalım. (3.3.43) denklemi için karakteristik denklem

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{1},$$

olduğundan denklemin bu

$$\frac{du}{1} = \frac{dx}{0},$$

kısmı kullanılırsa

$$u = x,$$

elde edilir. (3.3.44) denklemi için karakteristik denklem

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{x} = \frac{dv}{0},$$

olduğundan denklemin bu

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{x},$$

kısmı kullanılırsa

$$x = c,$$

elde edilir. O halde

$$\frac{dy}{x} = \frac{dy}{c},$$

olduğundan

$$v = \frac{y}{c},$$

$$v = \frac{y}{x},$$

şeklinde elde edilir. O halde kanonik koordinatlar

$$(u, v) = \left(x, \frac{y}{x}\right), \tag{3.3.45}$$

şeklinde elde edilir. (3.3.45) kanonik koordinatları yardımıyla y'nin türevi

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(vx) = x\frac{dv}{dx} + v,$$

$$= x\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} + v,$$

şeklinde elde edilir. Buradan X_5 Noether simetrisi için indirgenmiş diferansiyel denklem

$$y - xy' = c,$$

$$vx - x\left(x\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} + v\right) = c,$$

$$vx - \left(x^2 \frac{dv}{du} \frac{du}{dx} + vx \right) = c,$$

$$-x^2 \frac{dv}{du} \frac{du}{dx} = c, \tag{3.3.46}$$

şeklinde elde edilir ve $u = x$ olduğundan (3.3.46) denklemi

$$-u^2 \frac{dv}{du} = c,$$

denklemine denktir. O halde bu ayrılabilir diferansiyel denklemin çözümü

$$v = \frac{c}{u} + h,$$

olup, burada $u = x$ ve $v = \frac{y}{x}$, olduğu hatırlanırsa $y'' = 0$ denkleminin çözümü

$$y = c + hx,$$

şeklinde elde edilir.

3.3.3 $y'' + \frac{2}{x} y' = 3y^5$ Emden-Fowler denkleminin $L = \frac{1}{2} x^2 y'^2 + \frac{1}{2} x^2 y^6$ Lagrangian yardımıyla Noether simetri yöntemiyle analizi

$y'' + \frac{2}{x} y' = 3y^5$ Emden-Fowler denklemini $L = \frac{1}{2} x^2 y'^2 + \frac{1}{2} x^2 y^6$ Lagrangian yardımıyla Noether simetri yöntemiyle çözebilmek için denklemin $L = \frac{1}{2} x^2 y'^2 + \frac{1}{2} x^2 y^6$ eşitliğinden

$$\frac{\partial L}{\partial x} = xy'^2 + xy^6,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3x^2 y^5,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = x^2 y',$$

elde edilir ve

$$\xi' = \xi_x + \xi_y y',$$

$$f' = f_x + f_y y',$$

olduğu hatırlanırsa (3.2.8) Killing tipi denkleminden

$$f_x + f_y y' = \xi\Big(xy'^2 + xy^6\Big) + \eta\Big(3x^2y^5\Big) + \Big(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2\Big)x^2y'$$

$$+\Big(\xi_x + \xi_y y'\Big)\Big(\frac{1}{2}x^2y'^2 + \frac{1}{2}x^2y^6\Big),$$

elde edilir ve bu denklem düzenlenirse

$$f_x + f_y y' = \Big(-x^2\xi_y + \frac{1}{2}x^2\xi_y\Big)y'^3 + \Big(x\xi + x^2(\eta_y - \xi_x) + \frac{1}{2}x^2\xi_x\Big)y'^2$$

$$+\Big(x^2\eta_x\Big)y' + xy^6\xi + 3x^2y^5\eta + \frac{1}{2}x^2y^6\xi_x,$$

denklemi elde edilir. ξ, η ve f fonksiyonları y' ifadesini içermediğinden, y''nin farklı kuvvetlerinin katsayıları eşitliği sağlayacak şekilde eşitlenirse aşağıdaki denklemler

$$y'^3: \quad -x^2\xi_y + \frac{1}{2}x^2\xi_y = 0, \tag{3.3.47}$$

$$y'^2: \quad x\xi + x^2(\eta_y - \xi_x) + \frac{1}{2}x^2\xi_x = 0, \tag{3.3.48}$$

$$y'^1: \quad x^2\eta_x = f_y, \tag{3.3.49}$$

$$y'^0: \quad xy^6\xi + 3x^2y^5\eta + \frac{1}{2}x^2y^6\xi_x = f_x, \tag{3.3.50}$$

elde edilir. (3.3.47) denklemi

$$-x^2\xi_y + \frac{1}{2}x^2\xi_y = 0,$$

şeklinde olduğuna göre

$$-\frac{1}{2}x^2\xi_y = 0,$$

$$\xi = a(x), \tag{3.3.51}$$

şeklinde elde edilir. (3.3.48) denklemi

$$x\xi + x^2(\eta_y - \xi_x) + \frac{1}{2}x^2\xi_x = 0,$$

şeklinde olduğuna göre (3.3.51) denklemi ve gerekli olan türev

$$\xi_x = a'(x)$$

(3.3.48) denkleminde yerine konursa ve düzenlenirse

$$xa + x^2\eta_y - \frac{1}{2}x^2a' = 0,$$

$$\eta_y = \frac{1}{2}a' - \frac{a}{x}, \tag{3.3.52}$$

(3.3.48) denklemi şeklinde elde edilir. (3.3.52) denklemi y'ye göre integre edilirse

$$\eta = \left(\frac{1}{2}a' - \frac{a}{x}\right)y + b(x), \tag{3.3.53}$$

şeklinde elde edilir. (3.3.49) denklemi

$$x^2\eta_x = f_y,$$

şeklinde olduğuna göre (3.3.53) denkleminin gerekli olan türevi

$$\eta_x = \left(\frac{1}{2}a'' - \frac{a'}{x} + \frac{a}{x^2}\right)y + b', \tag{3.3.54}$$

(3.3.49) denkleminde yerine konursa

$$f_y = \left(\frac{1}{2}a''x^2 - a'x + a\right)y + b'x^2, \tag{3.3.55}$$

(3.3.49) denklemi şeklinde elde edilir ve (3.3.55) denklemi y'ye göre integre edilirse

$$f = \left(\frac{1}{2}a''x^2 - a'x + a\right)\frac{y^2}{2} + b'x^2y + c(x), \tag{3.3.56}$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$f_x = \frac{1}{4}x^2a'''y^2 + b''x^2y + 2b'xy + c', \tag{3.3.57}$$

olarak elde edilir. (3.3.50) denklemi

$$f_x = xy^6\xi + 3x^2y^5\eta + \frac{1}{2}x^2y^6\xi_x,$$

şeklinde olduğuna göre (3.3.50) denkleminde (3.3.51) ve (3.3.53) denklemleri kullanılırsa

$$f_x = xy^6a + 3x^2y^5\left(\frac{1}{2}a'y - \frac{a}{x}y + b\right) + \frac{1}{2}x^2y^6a',$$

elde edilir ve bu denklem düzenlenirse

$$f_x = -2xy^6a + 2x^2y^6a' + 3x^2y^5b, \tag{3.3.58}$$

şeklinde elde edilir. O halde (3.3.57) ve (3.3.58) denklemlerinden

$$\frac{1}{4}x^2a'''y^2 + b''x^2y + 2b'xy + c' = -2xy^6a + 2x^2y^6a' + 3x^2y^5b, \tag{3.3.59}$$

olduğu görülür ve bu denklem düzenlenirse

$$(2xa - 2x^2a')y^6 - 3x^2by^5 + \frac{1}{4}x^2a'''y^2 + (b''x^2 + 2b'x)y + c' = 0, \tag{3.3.60}$$

denklemi elde edilir. Buradan y'nin farklı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler

$$y^6: \quad 2xa - 2x^2a' = 0, \tag{3.3.61}$$

$$y^5: \quad 3x^2b = 0, \tag{3.3.62}$$

$$y^2: \quad \frac{1}{4}x^2a''' = 0, \tag{3.3.63}$$

$$y^1: \quad b''x^2 + 2b'x = 0, \tag{3.3.64}$$

$$y^0: \quad c' = 0, \tag{3.3.65}$$

elde edilir. (3.3.61) denkleminden

$$2xa - 2x^2a' = 0,$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{x},$$

olup

$$\ln a = \ln x + \ln A_1,$$

$$a = xA_1, \tag{3.3.66}$$

elde edilir. $\xi = a(x)$ olduğuna göre

$$\xi = xA_1 \quad , \quad A_1 = sabit$$

şeklinde elde edilir. (3.3.53) denklemi

$$\eta = \frac{1}{2}a'y - \frac{a}{x}y + b,$$

şeklinde olduğuna göre denklemde (3.3.66) denklemi yerine konursa

$$\eta = -\frac{1}{2}A_1 y + b,$$

(3.3.53) denklemi şeklinde elde edilir ve (3.3.62) denkleminden

$$b = 0, \tag{3.3.67}$$

olarak elde edildiğinden

$$\eta = -\frac{1}{2}A_1 y,$$

şeklinde elde edilir. O halde X Noether simetri üreteci

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y},$$

$$= xA_1\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}A_1 y\frac{\partial}{\partial y},$$

$A_1 = 2$ özel durumu için

$$X = 2x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y},$$

şeklinde elde edilir. (3.3.56) denklemi

$$f = \left(\frac{1}{2}a''x^2 - a'x + a\right)\frac{y^2}{2} + b'x^2y + c(x),$$

şeklinde olduğuna göre denklemde (3.3.66) ve (3.3.67) eşitlikleri yerine konursa

$$f = c(x), \tag{3.3.68}$$

şeklinde elde edilir. Fakat, (3.3.58) denklemi

$$f_x = -2xy^6a + 2x^2y^6a' + 3x^2y^5b,$$

şeklinde olduğuna göre denklemde aynı eşitlikler yerine konursa

$$f_x = 0, \tag{3.3.69}$$

olarak elde edilir. O halde (3.3.68) denkleminin x'e göre türevi

$$f_x = c'(x),$$

olduğuna göre (3.3.69) denkleminden

$$c'(x) = 0,$$

elde edilir. Buradan

$$f = c \quad , \quad c = sabit \tag{3.3.70}$$

ve $c = 0$ olarak alınırsa

$$f = 0, \tag{3.3.71}$$

şeklinde elde edilir. O halde Noether simetri üreteci için $\xi = 2x$, $\eta = -y$ ve $\dfrac{\partial L}{\partial y'} = x^2 y'$ olduğu hatırlanırsa buradan

$$I = f - \left(\xi L + (\eta - \xi y')\frac{\partial L}{\partial y'}\right),$$

$$\begin{aligned} I &= -2x\left(\frac{1}{2}x^2 y'^2 + \frac{1}{2}x^2 y^6\right) - \left(-y - y'2x\right)x^2 y', \\ &= x^3 y'^2 - x^3 y^6 + x^2 y y', \end{aligned}$$

ilk integral şeklinde elde edilir ve birinci mertebeden indirgenmiş denklem

$$x^3 y'^2 + x^2 y y' - x^3 y^6 = c_1 \quad , \quad c_1 = sabit$$

şeklindedir. Bu birinci mertebeden denklemi çözmek için kanonik değişkenleri veya

$$X = 2x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y},$$

invaryantını kullanabiliriz. İnvaryantı,

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y},$$

$$\frac{1}{2}\ln x = -\ln y + \ln c,$$

$$x^{\frac{1}{2}} y = c,$$

$$u = yx^{\frac{1}{2}},$$

denklemin değişmezidir. Buradan

$$y = \frac{u}{x^{\frac{1}{2}}},$$

şeklinde elde edilir. İndirgenmiş denklem için y'nin türevleri

$$y' = \frac{u'x^{\frac{1}{2}} - u\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}}{x},$$

$$= \frac{u'}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{u}{2x^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'^2 = \frac{u'^2}{x} + \frac{u^2}{4x^3} - \frac{uu'}{x^2},$$

şeklindedir. Bulduğumuz bu ifadeler indirgenmiş denklemde yerine konursa

$$x^3\left(\frac{u'^2}{x} + \frac{u^2}{4x^3} - \frac{uu'}{x^2}\right) + x^2\frac{u}{x^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{u'}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{u}{2x^{\frac{3}{2}}}\right) - x^3\frac{u^6}{x^3} = c_1,$$

$$x^2u'^2 + \frac{u^2}{4} - xuu' + xuu' - \frac{u^2}{2} - u^6 = c_1,$$

$$x^2u'^2 - \frac{u^2}{4} - u^6 = c_1,$$

$$x^2u'^2 = c_1 + \frac{u^2}{4} + u^6,$$

$$x\frac{du}{dx} = \epsilon\sqrt{c_1 + \frac{u^2}{4} + u^6} \quad , \quad \epsilon = \pm 1$$

$$\frac{du}{\epsilon\sqrt{c_1 + \frac{u^2}{4} + u^6}} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\epsilon\sqrt{c_1 + \frac{u^2}{4} + u^6}} = \ln x + c_2,$$

$u = yx^{\frac{1}{2}}$ değişmezi ve gerekli eşitlikler integralde yerine konursa

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dy + y\frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}}{\epsilon\sqrt{c_1 + \frac{y^2x}{4} + y^6x^3}} = \ln x + c_2,$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi, bilinen yöntemlerle çözülemeyen Emden-Fowler denkleminin Noether simetrisi sayesinde mertebesi indirgenerek çeşitli nümerik integral çözüm yöntemleriyle çözülebilecek duruma getirilmiştir.

Bölüm 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, adi diferansiyel denklemler için Lie teorisi, Noether teoremi ve ilk integraller üzerinde durulmuştur. Değişmezlik fikrinin, farklı model ve süreçlerden kaynaklanan adi diferansiyel denklemlerin simetrileri ve ilk integrallerinin araştırılmasında önemli bir rol oynadığı gösterilmiştir. Lie ve Noether teorileri bu analiz için kullanılan yöntemlerdir. Birinci ve ikinci mertebeden Lagrangianlara karşılık gelen Noether teoremi tanıtılmış ve ilk integrallerin elde edilmesi verilmiştir. Bunlar Emden-Fowler denklemi ve bazı adi diferansiyel denklemler üzerinde gösterilmiştir. Sonuç olarak kendine özgü yapısı sebebiyle bilinen yöntemlerle çözülemeyen adi diferansiyel denklemlerin çözümlerine Lie ve Noether simetri yöntemleri yardımıyla nasıl ulaşılacağı açıkça irdelenmiştir.

Araştırmacılara Lie ve Noether simetri yöntemlerini analitik çözümü elde edilemeyen diğer lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaşmakta kullanmaları önerilir.

KAYNAKÇA

[1] Bluman, G. W., & Cole, J. D. (1974). *Similarity Methods for Differential Equations*. New York: Springer.

[2] Bluman, G. W., & Kumei, S. (1989). *Symmetries and Differential Equations*. New York: Springer.

[3] Brewer, J. W., & Smith, M. K. (1981). *Emmy Noether A tribute to her life and work*. New York: Marcel Dekker.

[4] Cantwell, B. J. (2002). *Introduction to Symmetry Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

[5] Dresner, L. (1999). *Applications of Lie's Theory of Ordinary and Partial Differential Equations*. Bristol: Institute of Physics Publishing.

[6] Ermakov, V. P. (1880). *Second order differential equations. Conditions of complete integrability*. Univ. Izv. Kiev, Ser. III 9, 1-25.

[7] Goldman, L. (1957). *Specialisation and Picard-Vessiot theory*. Trans. AMS. 85, 343-356.

[8] Govinder, K. S., & Leach, P. G. L. (1996). *The nature and uses of symmetries of ordinary differential equations*. South African Journal of Science 9, 23-28.

[9] Harausgegeben von Jacobson, N. (1983). *Emmy Noether Gesammelte Abhandlungen*. Berlin: Springer-Verlag.

[10] Hydon, P. E. (2000). *Symmetry Methods for Differential Equations*. Cambridge: Cambridge University Press.

[11] Ibragimov, N. H. (1992). *Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics (for the 150th anniversary of Sophus Lie)*. Uspekhi Mat. Nauk 47, No. 4, 83-144. (1992). English trans., Russian Math. Surveys, 47:2, 89-156. Reprinted in: Ibragimov, N. H. (2006). *Selected Works*, Vol. I. Karlskrona: ALGA Publications, Paper 21.

[12] Ibragimov, N. H. (1994). Ed. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*. Vol. 1: *Symmetries, Exact Solutions and Conservation laws*. Boca Raton: CRC Press Inc.

[13] Ibragimov, N. H. (1995). Ed. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*. Vol. 2: *Applications in Engineering and Physical Sciences*. Boca Raton: CRC Press Inc.

[14] Ibragimov, N. H. (1996). Ed. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*. Vol. 3: *New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods*. Boca Raton: CRC Press Inc.

[15] Ibragimov, N. H. (1999). *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*. Chichester: John Wiley & Sons.

[16] Ibragimov, N. H., Kara, A. H., & Mahomed F. M. (1998). *Lie-Bäcklund and Noether symmetries with applications*. Nonlinear Dynam., Vol. 15, No. 2, 115.

[17] James, I. (2013). *Büyük Matematikçiler & Euler'den Von Neumann'a*. 2. Basım. Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları.

[18] Kaplansky, I. (1957). *An introduction to differential algebra*. Hermann: Paris.

[19] Kara, A. H., Vawda, F. E., & Mahomed, F. M. (1994). *Symmetries of first integrals and solutions of differential equations*. Lie Groups and Their Applications 1, 27.

[20] Kass-Simon, G., & Farnes, P. (1990). *Women of Science: Righting the record*. Indianapolis: Indiana University Press.

[21] Kolchin, E. R. (1973). *Differential algebra and algebraic groups*. New York: Academic Press.

[22] Mahomed, F. M., & Leach, P. G. L. (1990). *Symmetry Lie algebras of nth-order ordinary differential equations*. J. Math. Anal. Appl. 151, 80-107.

[23] Mahomed, F. M., Leach, P. G. L., & Kara, A. H. (1993). *Lie and Noether counting theorems for one-dimensional systems*. J. Math. Anal. Appl. 178, 11.

[24] Muatjetjeja, B., & Khalique C. M. (2011, September). *Exact solutions of the generalized Lane–Emden equations of the first and second kind*. Pramana - J. Phys., Vol. 77, No. 3, 545–554, doi: 10.1007/s12043-011-0174-4.

[25] Noether, E. (1918). *Invariante Variationsprobleme*. Kgl. Ges. d. Wiss. Nachrichten, Math-phys. Kl. Heft 2, 235-257.

[26] Olver, P. J. (1986 2nd ed. 1993). *Applications of Lie groups to Differential Equations*. New York: Springer.

[27] Ovsyannıkov, L. V. (1978). *Group Analysis of Differential Equations*. Moscow: Nauka. (1982). English trans., ed. W. F. Ames., New York: Academic Press. See also Ovsyannikov, L. V. (1962). *Group Properties of Differential equations*. Novosibirsk: Published in Siberian Branch of AS USSR.

[28] Ritt, J. F. R. (1950). *Differential algebra*. XXXIII. (Providence, RI: AMS).

[29] Sarlet, W., & Cantrijn, F. (1981). *Generalizations of Noether's theoremin Classical Mechanics*. SIAM Review 23, 467-494.

[30] Stephani, H. (1989). *Differential Equations: Their Solution Using Symmetries*. New York: Cambridge University Press.

[31] Stephen, M. C., & Andrew, C. (1997). *On the Asymptotic solutions of a high-order nonlinear ordinary differential equation*. Proc. R. Soc. Lond. A 453, 711-728.

[32] Yaglom, I. M. (1988). *Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century*. trans. Sergei Sossinsky. Boston: Birkhauser.