MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ LANE-EMDEN DENKLEMİNİN NOETHER SİMETRİ YÖNTEMİ İLE İKİ KERE İNDİRGEMESİ VE LİE SİMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serdar BİRBEN

Ana Bilim Dalı: MATEMATİK

Programı: MATEMATİK YÜKSEK LİSANS

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Müge MEYVACI

Eş Danışman: Dr. Ögr. Üyesi Ahmet BAKKALOĞLU

Ocak 2024

TC.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ LANE-EMDEN DENKLEMİNİN NOETHER SİMETRİ YÖNTEMİ İLE İKİ KERE İNDİRGEMESİ VE LİE SİMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serdar BİRBEN

Ana Bilim Dalı: MATEMATİK

Programı: MATEMATİK YÜKSEK LİSANS

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Müge MEYVACI

Eş Danışman: Dr. Ögr. Üyesi Ahmet BAKKALOĞLU

Ocak 2024

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Ücret karşılığı başka kişilere yazdırmadığımı (dikte etme dışında)
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

GENELLEŞTİRİLMİŞ LANE-EMDEN DENKLEMİNİN NOETHER SİMETRİ YÖNTEMİ İLE İKİ KERE İNDİRGEMESİ VE LİE SİMETRİSİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında genel amaç, Lie ve Noether simetri yöntemlerinin adi diferansiyel denklemlere uygulanarak mertebelerinin indirgemesini ve çözümlerini incelemektir.

Birinci bölümde, Lie ve Noether simetrileri hakkında bilgiler verilerek literatürde lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için geliştirilen metotlardan bazıları ifade edilip genişletilmiş Lane-Emden adi diferansiyel denkleminin farklı formlarının çözümleri için çalışılmış bazı yöntemlere değinilmiştir. Sonraki alt bölümlerde Noether teoreminin oluşmasında önemi olan fonksiyonel kavramı, varyasyonel hesabın temel lemması ve varyasyonel notasyondan temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, fonksiyonel problemi birçok değişkene genelleştirerek varyasyonel hesaptan elde edilen ünlü Euler-Lagrange denklemi türetilmiştir. Bununla beraber örnek olarak bir fonksiyonelin ekstramelleri elde edilmiştir. Fizikte önemli bir yeri olan en az eylem ilkesinin bir örneği olan Hamilton prensibi tanıtılıp Euler-Lagrange denklemleri ile ilişkisi verilmiş ve bölümün son kısmında birden fazla bağımsız ve bağımlı değişken için Euler-Lagrange denklemi tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, Noether simetri yöntemi için önemi olan Euler-Lagrange operatörü, toplamsal tanımı ve bununla ilgili teorem ve lemmalar kanıtlarıyla verilerek örnekler çözülmüştür,

Dördüncü bölümde, Lie simetri dönüşümleri ve grupları, sonsuz küçük dönüşümler, Lie'nin birinci temel teoremi ifade edilerek sonsuz küçük üreteçler tanımlanmış ve örnekler verilmiştir. İnvaryant fonksiyonlar, tanım ve teorem şeklinde sunularak bunlar yardımıyla kanonik koordinatlar tanıtılmıştır. Örneklerle bazı dönüşüm grupları için simetri üreteci bulunarak kanonik koordinatlar elde edilmiştir. Genişletilmiş Lie grupları ve sonsuz küçükler hakkında geniş bilgiler sunularak eğriler, yüzeyler ve noktaların invaryantlığı tanımlanmıştır. Bölümün son kısmında çok parametreli dönüşümler ve Lie cebri tanımı verilmiştir.

Beşinci bölümde, birinci ve daha fazla mertebeden adi diferansiyel denklemlerin invaryantlık şartı açıklanarak bazı simetri gruplarının invaryant bıraktığı denklemlerin

genel formları örneklerle elde edilmiştir. Lie simetri yöntemi, bazı adi diferansiyel denklemlere uygulanarak çözümleri bulunmuş ve analiz edilmiştir.

Altıncı bölümde, diferansiyel denklemlerin mertebesinin indirgemesi ve çözümleri için ilk integrallerinin belirlenmesinde önemli yeri olan bir başka simetri yöntemi, Noether simetri yaklaşımıyla ilgili tanım ve teoremler verilmiş ve literatürde üzerinde çalışılan genelleştirilmiş Lane-Emden denkleminin ayrıntılı şekilde hesaplar yapılarak ilk integralleri elde edilip çözümleri incelenmiştir.

Yedinci ve son bölümde, tez içeriği hakkında son değerlendirmeler yapılarak okuyucuya önerilerde bulunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Varyasyon, Lie simetri grubu, Lie cebri, invaryant, sonsuz küçük, simetri üreteci, Euler-Lagrange denklemi, Lane-Emden denklemi, ilk integral, Noether simetrisi, fonksiyonel, Euler- Lagrange operatörü.

TWICE REDUCTION OF THE GENERALIZED LANE-EMDEN EQUATION WITH THE NOETHER SYMMETRY METHOD AND LIE SYMMETRY

ABSTRACT

The general purpose of this thesis is to examine the reduction of orders and their solutions by applying Lie and Noether symmetry methods to ordinary differential equations.

In the first part, information about Lie and Noether symmetries is given, some of the methods developed in the literature for the solution of nonlinear differential equations are expressed, and some methods that have been studied for the solution of different forms of the extended Lane-Emden differential equation are mentioned. In the following subsections, the functional concept, which is important in the formation of Noether's theorem, the basic lemma of variational calculus and basic information about variational notation are given.

In the second part, the famous Euler-Lagrange equation obtained from variational calculus is derived by generalizing the functional problem to many dependent variables. However, for example, extramels of a functional have been obtained. Hamilton's principle, which is an example of the principle of least action, which has an important place in physics, is introduced and its relationship with the Euler-Lagrange equations is given, and in the last part of the chapter, the Euler-Lagrange equation for more than one independent and dependent variable is introduced.

In the third chapter, examples are solved by giving the additive definition of the Euler-Lagrange operator, which is important for the Noether symmetry method, and related theorems and lemmas with their proofs.

In the fourth chapter, Lie symmetry transformations and groups, infinitesimal transforma-, Lie's first fundamental theorem are stated, infinitesimal generators are defined and examples are given. Invariant functions are presented in the form of definitions and theorems, and canonical coordinates are introduced with the help of these. With examples, canonical coordinates were obtained by finding symmetry generators for some transformation groups. By providing extensive information about extended Lie groups and infinitesimals, the invariance of curves, surfaces and points is defined. In the last part of the chapter, multi-parameter transformations and Lie algebra definition are given.

In the fifth chapter by explaining the invariance condition of first and higher order ordinary differential equations, the general forms of the equations in which some symmetry groups remain invariant are obtained with examples. The Lie symmetry method was applied to some differential equations and their solutions were analyzed.

In the sixth chapter, definitions and theorems related to the Noether symmetry approach, another symmetry method that has an important place in reducing the order of differential equations and determining their first integrals for their solutions, are given and the first integrals of the generalized Lane-Emdan equation, which is studied in the literature, are calculated in detail and their solutions are examined.

In the seventh and last chapter, final evaluations are made about the content of the thesis and suggestions are made to the reader.

KEYWORDS: Variation, Lie symmetry group, Lie algebra, invariant, infinitesimal, symmetry generator, Euler-Lagrange equation, Lane-Emdan equation, first integral, Noether symmetry, functional, Euler-Lagrange operator.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın aşamasında emeği geçen değerli danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Ahmet BAKKALOĞLU'na ve yardımlarından dolayı da Doç. Dr. Müge MEYVACI 'ya çok teşekkür ediyorum.

Ayrıca savunma sınavında tez jürisinde bulunmayı kabul eden Dr. Öğr. Üyesi Gülay İlona TELSİZ KAYAOĞLU ve Doç. Dr. Hale GONCE KÖÇKEN'e çok teşekkür ederim.

Beni bu yüksek lisans çalışmasına teşvik eden değerli eşim Sinem BİRBEN'e, tahsil hayatım boyunca maddi ve manevi yanımda olan annem Güllü ve babam Ali BİRBEN'e teşekkür ediyorum.

Serdar BİRBEN

İçindekiler

ÖZET i

ABSTRACT v

ÖNSÖZ ix

İÇİNDEKİLER xi

SEMBOL LİSTESİ xiv

1 GİRİŞ 1
1.1 Varyasyonel Hesapta Temel Kavramlar 3
1.1.1 Bir Değişkenli Fonksiyoneller 3
1.1.2 Varyasyonel Hesabın Temel Lemması 4
1.1.3 Varyasyonel Notasyon 5

2 VARYASYON HESABIN BAZI UYGULAMALARI 7
2.1 Euler-Lagrange Denkleminin Bir Bağımsız ve Birçok Bağımlı Değişkene Genelleştirilmesi 7
2.2 Hamilton Prensibi 12
2.3 Lagrange Denklemlerinin Türetilmesi 13
2.4 Euler-Lagrange Denkleminin Birden Fazla Bağımlı ve Bağımsız Değişkene Genelleştirilmesi 13

3 OPERATÖRLER 15

4 LİE SİMETRİ DÖNÜŞÜMLERİ VE GRUPLARI 21
4.1 Gruplar 21
4.2 Dönüşümler Grubu ve Bir Parametreli Lie Dönüşüm Grupları 22
4.2.1 İki Boyutlu Düzlemde Dönüşüm Gruplarına Örnekler: 23
4.3 Sonsuz Küçük Dönüşümler 24
4.3.1 Lie’nin Birinci Temel Teoremi 25
4.3.2 Sonsuz Küçük Üreteçler 29
4.3.3 Değişmez Fonksiyonlar 32
4.3.4 Kanonik Koordinatlar 34
4.4 Genişletilmiş Lie Dönüşüm Grupları 41
4.4.1 Genişletilmiş Nokta Dönüşümleri Grubu 41
4.4.2 Genişletilmiş Sonsuz Küçük Dönüşümler 45
4.5 Eğrilerin ve Yüzeylerin Eşlemeleri 47
4.5.1 Değişmez Yüzeyler, Değişmez Eğriler ve Değişmez Noktalar 47
4.6 Çok Parametreli Lie Dönüşüm Grupları 50
4.7 Lie Cebirleri 51

5 LİE SİMETRİ GRUBU VE ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER 55
5.1 Diferansiyel Denklemlerin Lie Grubu Altında İnvaryant Kalması . . . 55
5.2 Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Belirleyici Denklemleri 57

5.3 İki ve Daha Fazla Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Belirleyici Denklemleri 61
5.4 Birinci Mertebeden Bazı Adi Diferansiyel Denklemlerin Lie Simetri Yöntemiyle Çözümleri 64
5.5 İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Denklemlerin Lie Simetri Yöntemiyle İndirgenmesi ve Genel Çözümü 72

6 NOETHER SİMETRİ YAKLAŞIMI 89
6.1 Noether Simetri Sınıflandırması ve İndirgemesi Üzerine Ön Bilgiler . 89
6.2 Genelleştirilmiş Lane-Emden Denkleminin Noether Yöntemiyle İki Kere İndirgemesi 91

7 SONUÇ VE ÖNERİLER 115

KAYNAKÇA 117

SEMBOL LİSTESİ

X	Bir simetri grubunun sonsuz küçük üreteci
$X^{[1]}$	X üretecinin birinci genişlemesi
δ	Varyasyon
δu	u nun varyasyonu
$I(u(x))$	$u(x)$ fonksiyonunun fonksiyoneli
$\mathcal{A}$	Sonlu mertebeden tüm diferansiyellenenebilen fonksiyonların vektör uzayı
Δ	Gradiyent vektör
x^i	Birçok bağımsız değişken $(x^1, ..., x^n)$
u^α	Birçok bağımlı değişken $(u^1, ..., u^m)$
q_i	Mekanikte genelleştirilmiş koordinatlar
$\dot{q}_i$	Genelleştirilmiş hız
D	Tek bağımsız değişkene göre toplam türev operatörü
D_i	Birçok bağımsız değişkene göre toplam türev operatörü
u_i	u fonksiyonunun $i.$ mertebeden tüm kısmi türevleri
u_i^α	Birçok bağımlı değişkenin $i.$ mertebeden tüm kısmi türevleri
$divH$	H vektörünün diverjansı
L	Diferansiyel denklemin Lagrangian fonksiyonu
A	Noether ayar fonksiyonu
$\mathcal{L}$	Lie cebri
ξ, η	Lie simetrisi sonsuz küçükleri
(s, r)	Kanonik koordinatlar
$sl(3, \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ üzerinde derecesi üç olan özel lineer grup

1 GİRİŞ

Diferansiyelin basitçe değişimi ifade ettiği düşünülürse diferansiyel denklemlerin sadece Matematikte olmamakla beraber Fizik, Kimya, Ekonomi ve Mühendislik gibi birçok doğa bilimlerinde hatta sosyal bilimlerde dahil karşımıza çıktığı görülebilir. Örneğin, Fizikte bir sarkacın yaptığı harmonik hareket, Müzikte bir enstrümantal aletin çıkardağı sesin oluşturduğu dalga, uzay mekiniğinin yörüngeye oturması, yıldızların yapısı, kelebek etkisi, kanın damar çeperine yaptığı basınç, enerjinin ve momentumun korunumu gibi birçok sistem diferansiyel hesabıyla incelenebilir.

Uygulamalı alanlarda problemlerin birçoğunun matematiksel modeli diferansiyel denklem şeklinde karşımıza çıkar. Bu nedenle problemleri ilgili alanda yorumlayabilmek için denklemin çözümlerine ulaşılmalıdır. Özellikle yüksek mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bunlara simetri grubu, adomian ayrıştırma metodu, varyasyonel iterasyon, pertürbasyon, pikard iterasyon ve seri yöntemi gibi birçok metod örnekleri verilebilir.

Matematiksel fizik, astrofizik ve termodinamik gibi fiziğin birçok alt alanında yapılan incelemeler sonucu karşılaşılan, n herhangi bir sabit ve $f(y)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$y^{''} + \frac{n}{x}y^{'} + f(y) = 0 \tag{1.1}$$

şeklindeki (1.1) eşitliği genelleştirilmiş Lane-Emden diferansiyel denklemi olarak bilinir. İlk kez amerikalı astrofizikçi Jonathan Homer Lane ve isviçreli astrofizikçi Jacob Robert Emden tarafından çalışılan (1.1) denklem tipi n nin değerleri ve $f(y)$ nin farklı formları için termodinamik ve astrofizik gibi alanlarda matematiksel model olarak kullanılmıştır. Örneğin, $n = 2$ için $f(y)$ ifadesi r ve c herhangi bir sabit olmak üzere y^r, e^y ve $(y^2 - c)^{\frac{3}{2}}$ şeklinde denkleme yazılarak oluşan diferansiyel denklemler sırasıyla küresel gaz bulutunun termal davranış modeli, ısının sabit kaldığı izotermal gaz kürelerini tanımlayan model ve dejenere beyaz cüce yıldızın kütleçekim potansiyeline ilşkin denklemi modeller [1].

Literatürde, (1.1) denkleminin ilk kez Lane tarafından önerilen, Emden ve Fowler tarafından detaylı incelenen [1], $f(y) = y^r$ ve $n = 2$ için

$$y^{''} + \frac{2}{x}y^{'} + y^r = 0 \tag{1.2}$$

şeklindeki durumu için $r = 0, 1, 5$ için analitik yöntemlerle çözümü bilinmektedir [2]; fakat çoğu kez uygulamada karşılaşılan problemleri modelleyen denklemlerin çözümü analitik yöntemle zor olduğundan çeşitli sayısal yöntemler ve yaklaşımlar geliştirilmiştir. Horedt (1.2) denklemini çözmek için sayısal ve pertürbasyon yaklaşımlarını dikkate almıştır [1]. Wazwaz [3], $f(y) = y^r$, $r \geq 0$ alarak Adomian ayrıştırma yöntemine dayalı algoritma yardımıyla seri formunda çözüm elde etmiştir. Liao [4], aynı problemin daha geniş bölgede tanımlı seri çözümünü elde etti. Singh ve arkadaşları [5] te a, b, c sonlu herhangi bir reel parametre olmak üzere

$$y^{''} + \frac{\alpha}{x}y^{'} = f(x, y) \quad , \quad x \in (0, 1) \quad , \quad y^{'}(0) = 0 \quad , \quad ay(1) + by^{'}(1) = c$$

başlangıç değer problemi ele alarak $\alpha \geq 1$ olmak üzere varyasyonel iterasyon metoduna dayalı analitik teknikle çözüm için yinemeli şema elde etmiştir.

Simetri kavramının önemine dikkat çekmek amacıyla "Isaac Yaglom (1988) Sophus Lie ve Felix Klein'ın biyografisinde şöyle der: Şuna kati bir şekilde inanıyorum ki 19. yüzyılda ortaya çıkan bilimsel fikirlerin içinde simetri kadar entellektüel atmosferimize katkıda bulunan ve bize miras kalan başka fikir yoktur" [6].

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri için en güçlü metodlardan biri simetri grubu yöntemidir. Simetri grubu üzerinde ilk kez en kapsamlı şekilde çalışan Sophus Lie (1842-1899), bir diferansiyel denklemin belirtmiş olduğu yüzeyin bir Lie simetri grubu altında invaryant (değişmez) kalması durumunda mertebesinin indirgenebildiğini göstererek yapmış olduğu simetriler grubu ile ilgili çalışmalarıyla uygulamalı alanlarda karşılaşılan diferansiyel denklemlere farklı bir çözüm yöntemi geliştirmiştir [7], [8]. Lie' nin kullanmış olduğu simetri grubu sürekli dönüşümlerden oluşur. Yani, bu tezde de üzerinde durulan tek parametreli Lie gruplarındaki parametre reel sayıların bir aralığından alınmaktadır. Böylece tezde ifade edildiği gibi bir noktaya Lie grubunun sürekli dönüşümü sonsuz kere uygulanarak elde edilen eğriler, grubun yörüngelerini oluşturur.

Fizik ve diğer uygulamalı alanlarda karşılaşılan çoğu probleme karşılık gelen diferansiyel denklemin Lie simetri grubu olmadığından, Alman matematiksel fizikçi Emmy Noether (1882-1935) kanıtladığı teoremlerle simetriler elde ederek ve bunları sınıflandırarak problemlere alternatif yöntemler sunmuştur [7], [9]. Noether, varyasyonlar hesabıyla elde edilen ve invaryant fonksiyonellerin Euler-Lagrange denklemleri olan denklem sınıfının ilk integralinin daima var olduğunu göstermiştir [10].

Noether teoremi, daha önce Noether simetrileri bilinen Euler-Lagrange diferansiyel denklemlerinin temel korunum yasalarının oluşturulması için açık formüller sağlar. Bu güçlü teoremi kullanmak için, altta yatan diferansiyel denklem sisteminin bir Lagrangianı gereklidir. Bu nedenle varyasyon hesabındaki merkezi bir problem, ilgili diferansiyel denklem sisteminin bir Euler-Larange sistemi olarak belirlenmesi için bir Lagrangian'ın bulunmasıdır. Varyasyon hesabında Lagrangian'ın belirlenmesi invers problem olarak bilinir [9].

Douglas, iki ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi için ters problemin tam çözümünü sağladı [11].

Kara ve arkadşları, varyasyonel prensipten elde edilemeyen adi diferansiyel denklem için ilk integrali veren Noether benzeri bir teorem elde ettiler [9].

Khalique ve arkadaşları çalışmalarında, genelleştirilmiş Lane-Emden denkleminin Noether simetrilerini standart Lagrangian'ına göre tamamen sınıflandırmasını yapmışlardır. Yedisi Noether simetrisi ile sonuçlanan sekiz durum oluşmuştur. Bunların her biri için Lie simetrileri sunmuşlar ve Noether simetri yöntemiyle ilk integrallerinden yararlanarak buldukları üç yeni durumla birlikte sayısal yöntemle çözülebilir integral şeklinde çözümler veya çift indirgeme elde etmişlerdir [1].

1.1 Varyasyonel Hesapta Temel Kavramlar

Bu bölüm [12] kitabı referans alınarak yazılmıştır.

1.1.1 Bir Değişkenli Fonksiyoneller

Varyasyonel hesapta bir fonksiyonel genellikle

$$I[u(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, u(x), u'(x)]dx \tag{1.3}$$

şeklindeki formla ifade edilen x bağımsız değişkeninin bir fonksiyonu olan $u(x)$ in bir fonksiyonudur. Diğer bir ifadeyle fonksiyonları bir değerle eşleyen fonksiyonlar birer fonksiyoneldir. Buradaki $u(x)$ düzgün (türevlenebilir) ve $u(x_0) = u_0$, $u(x_1) = u_1$ şeklindeki uç noktalardan geçen bir eğriler ailesini temsil eder .

Varyasyonel hesapta amaç, $I[u(x)]$ fonksiyonelini ekstremum yapan bir $u(x)$ bulmaktır. Bu özelliğe sahip $u(x)$, $I[u(x)]$ fonksiyonelinin ekstremal fonksiyonudur.

$$u^*(x) = u(x) + \left.\frac{\partial u}{\partial a}\right|_{a=0} a + O(a^2) \tag{1.4}$$

a küçük parametre olmak üzere $u(x)$ ve $u^*(x)$ fonksiyonları normlarının yakın olması anlamında yakındır. $O(a)$ terimi u nun varyasyonu olarak adlandırılır.

$$\delta u = \left.\frac{\partial u}{\partial a}\right|_{a=0} a \tag{1.5}$$

şeklinde gösterilir. (1.4) gerçek ekstremal u fonksiyonu ile ona yakın başka bir u^* fonksiyonu arasındaki farktır. Burada $\left.\frac{\partial u}{\partial a}\right|_{a=0} = \eta(x)$ olarak gösterilerek (1.4) eşitliği

$$u^*(x) = u(x) + \eta(x)a + O(a^2)$$

formuna döner. Burada a verilen bir fonksiyon için sabit olan küçük bir parametredir; ancak fonksiyondan fonksiyona değişir. Bundan dolayı δ varyasyonu x yerine a ya göre diferansiyellenebilirdir. Uç koşulları sağlayan u^* için $\eta(x)$ fonksiyonu

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$$

koşullarına sahiptir. u ve u^* arasındaki fark,

$$u^*(x) - u(x) = \eta(x)a = \delta u$$

şeklinde δu eğriden eğriye $u(x)$ fonksiyonunun varyasyonudur.

1.1.2 Varyasyonel Hesabın Temel Lemması

Varyasyonel hesapta kullanışlı olan önemli bir lemmayı ifade edelim.

Lemma 1.1.1 *Eğer bir $g(x)$ fonksiyonu bir $[x_0, x_1]$ aralığında sürekli ve keyfi bir $f(x)$ fonksiyonu için $f(x_0) = f(x_1) = 0$ koşulları ile*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)dx = 0$$

belirli integrali geçerli ise aynı aralıkta $g(x) = 0$ olur.

1.1.3 Varyasyonel Notasyon

Fonksiyonların ve fonksiyonellerin diferansiyel ve varyasyon gösterimleri aşağıdakiler gibi yazılır [12]:

- $f(x,y,z)$ fonksiyonunun toplam diferansiyeli

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

  eğri boyunca bir noktadan diğer bir noktaya $f(x,y,z)$ deki değişimdir.

- $F(x,u,u^{'})$ fonksiyonunun toplam diferansiyeli

$$dF(x,u,u^{'}) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial u^{'}}du^{'}$$

  şeklindedir.

- $F(x,u,u^{'})$ fonksiyonelinin varyasyonu

$$\delta F = \delta F(x,u,u^{'}) = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u^{'}}\delta u^{'}$$

  dir. Ancak x bağımsız değişken olduğundan x te değişim yoktur ve $\delta x = 0$ dır. Bundan dolayı

$$\delta F = dF(x,u,u^{'}) = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u^{'}}\delta u^{'}$$

  formunda bir fonksiyondan diğer bir fonksiyona F nin varyasyonu olur.

- $f(x,y,z)$ nin ekstremum noktası, $df = 0$ şeklinde diferansiyelin sıfır olduğu (x,y,z) noktasıdır.

- $I[u]$ fonksiyonelinin ekstremal fonksiyonu, $\delta I = 0$ şeklinde varyasyonu sıfır yapan $u(x)$ fonksiyonudur.

- (1.3) deki fonksiyonelin varyasyonu,

$$\delta I[u(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \delta F[x,u(x),u^{'}(x)]dx$$

  şeklinde tanımlanır.

Varyasyon hesapta amaç, fonksiyonellere ekstremal değeri veren fonksiyonu elde etmek olduğundan diferansiyel hesapta yapılana benzer şekilde $\delta I[u(x)] = 0$ eşitliğini gerçekleştiren $u(x)$ fonksiyonu bulunur. Bu denklem, ikinci bölümde elde edilen Euler-Lagrange diferansiyel denklemini verir.

2 VARYASYON HESABIN BAZI UYGULAMALARI

Bu bölümde, varyasyon hesabıyla elde edilen matematik ve fizikte önemli yeri olan literatürden bazı bilgilere yer verilecektir.

2.1 Euler-Lagrange Denkleminin Bir Bağımsız ve Birçok Bağımlı Değişkene Genelleştirilmesi

Bu bölümde $\phi(x, y, y^{'})$ biçimindeki fonksiyonel problemleri ele alınacaktır. n tane bağımlı değişken $y_1, y_2, ..., y_n$ ve bunların $y_1^{'}, y_2^{'}, ..., y_n^{'}$ türevlerine bağlı fonksiyonellere genellenirse sistemin değişkenleri bağımsız olduğu varsayılan fonksiyoneli

$$\phi(y_1, y_2, ..., y_n, y_1^{'}, y_2^{'}, ..., y_n^{'}, x)$$

şeklindedir. Bunun

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial \phi}{\partial y_i^{'}}) - \frac{\partial \phi}{\partial y_i} = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, ..., n$$

formunda n tane Euler-Lagrange denklemine yol açtığını gösterilecektir.

Amaç,

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \phi(y_1, y_2, ..., y_n, y_1^{'}, y_2^{'}, ..., y_n^{'}, x)dx$$

belirli integralini en küçük (veya en büyük) yapacak $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ fonksiyonlarını belirlemektir. Yani, y_i fonksiyonları

$$\delta I = 0$$

eşitliği sağlanacak şekilde elde edilecektir.

x_0 ve x_1 koordinatlarına sahip uç noktalar arasında sonsuz sayıda yol vardır. Minimal veya gerçek yola çok yakın olan yollar,

$$Y_i(x) = y_i(x) + a\eta_i(x)$$

şeklindeki denklemlerle tanımlanabilir. I integrali, hangi yolun seçildiğine bağlıdır, bu nedenle a' nın bir fonksiyonu olarak kabul edilebilir. I'nın varyasyonu,

$$\begin{aligned}\delta I = \delta \int_{x_0}^{x_1} \phi dx &= \int_{x_0}^{x_1} \delta\phi dx \\ = \int_{x_0}^{x_1} &\sum_i (\frac{\partial \phi}{\partial Y_i}\delta Y_i + \frac{\partial \phi}{\partial Y_i^{'}}\delta Y_i^{'})dx\end{aligned}$$

şekline sahiptir. Burada Y_i ve $Y_i^{'}$ ifadeleri a'nın fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla zincir kuralından

$$\delta I = (\frac{\partial I}{\partial a})\Big|_{a=0} da = [\int_{x_0}^{x_1} \sum_i (\frac{\partial \phi}{\partial Y_i}\frac{\partial Y_i}{\partial a} + \frac{\partial \phi}{\partial Y_i^{'}}\frac{\partial Y_i^{'}}{\partial a})dx]\Big|_{a=0} da$$

şeklinde I' nın varyasyonu yazılabilir. İkinci terim

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial Y_i^{'}}\frac{\partial Y_i^{'}}{\partial a} dadx &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial Y_i^{'}}\frac{\partial^2 Y_i}{\partial a \partial x} dxda \\ = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial Y_i^{'}}\frac{\partial}{\partial a}(\frac{\partial Y_i}{\partial x}dx)da\end{aligned}$$

şeklinde yazılarak buradan

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial Y_i^{'}}, \qquad du = \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial Y_i^{'}}dx$$

ve

$$dv = \frac{\partial}{\partial a}(\frac{\partial Y_i}{\partial x}dx)da$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \ dv &= \frac{\partial}{\partial a}(\frac{\partial Y_i}{\partial x}dx)da \\ dv &= \frac{d}{dx}(\frac{\partial Y_i}{\partial a})dx\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \ v = \int dv = \int \frac{d}{dx}(\frac{\partial Y_i}{\partial a})dx = \frac{\partial Y_i}{\partial a}$$

şeklinde yazılan ifadeler

$$\int udv = vu - \int vdu$$

şeklindeki kısmi integrasyon eşitliğinde yazılarak

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y_i'}\frac{\partial Y_i}{\partial a}\bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Y_i}{\partial a}\frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial Y_i'} dxda$$

$$= -\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Y_i}{\partial a}\frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial Y_i'} dxda$$

şeklinde elde edilir. Bütün eğriler uç noktalardan geçtiklerinden $\frac{\partial Y_i}{\partial a}\Big|_{x_0}^{x_1} = 0$ dır. Sonuç olarak

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y_i}\frac{\partial Y_i}{\partial a} - \frac{\partial Y_i}{\partial a}\frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial Y_i'}\right) dadx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial Y_i'}\right)\frac{\partial Y_i}{\partial a} dadx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial Y_i'}\right)\delta Y_i dx$$

$a = 0$ olduğunda $\delta I = 0$ olur. Çünkü I, $y_i = y_i(x)$yolu boyunca minimize edilir. Bu nedenle

$$[\delta I]_{a=0} = 0 = \int_{x_0}^{x_1} \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial y_i'}\right)\delta y_i dx$$

olup, δy_i ler bağımsız olduğundan, bu ifadenin sağ tarafının sıfır olabilmesinin tek yolu, tüm terimlerin sıfır olmasıdır. Buradan

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial \phi}{\partial y_i} = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, 3, ..., n$$

şeklinde istenilen elde edilir [13].

Örnek 2.1.1

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \phi(y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n', x) dx$$

olarak verilsin. I maksimum veya minimum yapılacaktır. Burada ϕ nin varyasyonu birinci bölümde belirtildiği gibi

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial y_1}\delta y_1 + ... + \frac{\partial \phi}{\partial y_n}\delta y_n + \frac{\partial \phi}{\partial y_1'}\delta y_1' + ... + \frac{\partial \phi}{\partial y_n'}\delta y_n'$$

olup

$$\delta y_1' = \frac{d}{dx}\delta y_1, ..., \delta y_n' = \frac{d}{dx}\delta y_n$$

şeklinde ifade edilir.

Bir uygulama olarak, $(0, 0, 0)$ ve (x_1, y_1, z_1) düzlemlerinin birleşimini gerektirmeyen en kısa eğriyi bulalım. Varyasyoneli hesaplanacak fonksiyonel

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{1 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}dx$$

eşitliğinden yararlanarak

$$I = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}dx$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen I fonksiyonelinin varyasyonu

$$\delta I = \int_0^{x_1} \frac{y^{'}\delta y^{'} + z^{'}\delta z^{'}}{\sqrt{1 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}}dx$$

formunda yazılır. Buradan

$$\delta I = \int_0^{x_1} \frac{y^{'}\delta y^{'}}{\sqrt{1 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}}dx + \int_0^{x_1} \frac{z^{'}\delta z^{'}}{\sqrt{1 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}}$$

elde edilir.

$$\delta I_1 = \int_0^{x_1} \frac{y^{'}\delta y^{'}}{\sqrt{1 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}}dx$$

olmak üzere kısmi entegrasyondan

$$u = \frac{y^{'}}{\sqrt{1 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}} \implies du = \frac{d}{dx}\frac{y^{'}}{\sqrt{1 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}}dx$$

$$dv = \delta y^{'}dx = \frac{d}{dx}\delta y dx \implies v = \delta y$$

şeklinde elde edilen ifadeler

$$\int udv = vu - \int vdu$$

eşitliğinde yazılarak

$$\delta I_1 = [\frac{y^{'}\delta y}{\sqrt{1 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}}]\Big|_0^{x_1} - \int_0^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{y^{'}\delta y}{\sqrt{1 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}}dx$$

$$\delta I_1 = -\int_0^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{y^{'}\delta y}{\sqrt{1 + (y^{'})^2 + (z^{'})^2}}dx$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde ikinci integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\delta I = -\int_0^{x_1} [\frac{d}{dx}\frac{y^{'}\delta y}{\sqrt{1+(y^{'})^2+(z^{'})^2}} + \frac{d}{dx}\frac{z^{'}\delta z}{\sqrt{1+(y^{'})^2+(z^{'})^2}}]dx$$

elde ediilir. $\delta I = 0$ olması için

$$\frac{d}{dx}\frac{y^{'}\delta y}{\sqrt{1+(y^{'})^2+(z^{'})^2}} + \frac{d}{dx}\frac{z^{'}\delta z}{\sqrt{1+(y^{'})^2+(z^{'})^2}} = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır. δy ve δz, x'in bağımsız keyfi fonksiyonları olduğunda yok olur, ve buradan

$$\frac{d}{dx}\frac{y^{'}}{\sqrt{1+(y^{'})^2+(z^{'})^2}} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{z^{'}}{\sqrt{1+(y^{'})^2+(z^{'})^2}} = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde elde edilen y ve z'yi x ile birleştiren (2.1) ve (2.2) diferansiyel denklemleri A ve B integral sabitleri olmak üzere kolaylıkla aşağıdaki gibi çözülebilir.

$$\frac{y^{'}}{\sqrt{1+(y^{'})^2+(z^{'})^2}} = A, \qquad \frac{z^{'}}{\sqrt{1+(y^{'})^2+(z^{'})^2}} = B$$

Bu eşitliklerin ortak çözümlerinden

$$By^{'} = Az^{'}$$

şeklinde oluşan denklem integre edilerek C integral sabiti olmak üzere

$$By - Az + C = 0$$

formunda çözüm elde edilir.

Bu örnekte görüldüğü gibi çözüm için Euler-Lagrange denkleminin elde ediliş tekniği kullanıldı.

$$I = \int_0^{x_1} \sqrt{1+(y^{'})^2+(z^{'})^2}dx$$

fonksiyonelindeki

$$\phi(x, y, y^{'}, z^{'}) = \sqrt{1+(y^{'})^2+(z^{'})^2}$$

fonksiyonu Euler-Lagrange denklemini sağlar. Yani, Euler-Lagrange denklemine denk olan diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilen A ve B ifadelerini verir.

2.2 Hamilton Prensibi

N parçacıktan oluşan bir mekanik sistem $n = 3N$ kartezyen koordinat ile tanımlanabilir. Bu koordinatların hepsi bağımsız olmayabilir. Eğer k tane kısıtlama denklemi varsa bağımsız koordinatların sayısı $(n - k)$ dır. Belirli bir andaki tüm koordinatlar için değerler kümesine sistemin o andaki konfigürasyonu denir. Yani, konfigürasyon $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_{n-k})$ ile verilir. Tüm genelleştirilmiş koordinatlar bağımsız olarak değişebilir. Kuvvet kısıtlamasını nasıl belirleyeceğimizi düşündüğümüzde, problem tamamı bağımsız olması gerekmeyen genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden formüle edilebilir. Ancak şimdilik tüm q_i'lerin bağımsız olduğu unutulmamalıdır [14].

Sistem, konfigürasyon uzayı adı verilen $(n - k)$ boyutlu uzayda bir (maddesel) nokta olarak temsil edilir [15]. Zaman geçtikçe parçacıkların koordinatları sürekli bir şekilde değişecek ve sistemi tanımlayan nokta, konfigürasyon uzayında hareket edecektir. Başlangıç noktası ile bitiş noktası arasında sonsuz sayıda yol vardır. Bununla birlikte, mekanik bir sistem her zaman bu iki nokta arasında belirli bir yol izler. Hamilton ilkesi, bir sistemin gerçekte izlediği yolun eylemi en aza indiren yol olduğunu belirtir. Mekanik bir sistemin eylemi,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, ..., q_{n-k}; \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_{n-k}; t)dt$$

şeklinde çizgi integrali olarak tanımlanır. Burada Lagrangian L, $2n - 2k + 1$ bağımsız değişkenli (genelleştirilmiş koordinatlar, genelleştirilmiş hızlar ve zaman) sistemin tek bir skaler fonksiyonudur [14]. İntegralin alt ve üst sınırları t_1 ve t_2 mekanik sistemin hareketinin başlangıç ve bitiş zamanlarıdır. Hamilton ilkesi, bize sistemin bu integrali en aza indirecek şekilde davrandığını söyler. Bu nedenle I fonksiyonelinin varyasyonu sıfırdır. Denklem formunda Hamilton ilkesi,

$$\delta \int L dt = 0$$

şeklindedir. Bu ilişkiyi yorumlamak için, bir konfigürasyon alanı ve bazı işlemler için bir başlangıç ve son nokta düşünülebilir.

Uç noktalar (başlangıç ve bitiş) arasındaki birkaç yolu düşünülerek bu yollardan birinin, eylemi en aza indiren yol ("gerçek" yol) olduğu varsayılsın. Bu yol boyunca

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

denklemi geçerlidir. İntegral, sistemin gerçekte izlediği yol için bir minimumdur ve diğer tüm yollar boyunca eylemin değeri daha büyük olacaktır.

2.3 Lagrange Denklemlerinin Türetilmesi

Lagrange denklemleri, genel formda $\phi(x, y, y^{'})$ şeklinde olan değişkenleri $L(t, q, \dot{q})$ şeklinde varyasyon hesabı diline yeniden formüle edilmesiyle Hamilton ilkesinden türetebilebilir [15]. Hamilton ilkesi, mekanik bir sistemin $q = q(t)$ ile verilen konfigürasyon uzayında,

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q})dt$$

integrali minimize olacak şekilde bir yol izlediğini söyler. Şimdi, eğer $q = q(t)$ küçültme yolu ise L,

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

şeklinde Euler-Lagrange denklemini (Lagrange'ın 2. tip denklemi) sağlamalıdır. Denklemde $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ geçerlidir.

2.4 Euler-Lagrange Denkleminin Birden Fazla Bağımlı ve Bağımsız Değişkene Genelleştirilmesi

Birkaç bağımsız değişkenler $x^i = \mathbf{x} = (x^1, ..., x^n)$, $u^\alpha = \mathbf{u} = (u^1, ..., u^m)$ bağımlı değişkenler ve $L \in \mathcal{A}$ birinci mertebeden bir diferansiyel fonksiyon olsun. ($\mathcal{A}$ sonlu mertebeden tüm diferansiyel fonksiyonların vektör uzayıdır.) $V \subseteq \mathbb{R}^n$, **x** bağımsız değişkenler uzayında ∂V sınırı olan keyfi bir n-boyutlu uzay olsun. Bir eylem,

$$l[\mathbf{u}] = \int_V L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{(1)})\,d\mathbf{x} \tag{2.3}$$

integralidir. ($\mathbf{u}_{(1)}$, u_i^α şeklindeki bütün birinci türevlerinin koleksiyonlarıdır.) (2.3) aynı zamanda varyasyonel integral olarak da adlandırılır. (2.3) integralin **u**'nun **u+h(x)** değişiminin neden olduğu $\delta l[\mathbf{u}]$ varyasyonu,

$$\int_V [L(\mathbf{x}, \mathbf{u} + \mathbf{h}, \mathbf{u}_{(1)} + \mathbf{h}_{(1)})]d\mathbf{x}$$

integralinin temel lineer kısmı (h cinsinden) olarak tanımlanır ve aşağıdaki forma sahiptir [16].

$$\delta l[\mathbf{u}] = \int_V [\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} h^\alpha + \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} h_i^\alpha]\,d\mathbf{x}$$

3 OPERATÖRLER

Tanım 3.1 *(Euler-Lagrange operatörleri)*

$\mathbf{x} = (x^1, x^2, ..., x^n)$ ve $\mathbf{u} = (u^1, u^2, ..., u^m)$ ifedeleri sırasıyla x^i ve u^α şeklindeki koordinatlarla verilen bağımsız ve bağımlı değişkenler olmak üzere

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + ... \\ u_i^\alpha &= D_i(u^\alpha) \\ u_{ij}^\alpha &= D_j D_i(u^\alpha) \\ &..... \\ &..... \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan notasyonlarla Euler-Lagrange operatörleri aşağıdaki toplamsal formla tanımlanır [17], [18].

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} ... D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 ... i_s}} \qquad \alpha = 1, 2, ..., m \tag{3.1}$$

Örnek 3.1 $\mathbf{x} = (x, y, z)$'nin bağımsız değişkenler olduğu bir $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{(1)}, \mathbf{u}_{(2)})$ işlevine etki eden Euler-Lagrange operatörünü düşünülerek ve u tek bir diferansiyel değişken olmak üzere (3.1) denkleminde $\alpha = 1, i = 3$ ve $s = 2$ olsun. Burada $\mathbf{u}_{(1)}$ ve $\mathbf{u}_{(2)}$ sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden türevlerdir. Bu durumlarda Euler-Lagrange operatörü,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} &+ (-1)[D_x \frac{\partial}{\partial u_x} + D_y \frac{\partial}{\partial u_y} + D_z \frac{\partial}{\partial u_z}] \\ &+ (-1)^2 [D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + D_z^2 \frac{\partial}{\partial u_{zz}} \\ &+ D_x D_y \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + D_x D_z \frac{\partial}{\partial u_{xz}} + D_y D_z \frac{\partial}{\partial u_{yz}}] \end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklini alır.

Lemma 3.1 *Toplam türev ve* $\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ *yer değiştirir.* [19]

$$[D_i, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}] = D_i \frac{\partial}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial}{\partial u^\alpha} D_i = 0 \tag{3.3}$$

Kanıt: Bu lemma doğrudan hesaplamayla gösterilebilir.

$$\begin{aligned} D_i \frac{\partial}{\partial u^\alpha} &= (\frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + ...) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial u^\alpha} + u_i^\alpha \frac{\partial^2}{\partial u^{\alpha^2}} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial^2}{\partial u_j^\alpha \partial u^\alpha} + ... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} D_i &= \frac{\partial}{\partial u^\alpha} (\frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + ...) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha \partial x^i} + \frac{\partial u_i^\alpha}{\partial u^\alpha} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_i^\alpha \frac{\partial^2}{\partial u^{\alpha^2}} \\ &+ \frac{\partial u_{ij}^\alpha}{\partial u^\alpha} \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha \partial u_j^\alpha} + ... \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha \partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial^2}{\partial u^{\alpha^2}} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha \partial u_j^\alpha} + ... \end{aligned}$$

Lemma 3.2 $\forall \alpha$ *için aşağıdaki eşitlik geçerlidir* [19].

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} D_x = 0 \tag{3.4}$$

Kanıt:

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha} D_i = D_i \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

eşitliğini kullanacağız.

NOT:

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x^\alpha} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}^\alpha} - D_x^3 \frac{\partial}{\partial u_{xxx}^\alpha} + ...$$

formunda yazılan Euler- Lagrange denklemi y'nin diferansiyel değişken olduğu (x, y) düzleminde

$$\frac{\delta}{\delta y} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s D_x^s \frac{\partial}{\partial y^{(s)}} = \frac{\partial}{\partial y} - D_x \frac{\partial}{\partial y'} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial y''} - D_x^3 \frac{\partial}{\partial y'''} + ...$$

şeklinde yazılabilir.

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha}D_x = (\frac{\partial}{\partial u^\alpha} - D_x\frac{\partial}{\partial u_x^\alpha} + D_x^2\frac{\partial^2}{\partial u_{xx}^\alpha} - ...)(\frac{\partial}{\partial x} + u_x^\beta\frac{\partial}{\partial u^\beta} + u_{xx}^\beta\frac{\partial}{\partial u_x^\beta} + ...)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u^\alpha}D_x - D_x\frac{\partial}{\partial u^\alpha} - D_x^2\frac{\partial}{\partial u_x^\alpha} + D_x^2\frac{\partial}{\partial u_x^\alpha} - D_x^3\frac{\partial}{\partial u_{xx}^\alpha} - ... = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.1 $f(x, u, ...u_{(s)}) \in \mathcal{A} \in \mathcal{A}$ *fonksiyonunun* $g(x, u, ..., u_{(s-1)}) \in \mathcal{A}$ *olmak üzere*

$$f = D_x(g)$$

toplam türevi olması için gerekli ve yeterli koşul, aşağıdaki denklemlerin $(x, u, u_{(1)}, ...)$ *uzayında geçerli olmasıdır.*

$$\frac{\delta f}{\delta u^\alpha} = 0$$

$(\alpha = 1, 2, ..., m)$

Kanıt: $f = D_x(g)$ olduğundan

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha}D_x = 0$$

eşitliğinden

$$\frac{\delta f}{\delta u^\alpha} = \frac{\delta}{\delta u^\alpha}D_x(g) = (\frac{\delta}{\delta u^\alpha}D_x)(f) = 0$$

elde edilir.

Örnek 3.2

$m = 2$ ve $s = 1$ için yukarıdaki teoremi doğrulayın. Başka bir ifadeyle

$$f(x, u, v, u', v') = D_x(g(x, u, v))$$

eşitliğinin gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{\delta f}{\delta u} = f_u - D_x(f_{u'}) = 0$$

$$\frac{\delta f}{\delta v} = f_v - D_x(f_{v'}) = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Çözüm: Eğer

$$f(x, u, v, u', v') = D_x(g(x, u, v)) \equiv g_x + u^{'}g_u + v^{'}g_v$$

ise o halde türev operatörü kullanacağız.

$$\frac{\delta}{\delta u^{\alpha}}=\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}-D_x\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_x}+D_x^2\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{xx}}-D_x^3\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{xxx}}+...$$

$\alpha=1$ için

$$\frac{\delta}{\delta u}=\frac{\partial}{\partial u}-D_x\frac{\partial}{\partial u_x}+D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}}-D_x^3\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}+...$$

$$\Longrightarrow\ \frac{\delta}{\delta u}f(x,u,v,u',v')=\frac{\delta}{\delta u}D_x(g)-D_x(g_u)=(\frac{\partial}{\partial u}D_x-D_x\frac{\partial}{\partial u})(g)=0$$

$$\frac{\delta f}{\delta v}=\frac{\partial}{\partial v}D_x(g)-D_x(g_v)=(\frac{\partial}{\partial v}D_x-D_x\frac{\partial}{\partial v})(g)=0$$

tersine $f(x,u,v,u',v')$ fonksiyonu aşağıdaki denklemleri sağlasın.

$$\frac{\delta f}{\delta u}=f_u-D_x(f_{u'})=0$$
$$\frac{\delta f}{\delta v}=f_v-D_x(f_{v'})=0$$

$$f_u-f_{xu'}-u^{'}f_{uu'}-v^{'}f_{vu'}-v^{''}f_{u'v'}-u^{''}f_{u'u'}=0$$

$$f_v-f_{xv'}-u^{'}f_{uv'}-v^{'}f_{vv'}-u^{''}f_{u'v'}-v^{''}f_{v'v'}=0$$

$f, u^{''}$ ve $v^{''}$ içermediğinden,

$$f_{u'u'}=f_{u'v'}=f_{v'v'}=0$$

olur. Dolayısıyla

$$f=a(x,u,v)u^{'}+b(x,u,v)v^{'}+c(x,u,v)$$

ve yukarıdaki denklemler,

$$a_v=b_u,\qquad a_x=c_u,\qquad b_x=c_v$$

formunu alır.

Bu denklemler,

$$\frac{\partial g}{\partial u}=a(x,u,v)$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}=b(x,u,v)$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}=c(x,u,v)$$

sistemi için integrallenebilirlik koşullarını sağlar. $g(x,u,v)$ çözüm olsun. Böylece

$$f = g_u u^{'} + g_v v^{'} + g_x \equiv D_x(g)$$

şeklindeki istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi, Noether simetri yaklaşımında önemli yeri olan bir teoremi ifade edelim.

Teorem 3.2 *Diferansiyellenebilen bir $f(x,y,u,u_x,u_y)$ fonksiyonu, ancak ve ancak varyasyonel türevi sıfırsa bir vektör alanının diverjansı olur.*

$$f = divH \iff \frac{\delta f}{\delta u} = 0$$

Teoremdeki H ve divH

$$H = (g(x,y,u), h(x,y,u))$$

$$divH = D_x(g) + D_y(h)$$

şeklindeki eşitlikleriyle tanımlıdır.

$\frac{\delta}{\delta u}$ ifadesi,

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} - D_x \frac{\partial}{\partial u^\alpha_x} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{xx}} - D_x^3 \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{xxx}} + ...$$

x, y bağımsız değişkenler u diferansiyellenebilen değişken olmak üzere Euler-Lagrange operatörüdür.

Kanıt: $f(x,u,v,u^{'},v^{'})$ bir diverjans olsun.

$$f = D_x(g) + D_y(h) \equiv g_x + u_x g_u + h_y + u_y h_u \tag{3.5}$$

(3.3) ile ifade edilen

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} D_i - D_i \frac{\delta}{\delta u^\alpha} = 0$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}\frac{\delta f}{\delta u} &= \frac{\partial}{\partial u} D_x(g) - D_x(g_u) + \frac{\partial}{\partial u} D_y(h) - D_y(h_u)\\ &= (\frac{\partial}{\partial u} D_x - D_x \frac{\partial}{\partial u})(g) + (\frac{\partial}{\partial u} D_y - D_y \frac{\partial}{\partial u})(h) = 0\end{aligned}$$

olacak şekilde $\frac{\delta f}{\delta u}$=0 elde edilir. Karşıt olarak

$$\frac{\delta f}{\delta u} = f_u - D_x(f_{u_x}) - D_y(f_{u_y}) = 0$$

şeklindeki denklem

$$\begin{aligned} & f_u - f_{xu_x} - u_x f_{uu_x} - u_{xx} f_{u_x u_x} - u_{xy} f_{u_x u_y} \\ & - f_{yu_y} - u_{xy} f_{u_x u_y} - u_{yy} f_{u_y u_y} = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. f; u_{xx}, u_{yy} ve u_{xy} değişkenlerini içermediğinden, bu denklemden şu sonuç çıkar:

$$f_{u_x u_x} = f_{u_x u_y} = f_{u_y u_y} = 0$$

$$f = a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y + c(x, y, u) \tag{3.6}$$

$\frac{\delta f}{\delta u} = 0$ denklemi, katsayılar için bir koşul verir.

$$c_u = a_x + b_y, \qquad c = \int (a_x + b_y) du + p(x, y) \tag{3.7}$$

(3.6) ile (3.5) eşitliği karşılaştırılarak ve (3.7) koşulu dikkate alınarak (3.6) fonksiyonunun

$$g_u = a, \quad h_u = b, \quad g = \int a(x, y, u)du + k(x, y), \quad h = \int b(x, y, u)du + l(x, y)$$

ile (3.5) diverjans formunu aldığı sonucuna varılır. Burada $k(x, y)$ ve $l(x, y)$, (3.7) koşuluna uymalıdır. Yani,

$$k_x + l_y = p$$

Örneğin, $l = 0$ ve $k(x, y) = \int p(x, y)dx$ alınabilir.

Örnek 3.3 $f = 2(\frac{u}{x})u_x + 2(\frac{u}{y})u_y + 2xy - u^2(x^{-2} + y^{-2})$ fonksiyonu,

$$a = 2(\frac{u}{x}), \qquad b = 2(\frac{u}{y}), \qquad c = -u^2(x^{-2} + y^{-2}) + 2xy$$

olmak üzere

$$f = a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y + c(x, y, u)$$

formunu alabilir.

$$c = \int (a_x + b_y) du + p(x, y)$$

koşulu sağlanır. $l = 0$ ve $k = \int 2xydx = x^2 y$ ile

$$g = \int a(x, y, u)du + k(x, y), \qquad h = \int b(x, y, u)du + l(x, y)$$

şeklindeki fonksiyonları almak f' yi diverjans olarak temsil eder.

4 LİE SİMETRİ DÖNÜŞÜMLERİ VE GRUPLARI

Bu bölümde, özellikle diferansiyel denklemlerin mertebesinin indirgemesi ve çözümleri için önemli yere sahip olan Lie simetri grupları yöntemi için literatürden bilgiler verilecektir. Konu ile ilgili daha kapsamlı inceleme [6], [20] , [21] ve [22] kaynaklarından yapılabilir.

4.1 Gruplar

Tanım 4.1.1 *Bir ϕ birleşim işlemine göre elemanları aşağıdaki özellikleri sağlayan (G, ϕ) ikilisine bir* ***grup*** *denir [20].*

1. Kapalılık Özelliği : Eğer $\forall a, b \in G$ için $\phi(a, b) \in G$ ise G kümesi ϕ birleşim işlemine göre kapalıdır.

2. Asosiyatiflik : Eğer $\forall a, b, c \in G$ için $\phi(a, \phi(b, c)) = \phi(\phi(a, b), c)$ eşitliği sağlanırsa ϕ işlemi birleşme (asosiyatif) özelliğine sahiptir.

3. Birim eleman : Eğer $\forall a \in G$ için $\phi(e, a) = \phi(a, e) = a$ eşitliklerini sağlayan bir $e \in G$ varsa e birim elemandır. Bu eleman grup içinde sadece bir tanedir.

4. Ters eleman : $\forall a \in G$ için $\phi(a, a^{-1}) = \phi(a^{-1}, a) = e$ öyle bir a^{-1} vardır ki bu a^{-1} elemanına a nın tersi denir. Yine bir elemanın grup içinde birden fazla tersi olamaz.

5. Değişme özelliği : Eğer özel olarak G nin her hangi iki a ve b elemanları için $\phi(a, b) = \phi(b, a)$ eşitliği sağlanırsa (G, ϕ) grubu değişmeli (abelyen) dir. Bir grubun değişmeli olması gerekmez.

Tanım 4.1.2 *G nin ϕ bileşim kuralına göre yukarıdaki özelliklerni sağlayan her alt kümesine (G, ϕ) grubunun alt grubu denir.*

Bazı grup örnekleri :

- Z tamsayılar kümesi, Q rasyonel sayılar kümesi ve R reel sayılar kümesi, toplama işlemine göre grup aksiyomlarını sağlarlar.
- $G_f = \{f(x) = cx + d | f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \wedge c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0\}$ kümesi fonksiyonların bileşke ($\circ$) işlemine göre bir grup oluşturur.
- Bir eşkenar üçgenin pozitif yönde merkezi etrafında $2\pi, \frac{2\pi}{3}$ ve $\frac{4\pi}{3}$ radyanlık açılarla dönmesi ve üçgenin herhangi üç kenarortayına göre yansıması üçgeni değişmez bırakır. Eşkenar üçgenin tüm bu dönüşümlerinin oluşturduğu küme ϕ bileşke işlemine göre grup oluşturur. Daha genel olarak herhangi bir düzgün n genin merkezine göre dönmesi ve simetri eksenlerine göre yansıması düzgün çokgeni değişmez bırakır. Yani, ilgili dönüşümlerle köşeler diğer bir köşeye, her kenar noktası yine bir kenar noktasına karşılık gelir. Gruplarla ilgili kapsamlı bilgi için [23], [24] ve [25] kaynakları incelenebilir.

4.2 Dönüşümler Grubu ve Bir Parametreli Lie Dönüşüm Grupları

Tanım 4.2.1 *$\mathbb{R}^n$ nin bir $\mathbb{D}$ alt bölgesinde bulunan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, ...x_n)$ noktalarının dönüşüm kümesi*

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}; a), \qquad \forall x \in \mathbb{D}, \qquad \forall a \in S \subset \mathbb{R} \tag{4.1}$$

olacak şekilde a parametresine bağlı olarak tanımlanır.

Bu tanımdaki **X**, **x** noktasının her koordinatına karşılık gelen aşağıda özellikleri verilen fonksiyonları ifade etmektedir [20]. Bu dönüşüm elemanlarının oluşturduğu bir G kümesi, ϕ birleşim işlemine göre, bölüm (4.1) de belirtilen grup aksiyomlarını sağlar. Burada aynı zamanda $\phi(a, b)$, S deki a ve b parametrelerinin bileşim kuralıdır. Bu bize bir noktaya art arda dönüşüm uygulandığında $\mathbb{D}$ üzerinde yine tek parametreli bir dönüşüm oluştuğunu ifade eder. Bunu matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; a) \implies \mathbf{x}^{**} = \mathbf{X}(\mathbf{x}^*; b) = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \phi(a, b))$$

Belirtildiği üzere $\phi(a, b) = c$, $c \in S$ olacak şekilde tek parametre oluşur. Bu grubun birim elemanı ise $e = e_0$ birimsel parametre olmak üzere,

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; e_0) = \mathbf{x}$$

olarak gösterilir.

- **X**, **x** $\in \mathbb{D}$ noktasına göre sonsuz türevlenebilen ve a parametresine göre analitik fonksiyonlardır. Bir başka ifadeyle **X** fonksiyonlarının a ya göre yakınsak Taylor serisi vardır.

- a sürekli bir parametre olduğundan S, *reel sayıların bir aralığıdır.* a yı sıfır olarak seçebiliriz, bu ise grubun etkisiz elemanına karşılık gelir.

- $\phi(a, b)$ birleşim kuralı a ve b nin analitik fonksiyonudur [20].

Yukarıda belirtilen özelliklerden de anlaşılacağı üzere bizim daha çok ilgileneceğimiz gruplar sürekli dönüşüm gruplarıdır. Bundan dolayı grup işlemi ϕ bileşke işlemidir. Bu özelliklerle beraber oluşan gruba *tek parametreli Lie dönüşüm grubu denir.* Düzlemde noktaların dönüşümü (art arda ϕ işlemi uygulayarak) düzlemde bulunan herhangi bir noktayı yine düzlem üzerinde başka bir konumdaki noktaya dönüştürür.

4.2.1 İki Boyutlu Düzlemde Dönüşüm Gruplarına Örnekler:

Şimdi Tanım $4.2.1$ de verilen dönüşüm gruplarına $\mathbb{R}^2$ de örnekler verelim.

Örnek 4.2.1

Bir parametreli $x-$ ekseni üzerinde kaymaları ifade eden dönüşümlerin oluşturduğu G kümesi ϕ birleşim işlemi altında bir grup belirtir. Bu dönüşümler

$$\begin{aligned} x^* &= x + a \\ y^* &= y \end{aligned} \tag{4.2}$$

denklemleriyle ifade edilir.

Örnek 4.2.2

Orjin etrafında dönmeleri veren dönüşümler

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos a - y\sin a \\ y^* &= x\sin a + y\cos a \end{aligned} \tag{4.3}$$

sürekli grup oluşturur.

Örnek 4.2.3

$$x^* = e^a x$$
$$y^* = e^{2a} y$$

dönüşümleri de sürekli grup oluşturur.

Örnek 4.2.4

$$x^* = x + a$$
$$y^* = \frac{xy}{x+a}$$

dönüşüm ailesi grup aksiyomlarını sağlar.

4.3 Sonsuz Küçük Dönüşümler

Birleşim işlemi ϕ ve $a = 0$ birim eleman olmak üzere ,

$$\mathbf{x^*} = \mathbf{X}\left(\mathbf{x}; a\right) \tag{4.4}$$

Lie dönüşüm grupları ele alınırsa Tanım 4.2.1 de belirtilen **X** fonksiyonlarının Taylor seri açınımı özelliğinden

$$\begin{aligned}\mathbf{x^*} &= \mathbf{x} + a\left(\left.\frac{\partial \mathbf{X}\left(\mathbf{x}; a\right)}{\partial a}\right|_{a=0}\right) + \frac{1}{2}a^2\left(\left.\frac{\partial^2 \mathbf{X}\left(\mathbf{x}; a\right)}{\partial a^2}\right|_{a=0}\right) + \ldots\ldots\ldots \\ &= \mathbf{x} + a\left(\left.\frac{\partial \mathbf{X}\left(\mathbf{x}; a\right)}{\partial a}\right|_{a=0}\right) + O(a^2)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu açınıma aynı zamanda *Lie serisi* de denir. Burada

$$\mathbf{k(x)} = \left.\frac{\partial \mathbf{X}\left(\mathbf{x}; a\right)}{\partial a}\right|_{a=0} \tag{4.5}$$

şeklinde olmak üzere **x +ak(x)** ifadesine (4.4) Lie dönüşümler grubunun sonsuz küçük dönüşümleri denir. Buradaki **k(x)** in bileşenleri (4.4) dönüşümlerinin sonsuz küçükleridir [20].

Örneğin, $\mathbb{R}^2$ düzleminde,

$$x^* = e^a x \qquad\qquad y^* = e^{-a} y \tag{4.6}$$

(4.6) formundaki dönüşümler ele alınarak

$$k_1\left(x,y\right)) = \left.\frac{\partial e^a x}{\partial a}\right|_{a=0} = x$$

$$k_2\left(x,y\right) = \left.\frac{\partial e^{-a} y}{\partial a}\right|_{a=0} = -y$$

biçimindeki **k(x)** in bileşenleri (4.6) nin sonsuz küçükleri olarak elde edilir. Buradaki $k_1(x,y)$ ve $k_2(x,y)$ ifadeleri özel olarak $k_1(x,y) = \xi(x,y)$ ve $k_2(x,y) = \eta(x,y)$ sembolleri ile gösterilmek şartıyla $x^* \approx x + a\xi$ ve $y^* \approx y + a\eta$ olarak yazılarak $x^* \approx x + ax$ ve $y^* \approx y - ay$ şeklinde ifade edilir.

4.3.1 Lie'nin Birinci Temel Teoremi

(4.4) dönüşümleri $\mathbb{R}^2$ de

$$x^* = \psi(x,y;a), \qquad y^* = \omega(x,y;a) \tag{4.7}$$

denklemleriyle ifade edilirse (4.4) te belirtilen dönüşümlerdeki **X** sürekli fonksiyonları (4.7) denklemlerinde ψ ve ω fonksiyonları olarak ifade edilmektedir.

Teorem 4.3.1

$$\frac{dx^*}{da} = \xi(x^*,y^*) \qquad \left.x^*\right|_{a=0} = x \tag{4.8}$$

$$\frac{dy^*}{da} = \eta(x^*,y^*) \qquad \left.x^*\right|_{a=0} = y \tag{4.9}$$

Lie'nin Birinci Temel Teoremi (4.8) ve (4.9) başlangıç değer problemlerinin çözümünün (4.7) dönüşümler grubuna denk geldiğini ifade eder [20][21].

Örnek 4.3.1

$$x^* = x + ax^2, \qquad y^* = y + axy \tag{4.10}$$

şeklinde sonsuz küçük dönüşümleri verilen dönüşüm grubunu bulunuz.

Çözüm:

Bu örnekte, $\xi(x,y) = x^2$ ve $\eta(x,y) = xy$ olduğundan;

$$\frac{dx^*}{da} = (x^*)^2, \qquad x^*\Big|_{a=0} = x \tag{4.11}$$

$$\frac{dy^*}{da} = (x^*y^*), \qquad y^*\Big|_{a=0} = y \tag{4.12}$$

birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleriyle verilen başlangıç değer problemlerini çözelim. (4.11) denkleminden

$$\frac{dx^*}{(x^*)^2} = da$$

ifadesi yazılıp integre edilerek

$$\int \frac{dx^*}{(x^*)^2} = \int da \implies \frac{-1}{x^*} = a + C(x,y)$$

ve buradan

$$x^* = \frac{-1}{a + C(x,y)} \tag{4.13}$$

şeklinde ifade edilerek başlangıç koşulu $a = 0$ yazılırsa

$$C(x,y) = \frac{-1}{x}$$

olarak $C(x,y)$ bulunur. Dolayısıyla C(x,y) sabiti (4.13) de yerine yazılırsa

$$x^* = \frac{x}{1 - xa}$$

biçiminde x^* elde edilir.
Şimdi (4.12) problemini çözelim. (4.12) denkleminden

$$\frac{dy^*}{y^*} = x^* da$$

oluşan bu denklemde (4.13) de bulduğumuz x^* ifadesini yazalım.

$$\frac{dy^*}{y^*} = \frac{x}{1 - xa} da$$

integrasyona geçiş yaparak

$$\int \frac{dy^*}{y^*} = \int \frac{x}{1-xa} da \implies y^* = \frac{C(x,y)}{1-xa}$$

ve bulunan bu ifadede (4.12) başlangıç koşulu uygulanırsa $C(x,y) = y$ bulunur. Bulunan bu ifade yerine yazılarak

$$y^* = \frac{y}{1-ax}$$

dönüşümü bulunur.

$$x^* = \frac{x}{1-xa}, \qquad y^* = \frac{y}{1-ax} \tag{4.14}$$

Elde edilen (4.14) dönüşümleri $\phi(a,b) = a + b$ işlemiyle beraber bir dönüşüm grubu oluşturur.

Örnek 4.3.2

$$x^* = x + a(x-y), \qquad y^* = y + a(x+y) \tag{4.15}$$

sonsuz küçük dönüşümleri için sürekli dönüşüm grubunu bulunuz [21].

Çözüm:

$\xi(x,y) = x - y$ ve $\eta(x,y) = x + y$ fonksiyonları (4.5) tanımından ilgili dönüşümün sonsuz küçükleridir. Şimdi bu sonsuz küçükler, Lie'nin birinci temel teoreminde belirtilen başlangıç değer problemlerinde kullanılarak

$$\frac{dx^*}{da} = x^* - y^* \qquad x^*\Big|_{a=0} = x \tag{4.16}$$

$$\frac{dy^*}{da} = x^* + y^* \qquad y^*\Big|_{a=0} = y \tag{4.17}$$

şeklinde (4.16) ve (4.17) denklemlerinden oluşan başlangıç değer problemi elde edilir. (4.16) deki denklemin iki tarafının a ya göre türevi alınarak,

$$\frac{d^2x^*}{da^2} = \frac{dx^*}{da} - \frac{dy^*}{da} \tag{4.18}$$

şeklinde oluşan (4.18) denkleminde $\frac{dy^*}{da}$ türevinin yerine (4.17) deki eşiti yazılarak

$$\frac{d^2x^*}{da^2} = \frac{dx^*}{da} - (x^* + y^*) \tag{4.19}$$

formunda oluşan (4.19) denkleminde, y^* yerine (4.16) de belirtilen denklemdeki eşiti yazıldığında

$$\frac{d^2x^*}{da^2} = \frac{dx^*}{da} - (x^* + (x^* - \frac{dx^*}{da})) \tag{4.20}$$

şeklinde oluşan (4.20) denklem düzenlendiğinde,

$$\frac{d^2x^*}{da^2} - 2\frac{dx^*}{da} + 2x^* = 0 \tag{4.21}$$

şeklinde (4.21) denklemi sabit katsayılı ikinci mertebeden homojen lineer bir denklem elde edilir. Bu denklemin karakteristik denklemi,

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

şeklinde yazılır. Karakteristik denklemin kökleri $r_1 = 1 + i$ ve $r_2 = 1 - i$ olduğundan (4.21) denkleminin

$$x_1^* = e^{(1+i)a} \qquad\qquad x_2^* = e^{(1-i)a} \tag{4.22}$$

şeklinde iki bağımsız çözümü bulunur. Genel çözüm, süper pozisyon ilkesi gereği

$$x^* = e^a(C_1(x,y)\cos a + C_2(x,y)\sin a) \tag{4.23}$$

(4.24) formunda elde edilir. Başlangıç şartı '$a = 0$' yazılırsa $C_1(x,y) = x$ bulunur. Bulunan $C_1(x,y)$, (4.24) eşitliğinde yazılarak

$$x^* = e^a(x\cos a + C_2(x,y)\sin a) \tag{4.24}$$

şeklinde (4.24) ifadesi elde edilir. (4.24) ve bunun türevi, (4.16) denkleminde yazılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$e^a(-x\sin a + C_2(x,y)\cos a) + e^a(x\cos a + C_2(x,y)\sin a)$$

$$= e^a(x\cos a + C_2(x,y)\sin a) - y^*$$

Elde edilen bu eşitlikte gerekli hesaplar yapılarak

$$y^* = e^a(x \sin a - C_2(x, y) \cos a) \tag{4.25}$$

şeklinde oluşan (4.25) eşitliğinde, (4.17) deki başlangıç şartından '$a = 0$' yazarak $C_2(x, y) = -y$ bulunur. $C_2(x, y)$, (4.25) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{cases} x^* = e^a(x \cos a - y \sin a) \\ y^* = e^a(x \sin a + y \cos a) \end{cases}$$

sürekli dönüşüm grubu elde edilir.

4.3.2 Sonsuz Küçük Üreteçler

Bir parametreli (4.4) Lie dönüşüm gruplarının sonsuz küçük üreteci aşağıdaki formda tanımlanır.

Tanım 4.3.1

$$X = X(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k(x)}.\nabla = \sum_{i=1}^{n} k_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4.26}$$

şeklinde (4.26) deki operatörle tanımlanır [20]. Buradaki ∇,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

şeklindeki gradient operatörüdür.
Aynı zamanda,

$$XF(\mathbf{x}) = \mathbf{k(x)}.\nabla F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} k_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} F(\mathbf{x}) \tag{4.27}$$

Diferansiyellenebilir her $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu için (4.27) eşitliği mevcuttur.

Buna göre, $\mathbb{R}^2$ de sonsuz küçük bir üreteç (jenerator), **k(x)** in bileşenleri $\mathrm{k}_1(x, y) = \xi(x, y)$ ve $k_2(x, y) = \eta(x, y)$ olmak üzere,

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \tag{4.28}$$

şeklinde ifade edilir. (4.28) sonsuz küçük üretecine $F(x, y)$ analitik fonksiyonu uygulanırsa

$$XF = \xi(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} \tag{4.29}$$

biçiminde bir fonksiyon elde edilir. Örneğin,

$$x^* = \frac{x}{1 - ax} \qquad\qquad y^* = \frac{y}{1 - ay} \tag{4.30}$$

dönüşümleriyle verilen grubun sonsuz küçük operatörünü bulalım. (4.5) e göre

$$\left.\frac{\partial x^*}{\partial a}\right|_{a=0} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{x}{1 - ax}\right)\Bigg|_{a=0} = \left.\frac{x^2}{(1 - ax)^2}\right|_{a=0} = x^2 = \xi(x, y)$$

$$\left.\frac{\partial y^*}{\partial a}\right|_{a=0} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{y}{1 - ay}\right)\Bigg|_{a=0} = \left.\frac{y^2}{(1 - ay)^2}\right|_{a=0} = y^2 = \eta(x, y)$$

ve buradan da (4.28) gereği

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde sonsuz küçük üreteci elde edilir. (4.4) dönüşüm grubunu bulabilmek için daha çok fizikçilerin kullandığı yöntem üretecin (jeneratör) üstel olarak yazılımıdır.

Teorem 4.3.2 *(4.4) bir parametreli Lie dönüşümler grubu üretecin aşağıdaki gibi üstel olarak yazılımına denktir.*

$$\boldsymbol{x}^* = e^{aX}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + aX\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}a^2X^2\boldsymbol{x}...... = [1 + aX + \frac{1}{2}a^2X^2 + ...]\boldsymbol{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}X^n\boldsymbol{x} \tag{4.31}$$

Bu serideki $X = X(\mathbf{x})$, (4.26) de tanımlandığı gibidir. Ayrıca $X^k = X^{k-1}X$ olmak üzere $X^k = X^k(\mathbf{x})$, $\forall k \in \mathbb{N}^+$ şeklinde yazılır. Diğer taraftan $X^kF(\mathbf{x})$ fonksiyonu $X^{k-1}F(\mathbf{x})$ fonksiyonuna X operatötü uygulanarak elde edilen fonksiyondur ($k = 1, 2, 3......$) [20].

Teorem 4.3.2 nin bir sonucu olarak $F(\mathbf{x})$ sonsuz türevli fonksiyonu için

$$F(\mathbf{x}^*) = F(e^{aX}\mathbf{x}) = e^{aX}F(\mathbf{x}) \tag{4.32}$$

eşitliği vardır [20].

Örnek 4.3.3

$$x^* = x\cos a + ysina$$
$$y^* = -x\sin a + y\cos a$$

dönme dönüşüm grubu için

$$\textbf{k(x)} = (\xi(x,y), \eta(x,y))$$

olmak üzere

$$\left.\frac{dx^*}{da}\right|_{a=0} = \xi(x,y) = y$$
$$\left.\frac{dy^*}{da}\right|_{a=0} = \eta(x,y) = -x$$

şeklinde sonsuz küçükler bulunarak dönme grubunun üreteci

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

olacak şekilde bulunur. Dönme grubu üretecine karşılık gelen Lie serisi aşağıdaki gibidir.

$$X(x) = y$$
$$X^2x = X(X(x)) = -x$$
$$X^3x = X(X(X(x))) = -y$$
$$X^4x = X(X(X(X(x)))) = x$$
$$.....$$

ve

$$X(y) = -x$$
$$X^2y = X(X(y)) = -y$$
$$X^3y = X(X(X(y))) = x$$
$$X^4y = X(X(X(X(y)))) = y$$
$$.....$$

periyodik şekilde tekrarlanır. Yani,

$$X^{4k}x = x, X^{4k-1}x = -y, X^{4k-2}x = -x, X^{4k-3}x = y, (k = 1, 2, 3....)$$

$$X^{4k}y = y, X^{4k-1}y = x, X^{4k-2}y = -y, X^{4k-3}y = -x, (k = 1, 2, 3....)$$

olarak yazılır. Yukarıdaki periyodik döngü eşitlikleri aşağıdaki seri açınımında yazılarak

$$x^* = e^{aX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} X^n x = (1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + ...)x + (a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!}......)y$$

olacak şekilde $sinüs$ ve $cosinüs$ fonksiyonlarının sıfır civarındaki taylor seri açınımları elde edilir.

$$x^* = x\cos a + y \sin a$$

olacak şekilde bulunur. Benzer şekilde,

$$y^* = e^{aY} y = -x \sin a + y \cos a$$

olarak bulunur [6] [20].

Örnek 4.3.4

$$X = y\frac{\partial}{\partial x}$$

Jeneratörüne sahip dönüşüm grubunu bulunuz.

$$x^* = e^{aX} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} X^n x$$

serisindeki $X^n ler$ için verilen operatörü x ve y koordinatlarına uygulayalım.

$$X(x) = y, X(X(x)) = 0, X^n x = 0, \forall n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}$$

$$X(y) = 0, X^n(y) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$$

Bunlar seride yazılırsa

$$x^* = x + ay$$

$$y^* = y$$

döşüm grubu elde edilir.

4.3.3 Değişmez Fonksiyonlar

Tanım 4.3.2 *Sonsuz türevlenebilir bir $F(\boldsymbol{x})$ fonksiyonunun (4.4) Lie dönüşüm grubunun bir invaryant fonksiyonu olabilmesi için gerek ve yeter koşul herhangi bir grup dönüşümü için*

$$F(\boldsymbol{x}) \equiv F(\boldsymbol{x}^*)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Eğer $F(\boldsymbol{x})$, (4.4) dönüşüm grubunun değişmez bir fonksiyonu ise $F(\boldsymbol{x})$'e (4.4) dönüşüm grubunun değişmezi denir [20].

Teorem 4.3.3 *$F(\boldsymbol{x})$ fonksiyonunun bir Lie dönüşüm grubu altında invaryant olması için gerek ve yeter koşul*

$$XF(\boldsymbol{x}) \equiv 0$$

olmasıdır [20].

Kanıt: $F(\mathbf{x})$ invaryart olduğundan tanım gereği

$$F(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}^*)$$

eşitliği vardır. Bundan dolayı Lie seri açınımından aşağıda basitçe göründüğü gibi

$$F(\mathbf{x}^*) \equiv e^{aX} F\mathbf{x} \equiv F(\mathbf{x}) + aXF(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}a^2X^2F(\mathbf{x}) ...... \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} X^n F(\mathbf{x}) \quad (4.33)$$

$$XF(\mathbf{x}) \equiv 0$$

$$X^n F(\mathbf{x}) \equiv 0$$

n=1,2,3.... olur. Karşıt olarak ise invaryant tanımı aşikar şekilde görünür. Eğer

$$XF(\mathbf{x}) \equiv 0$$

olursa seri açınımından

$$F(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}^*)$$

sonucuna basitçe ulaşılır. Bu da invaryantlık demektir.

Örnek 4.3.5

$$x^* = e^a x, \qquad y^* = e^{2a} y, \qquad a \in \mathbb{R} \qquad (4.34)$$

dönüşüm grubunun invaryant fonksiyonunu bulalım. Öncelikle üreteci bulalım. (4.5) formülü gereği

$$\xi(x,y) = \left.\frac{dx^*}{da}\right|_{a=0} = x$$

$$\eta(x,y) = \left.\frac{dy^*}{da}\right|_{a=0} = 2y$$

şeklinde bulunan sonsuz küçükler (4.28) te yazılarak

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$$

sonsuz küçük üreteci bulunur. Aradığımız $F(x, y)$ fonksiyonu için Teorem 4.3.3 ten dolayı

$$XF = x\frac{\partial F}{\partial x} + 2y\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

kısmi türevli diferansiyel denklemi yazılabilir. Bu denklemin karakteristik denklemleri,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dF}{0}$$

şeklindedir. Buradan ilk iki oran eşitliğinden C_1, C sabitler olmak üzere

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} \iff \ln x = \frac{\ln y}{2} + \ln C_1 \iff y = x^2 C \iff C = \frac{y}{x^2}$$

şeklinde oluşan eşitlik yardımıyla grubun invaryant (değişmez) fonksiyonu, $dF = 0 \implies F$ sabit olduğundan $F(x, y) = F(\frac{y}{x^2})$ formundadır. fonksiyondur. Yani, $\mathbb{V}(x, y) = \frac{y}{x}^2$ fonksiyonu verilen dönüşüm grubu altında değişmez olduğundan genel değişmez fonksiyon, $F(x, y) = F(\frac{y}{x^2})$ olacak biçimde $\frac{y}{x^2}$ nin bir fonsiyonudur.

Teorem 4.3.4 *(4.4) Lie döüşümler grubu için*

$$F(\boldsymbol{x}^*) \equiv F(\boldsymbol{x}) + a$$

denkliğinin sağlanması için gerek yeter koşul

$$XF(\boldsymbol{x}) \equiv 1$$

denkliğinin gerçekleşmesidir [20].

Kanıt: Teoremde gereklilik ve yeterlilik (4.33) Lie serisi açınımından rahatça görülebilir.

4.3.4 Kanonik Koordinatlar

Tanım 4.3.3 *İki gruba, eğer birinden diğeri uygun değişken dönüşümü kullanılarak elde edilebiliyorsa benzerdir denir.*

Koordinatlarda uygun bir değişiklik yapıldığını varsayalım.

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y(x)} = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), ..., y_n(\mathbf{x})) \tag{4.35}$$

(4.4) Lie dönüşüm grubunun sonsuz küçük jeneratörü, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ koordinatlarına sahip nokta için

$$X = \sum_{i=1}^{n} k_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

formunda olduğu bilinmektedir. (4.35) değiştirilmiş koordinatları için sonsuz küçük jeneratörü (üreteç),

$$Y = \sum_{i=1}^{n} p_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{4.36}$$

şeklindedir. Dolayısıyla aynı grup etkisi söz konusu olması için $X = Y$ olmalıdır. Buradaki **y** koordinatları altında sonsuz küçükler,

$$\mathbf{p(y)} = (p_1(\mathbf{y}), p_2(\mathbf{y}), ..., p_n(\mathbf{y})) = Y(\mathbf{y}) \tag{4.37}$$

eşitlikleriyle verilir.

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ türevlerinin her birine x_i' lere göre zincir kuralı uygulanarak X jeneratörü, aşağıdaki şekilde Y jeneratörüne dönüşür.

$$X = \sum_{i=1}^{n} k_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^{n} k_i(\mathbf{x}) \frac{\partial y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^{n} p_j(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} = Y \tag{4.38}$$

$X = Y$ olması için

$$p_j(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} k_i(\mathbf{x}) \frac{\partial y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = X_{y_j}, \tag{4.39}$$

$j = 1, 2, ..., n$ olmak üzere (4.39) eşitliği sağlanmalıdır [20].

Teorem 4.3.5 *(4.35) ile verilen* **y** *koordinatlarına göre, tek parametreli (4.7) Lie dönüşüm grubu,*

$$y^* = e^{aY} \mathbf{y}$$

şeklinde olur [20].

Tanım 4.3.4 *(4.35) koordinatların değişikliği (4.4) teki bir parametreli Lie dönüşüm grupları için kanonik koordinatlar kümesi tanımlar. Bu tür koordinatlar türünden* (4.4) *dönüşümler grubu,*

$$\begin{aligned} y_i^* &= y_i \qquad , \quad i = 1, 2, ..., n-1 \\ y_n^* &= y_n + a \end{aligned} \tag{4.40}$$

şekline dönüşür [20].

Teorem 4.3.6 *(4.4) teki herhangi bir Lie dönüşüm grubu (4.3.4) dönüşüm grubuna denk olacak şekilde* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *kanonik koordinatlar kümesi vardır [20].*

Kanıt: Tanım 4.3.4 gereği

$$y_i^* = y_i(\mathbf{x}^*) = y_i(\mathbf{x})$$

olduğundan Teorem 4.3.3 gereği

$$Xy_i(\mathbf{x}) \equiv 0 \tag{4.41}$$

$i = 1, 2, ..., n-1$ şeklindeki (4.41) özdeşliği kullanarak bir u($\mathbf{x}$), X operatörü ile yazılarak

$$Xu(\mathbf{x}) = k_1(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + k_2(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + k_n(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{4.42}$$

şeklinde oluşan birinci mertebeden lineer kısmi türevli diferansiyel denklemin fonksiyonel (işlevsel) olarak bağımsız $n-1$ tane çözümü vardır. Bu çözümler n tane birinci mertebeden adi diferansiyel denklemin genel çözümlerinde görünen $(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), ...,$ $y_n(\mathbf{x}))$ sabitleridir.
(4.42) kısmi türevli diferansiyel denklemin karakteristik denklemleri (Lagrange sistemi)

$$\frac{dx_1}{k_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{k_2(\mathbf{x})} = ... = \frac{dx_n}{k_n(\mathbf{x})} = \frac{du}{0} \tag{4.43}$$

şeklinde olur. Buradan da (4.3.4) daki $n-1$ tane koordinat elde edilir, Teorem 4.3.4 ten

$$y_n^* = y_n(\mathbf{x^*}) = y_n(\mathbf{x}) + a \iff Xy_n(\mathbf{x}) \equiv 1$$

Dolayısıyla $y_n(\mathbf{x})$ aşağıda oluşan homojen olmayan birinci mertebeden lineer kısmi türevli diferansiyel denklemin özel çözümü $v(\mathbf{x})$ tarafından verilir.

$$Xv(\mathbf{x}) = k_1(\mathbf{x})\frac{\partial v}{\partial x_1} + k_2(\mathbf{x})\frac{\partial v}{\partial x_2} + ... + k_n(\mathbf{x})\frac{\partial v}{\partial x_n} = 1 \tag{4.44}$$

(4.44) denkleminin karakteristik denklemleri aşağıdaki şekilde yazılarak çözüme gidilir.

$$\frac{dx_1}{k_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{k_2(\mathbf{x})} = ... = \frac{dx_n}{k_n(\mathbf{x})} = \frac{dv}{1} \tag{4.45}$$

Teorem 4.3.7 *Tek parametreli Lie dönüşümler grubu herhangi bir kanonik koordinatta* $\boldsymbol{y} = (y_1(\boldsymbol{x}), y_2(\boldsymbol{x}), ..., y_{n-1}(\boldsymbol{x}))$ *yazıldığında, sonsuz küçük üreteci,*

$$Y = \frac{\partial}{\partial y_n} \tag{4.46}$$

formunda olur.

Kanıt: (4.37) ile $\sum_{j=1}^{n} p_j(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} = Y$ şeklinde tanımlı sonsuz küçük üreteci hatırlanarak

$$\begin{aligned} p_i(\mathbf{y}) &= X y_i \quad = 0 \quad , \quad i = 1, 2, ..., n-1 \\ p_n(\mathbf{y}) &= X y_n \quad = 1 \end{aligned}$$

denklemlerinden (4.46) deki şekilde kanonik koordinatlarda üreteç elde edilir [20].

Örnek 4.3.6

Sonsuz küçük üreteci,

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$$

olan scaling grubunun kanonik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: (s, r) kanonik koordinatlar olsun.

$$X(r) = x\frac{\partial r}{\partial x} + 2y\frac{\partial r}{\partial y} = 0 \tag{4.47}$$

$$X(s) = x\frac{\partial s}{\partial x} + 2y\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \tag{4.48}$$

denklemlerinin çözümleri kanonik koordinatları verir. (4.47) karakteristik denklemler

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dr}{0}$$

şeklinde olup, ilk iki oran eşitliğinden

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}$$

şeklinde oluşan adi diferansiyel denkleminin çözümündeki sabit r dir.

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{2y} \iff \ln x + \ln C_1 = \frac{1}{2}\ln y \iff x^2 C = y$$

ve buradan

$$C = \frac{y}{x^2} = r(x, y)$$

şeklinde r koordinatı bulunur. (4.48) denkleminden karakteristik denklemler,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{ds}{1}$$

şeklindedir. Buradan birinci ve üçüncü oranların eşitliğinden

$$s(x, y) = \ln x$$

şeklinde yazılır. Son durumda

$$(s, r) = (\ln x, \frac{y}{x^2})$$

şeklinde kanonik koordinatlar elde edilir.

Örnek 4.3.7

$$x^* = x\cos a - y\sin a \tag{4.49}$$

$$y^* = x\sin a + y\cos a \tag{4.50}$$

dönüşümleriyle verilen dönme grubunun kanonik koordatlarını bulunuz.

Çözüm: Grubun üreteci,

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklindedir.

$$X(r) = -y\frac{\partial r}{\partial x} + x\frac{\partial r}{\partial y} = 0 \tag{4.51}$$

$$X(s) = -y\frac{\partial s}{\partial x} + x\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \tag{4.52}$$

şeklinde $X(s)$ ve $X(r)$ ifadeleri yazılabilir. (4.51) denkleminin karakteristik denklemleri

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dr}{0}$$

şeklinde yazılarak ilk iki oranın eşitliğinden oluşan

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$$

adi diferansiyel denkleminin integre edilmesiyle $dr = 0 \implies r = C = sabit$

olduğundan

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

olacak şeklinde elde edilir.

(4.52) denkleminin karakteristik denklemleri (Lagrange yardımcı sistemi)

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{ds}{1}$$

şeklinde yazılıp, buradan ikinci ve üçüncü oranların eşitliğinden oluşan

$$\frac{dy}{x} = \frac{ds}{1}$$

denkleminin integre edilebilmesi için $x = \sqrt{C^2 - y^2}$ ifadesi son denklemde yazılır.

$$\frac{dy}{\sqrt{C^2 - y^2}} = \frac{ds}{1}$$

integrasyona geçiş yapılarak

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C^2 - y^2}} = \int \frac{ds}{1}$$

buradan

$$s(x, y) = \arcsin \frac{y}{r}$$

şeklinde s koordinatı bulunur.

$$(r, s) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arcsin \frac{y}{r})$$

şeklinde kanonik koordinatları elde edilir.

Örnek 4.3.8

$$x^* = x + a$$
$$y^* = \frac{xy}{x + a}$$

bir parametreli dönüşüm grubunun kanonik koordinatlarını bulunuz ([20] de alıştırma)

Çözüm:

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \tag{4.53}$$

olmak üzere,

$$\xi = \left.\frac{\partial(x+a)}{\partial a}\right|_{a=0} = 1 \qquad\qquad \eta = \left.\frac{\partial(\frac{xy}{x+a})}{\partial a}\right|_{a=0} = \frac{-y}{x} \tag{4.54}$$

bulunan (4.54) sonsuz küçükleri (4.53) de yazılarak grubun üreteci

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.55}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan jeneratör için Xr ve Xs ifadeleri

$$X = \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{y}{x}\frac{\partial r}{\partial y} = 0 \tag{4.56}$$

$$X = \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{y}{x}\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \tag{4.57}$$

biçiminde yazılarak elde edilen kısmi türevli denklemlerin çözümlerinden kanonik koordinatlar bulunur. Öncelikle (4.56) denkleminin

$$\frac{dx}{1} = \frac{-x}{y}dy = \frac{dr}{0}$$

şeklindeki karakteristik denklemlerinden

$$\frac{dx}{1} = \frac{-x}{y}dy$$

denklemi yazılıp integre edilerek

$$C = xy$$

bulunur ki bu da $r = r(x, y)$ olmak üzere

$$r = xy$$

demektir. Diğer taraftan (4.57) denkleminin karakteristik denklemleri

$$\frac{dx}{1} = \frac{-x}{y}dy = \frac{ds}{1}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda

$$ds = dx$$

denkleminden $s = s(x, y)$ olmak üzere

$$s = x$$

olur ve kanonik koordinatlar

$$(r, s) = (xy, x)$$

şeklinde elde edilir.

4.4 Genişletilmiş Lie Dönüşüm Grupları

Tanım 4.4.1 *Bir parametreli Lie nokta dönüşüm grupları, aşağıdaki formda bir dönüşüm grubudur.*

$$\mathbf{x}^* = \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}; a) \qquad \mathbf{u}^* = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}; a) \tag{4.58}$$

(4.58) dönüşümlerindeki x ve u

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\mathbf{u} = (u^1, u^2, ..., u^m)$$

şeklinde sırasıyla n tane bağımsız, m tane bağımlı değişkeni ifade etmek üzere verilen dönüşüm grubu, $n + m$ değişkenli uzayda etki eder [20].

4.4.1 Genişletilmiş Nokta Dönüşümleri Grubu

Bu alt bölümde (4.58) ile verilen dönüşüm ailesinden bir tane bağımlı ve bir tane bağımsız değişkenli nokta dönüşümleri üzerinde çalışılacaktır.

$$x^* = X(x, y; a), \qquad y^* = Y(x, y; a) \tag{4.59}$$

$y = y(x)$ olmak üzere, a parametreli (4.59) dönüşüm grubu verilsin.

$$y_k = y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}, k \geq 1$$

($y_1 = y^{(1)} = \frac{dy}{dx}, y_2 = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dx^2}, y_3 = y^{(3)} = \frac{dy^3}{dx^3}, ...$) notasyonları geçerli olsun.

$$dy = y_1 dx$$

$$dy_1 = y_2 dx$$

$$....$$

$$dy_k = y_{k+1}dx$$

değme (kontaktlık) şartı korunarak (4.59) dönüşüm grubu $(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(k)})$ uzayına genişletilebilir. Lie dönüşüm grupları değme şartını (x, y) ve (x^*, y^*) uzaylarında korur [20][6]. Yani,

$$dy^* = y_1 dx^*$$

$$....$$

$$dy_k^* = y_{k+1}^* dx^*$$

$k \geq 1$ olacak şekilde yazılabilir. x^* ve y^* (4.59) de tanımlanmıştır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} dy^* = dY(x, y; a) &= \frac{\partial Y(x, y; a)}{\partial x}dx + \frac{\partial Y(x, y; a)}{\partial y}dy \\ dx^* = dX(x, y; a) &= \frac{\partial X(x, y; a)}{\partial x}dx + \frac{\partial X(x, y; a)}{\partial y}dy \end{aligned} \tag{4.60}$$

(4.60) denklemleri değme şartında yazılarak

$$\frac{\partial Y(x, y; a)}{\partial x}dx + \frac{\partial Y(x, y; a)}{\partial y}dy = y_1^*[\frac{\partial X(x, y; a)}{\partial x}dx + \frac{\partial X(x, y; a)}{\partial y}dy] \tag{4.61}$$

ve (4.61) teki bütün terimleri dx e bölerek ($\frac{dy}{dx} = y^{'} = y_1$)

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1; a) = \frac{\frac{\partial Y(x,y;a)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x,y;a)}{\partial y}y_1}{\frac{\partial X(x,y;a)}{\partial x} + \frac{\partial X(x,y;a)}{\partial y}y_1} \tag{4.62}$$

şeklinde elde edilir [20]. Görüldüğü üzere (4.62) teki $Y_1(x, y, y_1; a)$, $Y(x, y; a)$'ya y_1 in eklenmesiyle oluşmuştur. Bu durum aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem 4.4.1 *(x, y) uzayında etki eden (4.2) nokta dönüşümünün tek parametreli Lie grubu (x, y, y_1) uzayında etki eden aşağıdaki tek parametreli Lie dönüşüm grubuna genişler.*

$$x^* = X(x, y; a), \qquad y^* = Y(x, y; a), \qquad y_1^* = Y_1(x, y, y_1; a) \tag{4.63}$$

y_1^* değişkeni (4.62) de ifade edilmiştir [20].

(4.63) ile verilen dönüşümler grubu (4.59) ile verilen grubun birinci genişlemesidir. Benzer şekilde verilen (4.59) Lie dönüşümler grubuna $y_2, ..., y_k$ türevleri sırasıyla eklendiğinde oluşan yapı yine bir Lie dönüşüm grubudur.

Teorem 4.4.2 *(4.59) Tek parametreli Lie nokta grubunun k'inci uzantısı (genişlemesi)* *aşağıdaki şekilde $(y_1, y_2, ..., y_k)$ uzayında etki eden tek parametreli Lie grubudur:[20]*

$$x^* = X(x, y; a)$$

$$y^* = Y(x, y; a)$$

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1; a)$$

$$...$$

$$...$$

$$y_k^* = Y_k(x, y, y_1, ..., y_k) = \frac{\dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial y} + \ldots + \dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}} y_k}{\dfrac{\partial X\left(x, y; a\right)}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial X\left(x, y; a\right)}{\partial y}} \tag{4.64}$$

matematik indiksiyonla (4.64) eşitliği basitçe görünür.

Örnek 4.4.1

$$x^* = \frac{x}{1 - ax} \qquad\qquad y^* = \frac{y}{1 - ax} \tag{4.65}$$

dönüşüm noktalarıyla verilen grubun 1. ve 2. genişlemelerini bulalım.

1. genişleme:

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1; a) = \frac{\frac{\partial Y(x,y;a)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x,y;a)}{\partial y} y_1}{\frac{\partial X(x,y;a)}{\partial x} + \frac{\partial X(x,y;a)}{\partial y} y_1}$$

eşitliğindeki kısmi türevler hesaplanarak formülde yerlerine yazılır öyleki;

$$\frac{\partial Y(x, y; a)}{\partial x} = \frac{ay}{(1 - ax)^2}, \qquad \frac{\partial Y(x, y; a)}{\partial y} = \frac{1}{1 - ax}$$

$$\frac{\partial X(x, y; a)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial X(x, y; a)}{\partial x} = \frac{1}{(1 - ax)^2}$$

Y_1 ifadesinde yerlerine yazılarak

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1; a) = ay + (1 - ax)y_1 \tag{4.66}$$

şeklinde Y_1 bulunur.

2. genişleme: (4.64) formulünde $k = 2$ yazılarak elde edilen kısmi türevler hesaplanarak

Y_2 bulur.

$$y_2^* = Y_2(x,y,y_1,y_2) = \frac{\dfrac{\partial Y_1}{\partial x} + y_1\dfrac{\partial Y_1}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1}y_2}{\dfrac{\partial X\,(x,y;a)}{\partial x} + y_1\dfrac{\partial X\,(x,y;a)}{\partial y}} \tag{4.67}$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x} = -ay_1, \qquad \frac{\partial Y_1}{\partial y} = a, \qquad \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} = 1 - ax$$

$$\frac{\partial X(x,y;a)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial X(x,y;a)}{\partial x} = \frac{1}{(1-ax)^2}$$

elde edilen kısmi türevler (4.67) da yazılarak

$$y_2^* = Y_2(x,y,y_1,y_2) = (1-ax)^3 y_2$$

şeklinde Y_2 ikinci genişlemesi elde edilir.

Tanım 4.4.2 *Toplam türev operatörü*

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + y_{n+1}\frac{\partial}{\partial y_n} + ... \tag{4.68}$$

formuyla tanımlanır. Diferansiyellenebilen bir $F(x,y,y^{(1)},y^{(2)},...,y^{(m)})$ fonksiyonunun toplam türevi

$$DF(x,y,y_1,y_2,...,y_m) = F_x + y_1F_y + y_2F_{y_1} + ... + y_{m+1}F_{y_m}$$

şeklinde yazılır. Dolayısıla Teorem (4.4.2) deki dönüşüm grubu

$$x^* = X(x,y;a)$$

$$y^* = Y(x,y;a)$$

$$...$$

$$y_i^* = Y_i(x,y,y_1,...,y_i;a) = \frac{DY_{i-1}(x,y,y_1,...,y_i;a)}{DX(x,y;a)} \tag{4.69}$$

$i = 1,2,...,k$ ve $Y_0 = Y$ olacak biçimde türev operatörü ile ifade edilir [20].

4.4.2 Genişletilmiş Sonsuz Küçük Dönüşümler

Bir parametreli Lie dönüşüm grubu,

$$x^* = X(x, y; a) = x + a\xi(x, y) + O(a^2) \tag{4.70}$$

$$y^* = Y(x, y; a) = y + a\eta(x, y) + O(a^2) \tag{4.71}$$

(x, y) uzayında etkir ve sonsuz küçükleri $\xi(x, y)$ ve $\eta(x, y)$ olmak üzere sonsuz küçük jeneratörü

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

formunda yazılır. Bu dönüşüm grubunun k. genişlemesi

$$x^* = X(x, y; a) = x + a\xi(x, y) + O(a^2)$$

$$y^* = Y(x, y; a) = y + a\eta(x, y) + O(a^2)$$

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1; a) = y_1 + a\zeta_1(x, y, y_1) + O(a^2)$$

$$...$$

$$y_k^* = Y_k(x, y, y_1, ..., y_k; a) = y_k + a\zeta_k(x, y, y_1, ..., y_k) + O(a^2)$$

olarak verilir. Dolayısıyla k. genişletilmiş sonsuz küçükler

$$\xi(x, y), \qquad \eta(x, y), \qquad \zeta_1(x, y, y_1), \qquad ... \qquad , \zeta_k(x, y, y_1, ..., y_k)$$

şeklinde olacağından k. genişleme sonsuz küçük üreteci

$$X^{[k]} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1(x, y, y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + ... + \zeta_k(x, y, y_1, ..., y_k)\frac{\partial}{\partial y_k} \tag{4.72}$$

$k = 1, 2, ...$ formunda yazılır [20].

(4.72) deki ζ_k sonsuz küçükleri aşağıdaki teoremdeki formülle hesaplanır.

Teorem 4.4.3 $\zeta_0 = \eta(x, y)$ *olmak üzere*

$$\zeta_k(x, y, y_1, ..., y_k) = D\zeta_{k-1}(x, y, y_1, ..., y_{k-1}) - y_k D\xi$$

eşitliği geçerlidir [20][26].

Teoreme göre,

$$\zeta_1 = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_1 - \xi_y(y_1)^2,$$

$$\zeta_2 = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_1 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y_1^2) - \xi_{yy}(y_1)^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y_2 - 3\xi_y y_1 y_2,$$

$$\begin{aligned}\zeta_3 \;=\; & \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y_1 + 3(\eta_{xyy} - 2\xi_{xxy})(y_1)^2 + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy})(y_1)^3 \\ & -\xi_{yyy}(y_1)^4 + 3(\eta_{xy} - \xi_{xx})y_2 + 3(\eta_{yy} - 3\xi_{yy})y_1y_2 \; - 6\xi_{yy}(y_1)^2y_2 - 3\xi(y_2)^2 \\ & +(\eta_y - 3\xi_x)y_3 - 4\xi_y y_1 y_3,\end{aligned}$$

olarak $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ sonsuz küçükleri elde edilir.

Örnek 4.4.2

$$x^* = x + a, \qquad y^* = \frac{xy}{x+a} \tag{4.73}$$

dönüşüm grubunun $\xi, \eta, \zeta_1, \zeta_2$ sonsuz küçüklerini belirleyelim ([20] alıştırmalar 2.4)

Çözüm: (4.5) formulünden ξ ve η,

$$\xi = \frac{dx^*}{da}\bigg|_{a=0} = 1, \qquad \eta = \frac{dy^*}{da}\bigg|_{a=0} = -\frac{y}{x}$$

şeklinde bulunur.

$$\xi_x = 0, \qquad \xi_y = 0, \qquad \eta_x = \frac{y}{x^2}, \qquad \eta_y = -\frac{1}{x}, \qquad \eta_{xx} = -\frac{2y}{x^3}$$

$$\eta_{yy} = 0, \qquad \eta_{xy} = \frac{1}{x^2}, \qquad \xi_{xx} = 0, \qquad \xi_{xy} = 0, \qquad \xi_{yy} = 0$$

ifadeleri teorem 4.4.3 te elde edilen ζ_1 ve ζ_2 de yazılarak

$$\zeta_1 = \frac{y}{x^2} - \frac{y_1}{x}$$

ve

$$\zeta_2 = -\frac{2y}{x^3} + \frac{2}{x^2}y_1 - \frac{1}{x}y_2$$

şeklinde sonsuz küçükler bulunur.

Örnek 4.4.3

$$x^* = e^a x, \qquad y^* = e^{2a}y, \qquad y = y(x)$$

scaling grubunun sonsuz küçükleri

$$\xi = \left.\frac{de^a x}{da}\right|_{a=0} = x \qquad \eta = \left.\frac{2ay}{da}\right|_{a=0} = 2y$$

şeklinde sonsuz küçükleri elde edilir. Bunların gerekli kısmi türevleri hesaplanıp genişletilmiş sonsuz küçükler bulunur. Teorem 4.4.3 yardımıyla

$$\zeta_3 = -y_3, \quad \zeta_2 = 0, \quad \zeta_1 = y_1, \quad \zeta_4 = -2y_4, \quad ..., \quad \zeta_k = (2-k)y_k$$

$k \geq 1$ şeklinde sonsuz küçükler tümevarımla görülebilir [20].

4.5 Eğrilerin ve Yüzeylerin Eşlemeleri

Bir parametreli Lie grubunun etkisi altında, adi diferansiyel denklemlerin her çözüm eğrisi, yine tek parametreli çözüm eğrileri ailesine eşlenir. Bu çözüm eğrileri, aynı Lie grubu altında değişmezdirler. Bu durum, kısmi diferansiyel denklemler için de geçerlidir [20].

4.5.1 Değişmez Yüzeyler, Değişmez Eğriler ve Değişmez Noktalar

Tanım 4.5.1 *Bir $F(\boldsymbol{x}) = 0$ yüzeyi (4.4) Lie dönüşüm grubu için değişmez yüzey olması için gerek yeter koşul $F(\boldsymbol{x}) = 0$ olduğunda $F(\boldsymbol{x}^*) = 0$ eşitliğinin gerçekleşmesidir [20].*

Tanım 4.5.2 *Bir $F(x, y) = 0$ eğrisinin (4.70) ve (4.71) eşitlikleriyle verilen Lie dönüşüm grubu için değişmez eğri olması için gerek yeter koşul $F(x, y) = 0$ iken $F(x^*, y^*) = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır [20].*

Teorem 4.5.1 ***i:*** *Bir $F(\boldsymbol{x}) = 0$ yüzeyi (4.4) Lie dönüşüm grubu için değişmez yüzey olması için gerek yeter koşul $F(\boldsymbol{x}) = 0$ olduğunda $XF(\boldsymbol{x}) = 0$ eşitliğinin gerçekleşmesidir.*

ii: *Bir $F(x, y) = 0$ eğrisinin (4.70), (4.71) Lie dönüşüm grubu için değişmez eğri olması için gerek yeter koşul $F(x, y) = 0$ iken $XF(x, y) = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.*

Buradaki X, (4.28) ile tanımlanan sonsuz küçük üretecidir [20].

Teorem **i** deki denklemin çözümü, verilen bir Lie dönüşüm grubunun değişmez yüzeyini bulmak için bir fikir verir.

$F(x,y)=y-f(x)=0$ çözülmüş formunda verilen bir eğri değişmez eğri olması için gerek ve yeter koşul Teorem **ii** ye göre

$$XF(x,y)=X(y-f(x))=-\xi(x,y)f^{'}(x)+\eta(x,y)=0 \tag{4.74}$$

eşitliğinin geçerli olmasıdır [20]. (4.74) teki eşitlik gereği $F(x,y)$ eğrisinin herhangi bir noktasındaki eğimi

$$\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}$$

şeklinde sonsuz küçükler türünden yazılabildiği dikkate değerdir.

Örnek 4.5.1

$$x^*=e^a x, \qquad y^*=e^a y, \qquad a\in\mathbb{R} \tag{4.75}$$

dönüşüm grubu için değişmez eğrileri bulunuz.

Çözüm: Öncelikle grubun sonsuz küçükleri

$$\xi(x,y)=\left.\frac{dx^*}{da}\right|_{a=0}=x$$

$$\eta(x,y)=\left.\frac{dy^*}{da}\right|_{a=0}=y$$

şeklinde bulunarak buradan

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$$

biçiminde sonsuz küçük üreteç elde edilir. Teoremden

$$XF=x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

kısmi türevli diferansiyel denkleminin karakteristik denklemleri,

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dF}{0}$$

şeklinde olur. Birinci ve ikinci oranların eştliğinden

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y} \iff \ln x=\ln y+\ln c \iff \frac{x}{y}=c \iff y=\frac{1}{c}x \iff y=mx$$

c ve m birer sabit olamak üzere orjinden geçen eğriler elde edilir. Bir diğer ifadeyle

$$F(x, y) = y - mx = 0$$

şeklindeki F eğrileri orjinden geçen invaryant (değişmez) eğrilerdir. Görüldüğü üzere $dF = 0$ ve dolayısıyla $F = C$ sabit olduğundan düzlemde bir eğri ailesi oluşturur. Bu eğri ailesi, aynı zamanda grubun *yörüngesi* olarak ifade edilir.

Düzlemdeki herhangi bir noktaya ilgili grubun sonsuz küçük dönüşümünü sonsuz kere uygulanarak sürekli bir eğri oluşturulabilir.

$$x^* = x \cos a - y \sin a, \qquad y^* = x \sin a + y \cos a$$

dönme grubunun yörüngelerini bulalım.

Dönüşüm grubunun üreteci,

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde olup,

$$XF = -y\frac{\partial F}{\partial x} + x\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

kısmi türevli diferansiyel denklemin karakterstik denklemleri aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\frac{-dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dF}{0}$$

İlk iki oranın eşitliğinden integrasyona geçiş yapılarak $F(x, y)$ eğriler ailesi yani dönme grubunun yörüngeleri,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

şeklinde orjin merkezli r yarıçaplı çemberler olarak elde edilir.

Tanım 4.5.3 *Bir **x** noktasının (4.4) Lie dönüşüm grubu için invaryant nokta olması için gerek ve yeter koşul (4.4) dönüşüm grubu altında $\mathbf{x}^* \equiv \mathbf{x}$ denkliğinin gerçekleşmesidir [20].*

Teorem 4.5.2 *Bir **x** noktasının (4.4) Lie dönüşüm grubu için invaryant nokta olması için gerek ve yeter koşul **k(x)** $= 0$ olmasıdır [20].*

Teorem, $\mathbb{R}^2$ de düşünülürse $\xi(x, y) = 0$ ve $\eta(x, y) = 0$ olacak şekilde (4.28) deki gibi **k(x)** iki bileşenden oluştuğunu hatırlayalım.

Örneğin ;

$$x^* = e^a x, \qquad y^* = e^{2a} y, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Dönüşüm grubunun sonsuz küçük üreteci,

$$\xi(x,y) = x$$

ve

$$\eta(x,y) = 2y$$

sonsuz küçükler olmak üzere

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde ifade edilir. Teorem (4.5.2) den

$$\xi(x,y) = x = 0$$

ve

$$\eta(x,y) = 2y = 0$$

ifadeleri yazılarak $x = y = 0$ olduğundan verilen dönüşüm grubu için invaryant noktası $(0,0)$ olmak üzere orjindir.

4.6 Çok Parametreli Lie Dönüşüm Grupları

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X(x;a)} \tag{4.76}$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_r)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_r)$ ve

$$\mathbf{h(a,b)} = (\phi_1(\mathbf{a},\mathbf{b}), \phi_2(\mathbf{a},\mathbf{b}), ..., \phi_r(\mathbf{a},\mathbf{b}))$$

şeklinde tanım bölgesinde analitik varsayılan ve grup aksiyomlarını sağlayan **h(a,b)** birleşim kuralıyla birlikte tanımlanan (4.76), r parametreli Lie dönüşüm grubu oluşturur. Bu grubun birim elemanı, $\mathbf{a} = 0$ yani: $a_1 = a_2 = ...a_n = 0$ olacak şekilde yazılır [20].

Sonsuz küçük matrisi **M(x)**, $r \times n$ boyutlu ve girdileri

$$k_{ij}(\mathbf{x}) = \left.\frac{\partial x_j^*}{\partial a_i}\right|_{\mathbf{a}=0} = \left.\frac{\partial X_j(\mathbf{x};\mathbf{a})}{\partial a_i}\right|_{\mathbf{a}=0} \qquad i = 1, 2, ..., r \qquad j = 1, 2, ..., n \tag{4.77}$$

şeklinde bir matris ve **N(a)**, $r \times r$ boyutlu ve girdileri

$$N_{ij}(\mathbf{a}) = \left.\frac{\partial \phi_j(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial b_i}\right|_{\mathbf{b}=0}$$

olarak verilen bir kare matris olsun.

$$\mathbf{T}(\mathbf{a}) = \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{a})$$

şeklinde tanımlanan **T(a)**, **N(a)** matrisinin tersi olmak üzere Lie'nin birinci temel teoremine göre

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial a_1} \\ \frac{\partial x_1^*}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2^*}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial a_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_1^*}{\partial a_n} & \frac{\partial x_2^*}{\partial a_n} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial a_n} \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{a})\mathbf{M}(\mathbf{x}^*)$$

şeklinde oluşan denklem sisteminin ve

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} \qquad \mathbf{a} = 0 \qquad (a_1 = a_2 = ... = a_n = 0)$$

başlangıç koşullarının oluşturduğu problemin çözümü, (4.76) dönüşümlerini verir [20].

Tanım 4.6.1 *r parametreli (4.76) dönüşüm grubunun a_i lere karşılık gelen sonsuz küçük üreteci $i = 1, 2, ..., r$ olmak üzere*

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_j}$$

şeklinde verilir [20].

4.7 Lie Cebirleri

Tanım 4.7.1 *r parametreli (4.76) grubunun sonsuz küçük üreteçleri $k = 1, 2, ..., r$ olmak üzere X_k şeklinde olsun. X_a ve X_b iki grup operatörünün (üretecinin) komütatörü,*

$$[X_a, X_b] = X_a X_b - X_b X_a$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} [(k_{ai}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_i})(k_{bj}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_j}) - (k_{bi}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_i})(k_{aj}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_j})] = \sum_{j=1}^{n} t_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_j}$$

şeklinde oluşan operatördür. Burada

$$t_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}[k_{ai}(\mathbf{x})\frac{\partial k_{bj}(\mathbf{x})}{\partial x_i} - k_{bi}(\mathbf{x})\frac{\partial k_{aj}(\mathbf{x})}{\partial x_i}]$$

formunda gösterilir [20].

Tanım 4.7.2 *Bir $\mathcal{L}$ Lie cebri, aşağıdaki özellikleri sağlayan bilinear komütatör ile $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Özel olarak r parametreli (4.76) Lie dönüşüm grubunun sonsuz küçük üreteçlerinden oluşan $\{X_k\}, k = 1, 2, \ldots, r$ kümesi, $\mathbb{R}$ üzerinde r boyutlu bir Lie cebiri oluşturur [20].*

- $[X_a, X_b] = -[X_b, X_a]$ (antisimetrik)
- $[X_a, [X_b, X_c]] + [X_b, [X_c, X_a]] + [X_c, [X_a, X_b]] = 0$ (Jakobi özdeşliği)
- Herhangi iki sonsuz küçük üretecin komütatörü, yine bir sonsuz küçük üreteçtir.

$$[X_a, X_b] = \sum_{i=1}^{r} C_{ab}^{i} X_i \quad , \quad (a, b, i = 1, 2, ..., r)$$

C_{ab}^{i} ifadeleri yapı sabitleri olarak bilinir. (Lie' nin ikinci temel teoremi)
Aynı zamanda sonsuz küçük üreteçlerinin

$$[\alpha X_a + \beta X_b, X_C] = \alpha[X_a, X_C] + \beta[X_b, X_c]$$

şeklindeki özelliği sağladığı, tanımdan kolayca görülebilir.

Tanım 4.7.3 *Her $X_a, X_b \in \mathcal{L}$ için $[X_a, X_b] = 0$ gerçeklendiğinde $\mathcal{L}$ Lie cebri abelyen olur [20].*

Tanım 4.7.4 *$\mathcal{J} \subset \mathcal{L}$ olmak üzere, her $X_a, X_b \in \mathcal{J}$ için eğer $[X_a, X_b] \in \mathcal{J}$ ise $\mathcal{J}'$ ye $\mathcal{L}$' nin bir alt cebri denir [20].*

Tanım 4.7.5 *$\mathcal{J} \subset \mathcal{L}$ olmak üzere, her $X \in \mathcal{J}, Y \in \mathcal{L}$ için $[X, Y] \in \mathcal{J}$ ise $\mathcal{J}$ alt cebrine $\mathcal{L}$' nin bir ideali veya normal alt cebri denir [20].*

Tanım 4.7.6 *Eğer $\mathcal{L}^q$ Lie cebrinin,*

$$\mathcal{L}^{(1)} \subset \mathcal{L}^{(2)} \subset ... \subset \mathcal{L}^{(q-1)} \subset \mathcal{L}^{(q)} = \mathcal{L}^q$$

şeklinde alt cebirlerinden oluşan bir zincir varsa $\mathcal{L}^q$' ya q boyutlu çözülebilir Lie cebri denir. $\mathcal{L}^{(i-1)}$, i boyutlu $\mathcal{L}^{(i)}$ Lie cebrinin bir idealidir ($i = 1, 2, ..., q$)[20].

$n.$ mertebeden bir diferansiyel denklemin kendisini kabul eden bir parametreli simetri grubu için mertebesi bir azaltılabilir. İki parametreli gruplar için mertebe iki azaltılabilir; fakat daha fazla parametre için mertebenin birden fazla düşürülebileceği garantisi yoktur. Bununla birlikte, diferansiyel denklemin kabul ettiği r parametre grubunun sonsuz küçük üreteçlerinin r boyutlu Lie cebiri q boyutlu çözülebilir bir alt cebire sahipse, o zaman adi diferansiyel denklemin mertebesi yapısal olarak q kadar azaltılabilir [20].

5 LİE SİMETRİ GRUBU VE ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

5.1 Diferansiyel Denklemlerin Lie Grubu Altında İnvaryant Kalması

Bir adi diferansiyel denklemdeki Lie simetrilerini görebilmek için aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 5.1.1

$$y^{'} = y_1 = \frac{dy}{dx} = F(x) \tag{5.1}$$

birinci mertebeden adi diferansiyel denklemi ele alalım.

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{d(y+a)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

ve

$$F(x) = F(x^*)$$

eşitliklerinden invaryantlık şartı sağlandığından

$$x^* = x, \qquad y^* = y + a, \qquad a \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

şeklindeki (5.2) dönüşümü, (5.1) denkleminin bir simetri dönüşümüdür. Bu dönüşüm, (5.1) denkleminin çözüm eğrisi üzerindeki herhangi bir noktayı yine bu denklemin başka bir çözüm eğrisi üzerinde olan bir noktaya dönüştürür. Denklemin çözümü, basit bir integrasyonla

$$y = \int F(x)dx + C_1$$

şeklinde olup her C_1 reel değerine karşılık bir çözüm eğrisi elde edilir. (5.1) denkleminin $y = \omega(x)$ şeklindeki çözüm eğrisi, (5.2) grubu altında $y^* = \omega(x^*)$ eğrisine dönüşür. Bu eğri,

$$y + a = \omega(x) \iff y = \omega(x) - a$$

şeklindeki bir çözüm eğrisidir. Dolayısıyla (5.1) denkleminin (5.2) dönüşümü altında invaryantlığından $\omega(x)$ özel bir çözümdür. Genel çözüm, C sabit olmak üzere $y = \omega(x) + C$ şeklindedir [20].

Örnek 5.1.2 *(Scaling Grubu)*

$$\frac{dy}{dx} = F(\frac{y}{x}) \tag{5.3}$$

homojen denklemi

$$x^* = ax, \qquad y^* = ay, \qquad a \in \mathbb{R} \tag{5.4}$$

dönüşüm grubu altında invaryant olduğunu gösterelim.

$$(y^*)^{'} = \frac{dy^*}{dx^*} = \frac{ady}{adx} = \frac{dy}{dx} = y^{'}$$

$$F(\frac{y^*}{x^*}) = F(\frac{ay}{ax}) = F(\frac{y}{x})$$

doayısıyla buradan (5.3) denklemine göre

$$(y^*)^{'} = F(\frac{y^*}{x^*})$$

şeklinde bulnur. Denklemin çözüm eğrisi $y = \omega(x)$ ise bu dönüşüm grubu $y^* = \omega(x^*)$ eğrisine tasvir olur. Dolayısıyla tasvir sonucu oluşan eğri $ay = \omega(ax)$ ve buna karşılık

$$y = \frac{1}{a}\omega(ax) \tag{5.5}$$

şeklinde (5.3) denkleminin çözüm eğrisi elde edilir. (5.5) de verilen (5.4) dönüşüm grubu altında invaryant değildir; fakat k sabit olmak üzere $\omega(x) = kx = y$ ise $y^* = \omega(x^*) \iff y^* - \omega(x^*) = 0 \iff y^* - kx^* = 0$ ve (5.4) dönüşümlerinden $ay = kax = 0 \iff a(y - kx) = 0$ ve buradan $y - kx = 0$ olur. Bu invaryantlığı gösterir. Yani,

$$y = \omega(x) = kx$$

olduğunda invaryant olur. Diğer durumlarda invaryant olamaz. Genel çözüm,

$$y = \frac{1}{C}\omega(Cx) \tag{5.6}$$

şeklinde olur [20].

5.2 Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Belirleyici Denklemleri

$$x^* = X(x, y; a), \qquad y^* = Y(x, y; a) \tag{5.7}$$

Lie dönüşüm grubu verilsin.

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{5.8}$$

denklemi $y^{'} = y_1$ olmak üzere

$$H(x, y, y_1) = y_1 - f(x, y) = 0$$

formuyla beraber (x, y, y_1) uzayında bir yüzey tanımlar. Burada $y = \beta(x)$ şeklinde x'e bağlı bir fonksiyondur. (5.7) grubunun sonsuz küçük üreteci

$$\xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

olmak üzere birinci genişleme sonsuz küçük üreteci (4.72) den

$$X^{[1]} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1(x, y, y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} \tag{5.9}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\zeta_1 = D(\eta) - y_1 D(\xi) = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_1 - (y_1)^2\xi_y$ dir.

$H = 0$ diferansiyel denklemi, eğer $X^{[1]}(H) = X^{[1]}(y_1 - f(x, y)) = 0$ ise (5.7) grubunun birinci genişleme grubu altında invaryanttır. Buna göre (4.72) üreteci kullanılarak

$$(\xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1(x, y, y_1)\frac{\partial}{\partial y_1})(y_1 - f(x, y)) = 0$$

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = \zeta_1\bigg|_{y_1 = f(x,y))}$$

şeklinde elde edilen eşitlikte ζ_1 yerine yazıldığında

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_1 - (y_1)^2\xi_y$$

formunda oluşan denklemde $y_1 = f(x, y)$ yazılırsa

$$\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - f^2\xi_y \tag{5.10}$$

şeklinde bulunan bu denklem 1. mertebeden kuazilineer kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü (5.7) dönüşüm grubu altında değişmez olan birinci mertebeden tüm diferansiyel denklemleri verir. (Birinci mertebeden adi diferansiyel denklem için sonsuz küçük kriteri) [20].

Aşağıdaki örneklerde üreteci oluşturan sonsuz küçükler [6] kaynağındaki 6.1 tablosundan alınmıştır.

Örnek 5.2.1

$$X = x\frac{\partial}{\partial y}$$

sonsuz küçük üretecini kabul eden diferansiyel denklemini bulalım.

Verilen üretece göre

$$\xi(x, y) = 0, \qquad \eta(x, y) = x, \qquad \xi_x = 0, \qquad \xi_y = 0, \qquad \eta_x = 1, \qquad \eta_y = 0$$

ifadeleri (5.10) denkleminde yazılarak

$$xf_y = 1 \iff f_y = \frac{1}{x}$$

elde edilir ve buradan y' ye göre integral alınarak

$$f(x, y) = \frac{y}{x} + \phi(x)$$

$$xf(x, y) = y + F(x)$$

ve $y^{'} = f(x, y)$ yazılarak

$$xy^{'} = y + F(x)$$

olarak birinci mertebeden adi diferansiyel denklemi bulunur.

Örnek 5.2.2 *Jeneratörü*

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

olan diferansiyel denklemi bulalım. Benzer şekilde sonsuz küçükler ve ilgili kısmi türevler hesaplanır.

$$\xi = 1, \qquad \eta = y, \qquad \xi_x = 0, \qquad \xi_y = 0, \qquad \eta_y = 1, \qquad \eta_x = 0$$

Elde edilen bu ifadeler (5.10) da yazılarak,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

kısmi türevli diferansiyel denklem elde edilir. Bu denkleme ait karakteristik denklemleri (Lagrange sistemi) yazalım.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y} = \frac{df}{f}$$

Buradan ilk iki oranın eşitliğinden

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y}$$

eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$x = \ln(yc) \iff c_1 = ye^{-x}$$

şeklinde c_1 sabiti bulunur. İkinci ve üçüncü oranların eşitliğinden

$$\frac{dy}{y} = \frac{df}{f}$$

integrale geçiş yapılarak

$$\ln y = \ln(fc) \iff c_2 = \frac{f}{y}$$

şeklinde c_2 elde edilir. O halde

$$f = y^{'} = yF(ye^{-x})$$

formundaki bütün diferansiyel denklemler, üreteci verilen grup altında değişmezdirler.

Örnek 5.2.3

$$X = xy\frac{\partial}{\partial x}$$

üretecine sahip grup altında değişmez olan diferansiyel denklemlerin formunu bulalım.

$$\xi = xy, \qquad \eta = 0, \qquad \xi_x = y, \qquad \xi_y = x, \qquad \eta_x = 0, \qquad \eta_y = 0$$

şeklinde bulunur. (5.10) sonsuz kriterinde yazılarak

$$xy\frac{\partial f}{\partial x} = -yf - f^2 x$$

denklemi elde edilir. Bunun ilgili karakteristik denklemleri

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{0} = \frac{-df}{yf + f^2x}$$

şeklindedir. Buradaki birinci ve ikinci orandan

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{0} \implies y = c_1$$

bulunur. Birinci ve üçüncü oranın eşitliği

$$\frac{dx}{xy} = \frac{-df}{yf + f^2x}$$

şeklinde olur. y için bulduğumuz c_1 sabitini yazarak

$$\frac{dx}{xc_1} = \frac{-df}{c_1f + f^2x} \iff f^{'} = -\frac{f}{x} - \frac{f^2}{c_1} \iff f^{'} + \frac{f}{x} = -\frac{f^2}{c_1}$$

formunda oluşan bernoulli denklemini çözelim.

$$f^{'} + \frac{f}{x} = -\frac{f^2}{c_1}$$

denkleminin iki tarafı f^2 ile bölünerek oluşan denklemde

$$\frac{1}{f} = u \implies \frac{-f^{'}}{f^2} = u^{'}$$

dönüşümlerini yazarak

$$u^{'} - \frac{u}{x} = \frac{1}{c_1} \tag{5.11}$$

homojen olmayan lineer denklemi elde edilir. Denklemin homojen kısmının çözümü bulunarak genel çözüm için aşağıdaki gibi lagrange çarpanları yöntemi kullanılır.

$$u^{'} - \frac{u}{x} = 0 \implies \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \implies u = Cx$$

$C = C(x)$ şeklinde düşünerek

$$u = C(x)x \implies u^{'} = C^{'}x + C \tag{5.12}$$

(5.12) deki $u^{'}$, (5.11) lineer denkleminde yazılır ve gerekli sadeleşmeler yapılarak

$$C^{'} = \frac{1}{xc_1}$$

ifadesi elde edilir. İntegral alınarak

$$C(x) = \frac{\ln x}{c_1} + c^*$$

$$u = C(x)x \implies u = \frac{1}{f} = (\frac{\ln x}{c_1} + c^*)x$$

ve

$$c^* = \frac{1}{fx} - \frac{\ln x}{c_1}$$

şeklinde bulunur. $c_1 = y$ olduğundan

$$c^* = G(c_1) \iff \frac{1}{fx} - \frac{\ln x}{y} = G(y) \iff \frac{1}{fx} = G(y) + \frac{\ln x}{y}$$

$$\iff xf = \frac{y}{yG(y) + \ln x} \iff xy^{'} = \frac{y}{F(y) + \ln x}$$

şeklinde diferansiyel denklemi bulunur.

5.3 İki ve Daha Fazla Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Belirleyici Denklemleri

Skaler $n.$ mertebeden bir adi diferansiyel denklemi değişmez (invaryant) bırakan grubu nasıl elde ederiz?

Örneğin, $n.$ mertebeden adi diferansiyel denklem

$$H(y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}) = 0 \qquad\qquad n \in \mathbb{N}^{+} \qquad (5.13)$$

olsun. (5.13) denklemi için simetri koşulu veya sonsuz küçük invaryantlık şartı

$$X^{[n]}H\Big|_{H=0} = 0 \qquad (5.14)$$

olur. Burada

$$X^{[n]} = X + \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} \qquad (5.15)$$

şeklindedir. Burada $n.$ genişleme üreteci $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ ise Teorem 4.4.3 teki formülle hesaplanır. (5.14) denklemine (5.13) denkleminin kabul ettiği grubun belirleyici denklemi denir.

Örnek 5.3.1
$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

üretecine ait grup altında invaryant olan ikinci mertebeden denklemlerin genel formunu bulalım.

Çözüm: Grup üretecine göre sonsuz küçükler $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ şeklindedir. İstenilen denkleme ikinci mertebeden olduğundan değişmezlik şartı $H(x, y, y^{'}, y^{''}) = y^{''} - f(x, y, y^{'}) = 0$ olmak üzere,

$$X^{[2]}H = X^{[2]}[y^{''} - f(x, y, y^{'})] = 0$$

şeklinde uygulanarak

$$\xi\frac{H}{\partial x} + \eta\frac{H}{\partial y} + (\eta_x + \eta_y y^{'} - \xi_x y^{'} - \xi_y y^{'2})\frac{\partial H}{\partial y^{'}}$$

$$+[\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y^{'} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y^{'2} - \xi_y y^{'3} + (\eta_y - 2\xi_x)y^{''} - 3\xi_y y^{'} y^{''}]\frac{\partial H}{\partial y^{''}} = 0$$

şeklinde oluşan denklemde sonsuz küçüklerin gerekli kısmi türevleri yazılarak

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

şeklinde oluşan diferansiyel denklem çözülerek

$$f(x, y, y^{'}) = \phi(y, y^{'})$$

$$y^{''} = \phi(y, y^{'})$$

formunda adi iferansiyel denklemler elde edilir.

Örnek 5.3.2
$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$$

üretecine sahip simetri grubunun değişmez bıraktığı ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin formunu bulalım.

Çözüm: Grubun sonsuz küçükleri $\xi = x^2$ ve $\eta = xy$ şeklindedir. istenilen denklem ikinci mertebeden olduğundan denkleme değişmezlik şartı $H(x, y, y^{'}, y^{''}) = y^{''} - f(x, y, y^{'}) = 0$ olmak üzere,

$$X^{[2]}H = X^{[2]}[y^{''} - f(x, y, y^{'})] = 0$$

şeklindeki değişmezlik şartında

$$\eta_x = y, \eta_y = x, \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 1, \eta_{yy} = 0, \xi_x = 2x, \xi_y = 0, \xi_{xx} = 2, \xi_{xy} = 0$$

kısmi türevler yazıldığında

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} + (y - xy^{'})\frac{\partial f}{\partial y^{'}} + 3xf = 0$$

şeklinde oluşan kısmi diferansiyel denklemin karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dy^{'}}{y - xy^{'}} = -\frac{df}{3xf}$$

eşitlikleriyle yazılır. İlk iki oranın eşitliğinden

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} \implies \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

integral alınarak c_1 sabit olmak üzere $c_1 = \frac{y}{x}$ bulunur. İlk ve son oranın eşitliğinden

$$\frac{dx}{x} = -\frac{df}{3xf} \implies \frac{dx}{x} = -\frac{df}{3f}$$

denklemi yazılarak integrale geçiş yapıldığında c_2 integral sabiti olmak üzere, $fx^3 = c_2$ elde edilir. Son olarak ikinci ve üçüncü oranların eşitliğinden

$$\frac{dy}{xy} = \frac{dy^{'}}{y - xy^{'}}$$

şeklinde oluşan denklemin her iki tarafının paydası x ile bölünerek

$$\frac{dy}{y} = \frac{dy^{'}}{\frac{y}{x} - y^{'}}$$

formunda oluşan denklem $\frac{y}{x} = c_1$ yazılıp

$$\frac{dy}{y} = \frac{dy^{'}}{c_1 - y^{'}}$$

elde edilen delemde integral alınarak c_3 sabit olmak üzere $y - xy^{'} = c_3$ elde edilir. Elde edilen c_1, c_2, c_3 sabitlerinden

$$fx^3 = \phi(\frac{y}{x}, y - xy^{'})$$

$$x^3y^{''} = \phi(\frac{y}{x}, y - xy^{'})$$

şeklinde oluşan bütün denklemler verilen grup altında değişmezdir. Sonsuz küçükler için ikinci mertebeden denklemlerin genel formu [6] kitabında 8.1 tablosundan incelenebilir.

5.4 Birinci Mertebeden Bazı Adi Diferansiyel Denklemlerin Lie Simetri Yöntemiyle Çözümleri

Şimdi, verilen grup altında birinci mertebeden adi diferansiyel denklemin kendilerini değişmez yapan sonsuz küçük üretecini bulalım ve bulduğumuz üreteçten yararlanarak denklemi bölüm 4.3.4 te örneklerde yapıldığı gibi kanonik koordinatlarda yazarak değişkenlerine ayrılabilen duruma getirelim. Aynı zamanda diferansiyel değişmezler aracılığıyla denklemlerin mertebeleri indirgenebilir [20], [27].

Örnek 5.4.1 *scaling grubu altında*

$$y^{'} = F(\frac{y}{x})$$

denklemini kanonik koordinatlarda yazarak çözelim.

(5.4) dönüşüm grubunun üreteci

$$\xi(x,y) = \left.\frac{dx^*}{da}\right|_{a=0} = x \qquad\qquad \eta(x,y) = \left.\frac{dy^*}{da}\right|_{a=0} = y$$

olduğundan bu dönüşüm grubunun üreteci

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde olup,(r, s) kanonik koordinatlarını $Xr = 0$ ve $Xs = 1$ kısmi türevli diferansiyel denklemlerini çözerek bulalım.

$$Xr = x\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial r}{\partial y} = 0 \tag{5.16}$$

$$Xs = x\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \tag{5.17}$$

(5.16) denkleminin karakteristik denklemlerinden

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dr}{0} \implies \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \implies \ln x + \ln c = \ln y \implies = c = \frac{y}{x}$$

Burada $dr = 0 \implies r = c$ sabit olur. Dolayısıyla $r = \frac{y}{x}$ elde edilir. (5.17) denkleminden ise

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dr}{0} \implies \frac{dx}{x} = ds \implies s = \ln x$$

elde edilir.

O halde kanonik koordinatlar,

$$r = \frac{y}{x} \qquad\qquad s = \ln x \tag{5.18}$$

şeklinde elde edlir. Şimdi (5.3) denklemini (5.18) kanonik koordinatlarda yazalım. (5.18) kanonik koordinat denklemlerinden

$$y = re^s \qquad\qquad x = e^s$$

şeklinde (x, y) kartezyen koordinatları kanonik koordinatlarda yazılır. Şimdi (5.3) denkleminin sol tarafını kanonik koordinatlarda yazalım.

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{d(re^s)}{d(e^s)} = \frac{e^s dr + re^s ds}{e^s ds} = \frac{dr + rds}{ds} = \frac{dr}{ds} + r = \frac{1}{\frac{ds}{dr}} + r = \frac{1}{s^{'}} + r$$

(5.3) denkleminin sağ tarafını benzer şekilde kanonik koordinatlarda yazılırsa

$$F(\frac{y}{x}) = F(\frac{re^s}{e^s}) = F(r)$$

şeklinde bulunur. Yani son durumda (5.3) homojen diferansiyel denklemi kanonik koordinatlarda yazıldığında

$$\frac{1}{s^{'}} + r = F(r)$$

formunda değişkenlerine ayrılabilen bir denklem elde edilir.

$$\frac{1}{s^{'}} + r = F(r) \implies \frac{1}{s^{'}} = F(r) - r \implies s^{'} = \frac{1}{F(r) - r} \implies \frac{ds}{dr} = \frac{1}{F(r) - r}$$

ve buradan

$$s = \int \frac{dr}{F(r) - r}$$

belirsiz integrali hesaplanarak (x,y) koordinatlarına geçiş yapılarak (5.3) denkleminin çözümü elde edilir [20].

Örnek 5.4.2

Homojen olmayan lineer

$$y^{'} + P(x)y = Q(x) \tag{5.19}$$

(5.19) denklemini kanonik koordinatlar yardımıyla çözümünü elde ediniz [20].

Çözüm:

$$F(x,y,y^{'}) = y^{'} + P(x)y - Q(x) = 0 \tag{5.20}$$

olmak üzere invaryantlık şartından

$$\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} + (\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y^{'} - y^{'2}\xi_y^2)\frac{\partial F}{\partial y^{'}} = 0 \tag{5.21}$$

şeklinde (5.21) denkemi yazılıp gerekli kısmi türevler

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P^{'}(x)y - Q^{'}(x) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = P(x) \qquad \frac{\partial F}{\partial y^{'}} = 1 \tag{5.22}$$

olacak şekilde bulunur. Elde edilen ifadeler (5.21) denkleminde aşağıdaki gibi yazılarak

$$\xi[P^{'}(x)y - Q^{'}(x)] + \eta P(x) + \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y^{'} - y^{'2}\xi_y = 0 \tag{5.23}$$

şeklinde elde edilen (5.23) denkleminden $y^{'}$ nün kuvvetlerinin katlarından

$$(y')^0 : \xi[P^{'}(x)y - Q^{'}(x)] + \eta P(x) + \eta_x = 0, \tag{5.24}$$

$$(y')^1 : \eta_y - \xi_x = 0, \tag{5.25}$$

$$(y^{'})^2 : \xi_y = 0 \tag{5.26}$$

olacak şekilde denklem sistemi elde edilir. (5.26) denkleminden

$$\xi_y = 0 \implies \xi = a(x)$$

şeklinde elde edilir. (5.25) denkleminden

$$\eta_y = \xi_x \implies \eta_y = a^{'}(x) \implies \eta = a^{'}(x)y + b(x)$$

elde edilir. (5.24) denkleminden y'nin kuvvetlerinin katsayılarına göre

$$y : \xi P^{'}(x) = 0 \implies \xi = 0, \tag{5.27}$$

$$y^0 : -\xi Q^{'}(x) + \eta P(x) + \eta_x = 0 \tag{5.28}$$

şekinde (5.27) ve (5.28) denklemleri oluşur. (5.27) denkleminden $\xi = 0 \implies a(x) = 0$

şeklinde olur. Dolayısıyla $\eta = b(x)$ olur. (5.28) denkleminden $\eta = b(x)$, $\xi = 0$ ve $\eta_x = b^{'}(x)$ kullanılarak

$$b(x).P(x) + b^{'}(x) = 0 \implies \frac{b^{'}(x)}{b(x)} = -P(x) \implies b(x) = e^{-\int P(x)dx}C$$

$C = 1$ alınarak

$$b(x) = e^{-\int P(x)dx} \implies \eta = e^{-\int P(x)dx}$$

olur. Son durumda

$$X = e^{-\int P(x)dx}\frac{\partial}{\partial y}$$

olacak şekilde (5.19) lineer denklemini kabul eden sonsuz küçük üreteci bulunur.

$$Xr = e^{-\int P(x)dx}\frac{\partial r}{\partial y} = 0 \tag{5.29}$$

$$Xs = e^{-\int P(x)dx}\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \tag{5.30}$$

(5.29) kısmi türevli diferansiyel denkleminin

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{e^{-\int P(x)dx}} = \frac{dr}{0}$$

şeklinde karakteristik denklemleri yazılarak ilk iki oranın eşitliğinden $x = c$ ve $dr = 0$ olduğundan (r =sabit) $r(x, y) = r = x$ şeklinde bulunur.

(5.30) kısmi türevli diferansiyel denkleminin

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{e^{-\int P(x)dx}} = \frac{ds}{1}$$

şeklindeki karakateristik denklemlerinden ikinci ve üçüncü oaranın eşitliği kullanılarak

$$s(x, y) = ye^{\int P(x)dx} \implies s(x, y) = s = ye^{\int P(x)dx} \implies y = se^{-\int P(r)dr}$$

olur. Buna göre (5.19) denkleminin

$$\begin{aligned} x &= r \\ y &= se^{-\int P(r)dr} \\ y^{'} = \frac{dy}{dx} &= e^{-\int P(r)dr}s^{'} - sP(r)e^{-\int P(r)dr} \end{aligned}$$

ifadeleri (5.19) denkleminde yazılarak

$$e^{-\int P(r)dr}s' - sP(r)e^{-\int P(r)dr} + sP(r)e^{-\int P(r)dr} = Q(r)$$

$$\Longrightarrow\ s^{'} = Q(r)e^{\int P(r)dr}$$

$$\Longrightarrow\ s = \int Q(r)e^{\int P(r)dr}dr$$

şeklinde kanonik koordinatlarda çözümü elde edilir. (s, r) koordinatları x ve y türünden yazılarak kartezyen koordinatlarda çözüm elde edilir.

Örnek 5.4.3

$$(y - \frac{3}{2}x - 3)y^{'} + y = 0$$

denklemini kanonik koordinatlarda yazarak çözümünü bulunuz. ([20] kaynağı alıştırma)

Çözüm: Denklemi, kendisine denk olan bir diferansiyel denkleme dönüştürerek oluşan denkleme invaryantlık kriterini uygulayalım.

$$y - \frac{3}{2}x - 3 = u$$

ve

$$u^{'} = y^{'} - \frac{3}{2} \Longrightarrow y^{'} = u^{'} + \frac{3}{2}$$

dönüşümlerini denklemde yazarak

$$u(u^{'} + \frac{3}{2}) + u + \frac{3}{2}x + 3 = 0$$

şeklinde oluşan denklemden

$$u^{'} + (\frac{3x+6}{2})\frac{1}{u} + \frac{5}{2} = 0$$

formu elde edilir.

$$F(x, u, u^{'}) = u^{'} + (\frac{3x+6}{2})\frac{1}{u} + \frac{5}{2} = 0$$

şeklinde yazarak $F(x, u, u^{'})$ fonksiyonu için invaryantlık kriteri

$$X^{[1]} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + (\eta_x + \eta_u u^{'} - \xi_x u^{'} - \xi_u (u^{'})^2)\frac{\partial}{\partial u'}$$

operatörü kullanılarak

$$X^{[1]}F = 0$$

eşitliğinden

$$\frac{3}{2u}\xi-(\frac{3x}{2u^2}+\frac{3}{u^2})\eta+\eta_x+\eta_u u^{'}-\xi_x u^{'}-\xi_u(u^{'})^2=0$$

şeklinde elde edilen denklemden aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$(u^{'})^2:\xi_u=0, \tag{5.31}$$

$$(u^{'}):\eta_u-\xi_x=0, \tag{5.32}$$

$$(u^{'})^0:\frac{3}{2u}\xi-(\frac{3x}{2}+3)\frac{1}{u^2}\eta+\eta_x=0 \tag{5.33}$$

(5.31) denkleminden

$$\xi(x,u)=a(x)=a$$

elde edilir. (5.32) denkleminden

$$\eta_u=a^{'} \implies \eta(x,u)=a^{'}u+b, b=b(x)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen ξ , η ve $\eta_x = a^{''}u+b^{'}$ ifadeleri (5.33) denkleminde aşağıdaki gibi yazılarak

$$\frac{3}{2u}a-\frac{3x+6}{2}(\frac{a^{'}}{u}+\frac{b}{u^2})+a^{''}u+b^{'}=0 \tag{5.34}$$

şeklinde elde edilen denklemde $\frac{1}{u}$ 'nun katlarından

$$\frac{3}{2}a-\frac{3x+6}{2}a^{'}=0$$

biçiminde oluşan denklemin aşağıda yapılan çözümünden

$$a-(x+2)a^{'}=0 \implies \frac{a'}{a}=\frac{1}{x+2}$$

olur. İntegral alınarak

$$a(x)=\xi=x+2$$

$a(x)$ yani ξ bulunur.

(5.34) denkleminde $\frac{1}{u^2}$ 'nin katından

$$b(x)=0$$

yazarak

$$\eta=u$$

elde edilir. Dolayısıyla simetri grubunun üreteci

$$X = (x+2)\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$$

şeklinde olur. Şimdi (5.34) denklemini kanonik koordinatlarda yazalım.

$$Xr = (x+2)\frac{\partial r}{\partial x} + u\frac{\partial r}{\partial u} = 0$$

denkleminin karakteristik denklemleri

$$\frac{dx}{x+2} = \frac{du}{u} = \frac{dr}{0}$$

şeklinde yazılarak ilk iki oranın eşitliğinden

$$\frac{dx}{x+2} = \frac{du}{u}$$

şeklinde elde edilen denklem integre edilerek

$$r(x,u) = \frac{u}{x+2}$$

ve

$$Xs = (x+2)\frac{\partial s}{\partial x} + u\frac{\partial s}{\partial u} = 1$$

denkleminden karakteristik denklemleri yazılarak

$$\frac{dx}{x+2} = \frac{du}{u} = \frac{ds}{1}$$

buradan birinci ve üçüncü oranın eşitliğinden oluşan

$$\frac{dx}{x+2} = \frac{ds}{1}$$

şeklindeki denklem integre edilerek

$$s(x,u) = \ln(x+2)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$x = e^s - 2$$

$$u = e^s r$$

kanonik koordinatlarını ve

$$u^{'} = \frac{du}{dx} = \frac{e^s r ds + e^s dr}{e^s ds} = r + \frac{1}{s^{'}}$$

şeklindeki kanonik koordinatlardaki türevi

$$u^{'} + (\frac{3x+6}{2})\frac{1}{u} + \frac{5}{2} = 0$$

denkleminde yazılarak

$$r + \frac{1}{s^{'}} + (\frac{3(e^s - 2) + 6}{2})\frac{1}{e^s r} + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Longrightarrow \ r + \frac{1}{s^{'}} + \frac{3}{2r} + \frac{5}{2} = 0$$

elde edilir. Son eşitlikten $s^{'}$ ifadesi gerekli hesaplar sonucu

$$s^{'} = -\frac{2r}{2r^2 + 5r + 3}$$

şekinde elde edilir. Denklemin sağ tarafı basit kesirlere ayırarak denklem integre edilirse C integral sabiti olmak üzere

$$s^{'} = \frac{2}{r+1} - \frac{6}{2r+3}$$

$$s = 2\ln(r+1) - 3\ln(2r+3) + \ln C$$

$$s = \ln[\frac{(r+1)^2}{(2r+3)^3}C]$$

şeklinde denklemin kanonik koordinatlarda çözümü elde edilir. (u, x) koordinatlarına geçiş yapılarak ($e^s = x + 2$ ve $r = \frac{u}{x+2}$)

$$e^s = [\frac{(r+1)^2}{(2r+3)^3}]C$$

$$x + 2 = \frac{(\frac{u}{x+2} + 1)^2}{(\frac{2u}{x+2} + 3)^3}C$$

şeklinde elde edilen çözümde başlangıçta yapılan $u = y - \frac{3}{2}x - 3$ ifadesi

$$1 = \frac{(u + x + 2)^2}{(2u + 3x + 6)^3}C$$

$$\Longrightarrow \ 1 = \frac{(y - 3\frac{x}{2} - 3 + x + 2)^2}{(2y - 3x - 6 + 3x + 6)^3}C$$

şeklinde yazılarak

$$8y^3 = (y - \frac{x}{2} - 1)^2 C$$

olarak verilen denklemin kapalı çözümü elde edilir.

5.5 İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Denklemlerin Lie Simetri Yöntemiyle İndirgenmesi ve Genel Çözümü

Bu bölümde ikinci mertebeden iki nonlinear denklemin Lie simetrilerini elde edip kanonik koordinatlar yardımıyla indirgeyerek çözümünü verelim.

Örnek 5.5.1

$$x^5y^{''} = xy^2y^{'} - y^3$$

nonlinear diferansiyel denklemini Lie simetri grubu yöntemiyle çözelim. Bu denklem için, Örnek 5.3.2 de genel formu elde edilen denklemler ailesi düşünülebilir.

Çözüm: Denklem

$$y^{''} = \frac{y^2y^{'}}{x^4} - \frac{y^3}{x^5}$$

şeklinde yazılarak

$$H = y^{''} - \frac{y^2y^{'}}{x^4} + \frac{y^3}{x^5}$$

şeklinde oluşturulan $H(x, y, y^{'})$ ifadesi için

$$X^{[2]} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial y^{'}} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial y^{''}}$$

ikinci genişleme üreteci

$$X^{[2]}(H) = 0$$

eşitliği yazılarak

$$\xi\frac{\partial H}{\partial x} + \eta\frac{\partial H}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial H}{\partial y^{'}} + \zeta_2\frac{\partial H}{\partial y^{''}} = 0$$

şeklinde oluşan denklemde

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{4y^2y^{'}}{x^5} - \frac{5y^3}{x^6}, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{2yy^{'}}{x^4} + \frac{3y^2}{x^5}, \qquad \frac{\partial H}{\partial y^{'}} = -\frac{y^2}{x^4}, \qquad \frac{\partial H}{\partial y^{''}} = 1$$

kısmi türevleri yazılarak

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y^{'} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y^{'})^2 - \xi_{yy}(y^{'})^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3y^{'}\xi_y)y^{''}$$

$$+\xi(\frac{4y^2y^{'}}{x^5} - \frac{5y^3}{x^6}) + \eta(-\frac{2yy^{'}}{x^4} + \frac{3y^2}{x^5}) + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y^{'} - (y^{'})^2\xi_y](-\frac{y^2}{x^4}) = 0$$

şeklinde elde edilen denklemi $y^{'}$' nün kuvvetlerine göre düşünerek katsayılardan

$$(y^{'})^3 : \xi_{yy} = 0, \tag{5.35}$$

$$(y^{'})^2 : \eta_{yy} - 2\xi_{xy} - 3\frac{y^2}{x^4}\xi_y + \frac{y^2}{x^4}\xi_y = 0$$

$$\Longrightarrow \eta_{yy} - 2\xi_{xy} - 2\frac{y^2}{x^4}\xi_y = 0, \tag{5.36}$$

$$(y^{'})^1 : 2\eta_{xy} - \xi_{xx} + (\eta_y - 2\xi_x)\frac{y^2}{x^4} + 3\frac{y^3}{x^5}\xi_y + 4\frac{y^2}{x^5}\xi - 2\eta\frac{y}{x^4} - (\eta_y - \xi_x)\frac{y^2}{x^4} = 0$$

$$\Longrightarrow 2\eta_{xy} - \xi_{xx} + \eta_y\frac{y^2}{x^4} - 2\xi_x\frac{y^2}{x^4} + 3\frac{y^3}{x^5}\xi_y + 4\frac{y^2}{x^5}\xi$$

$$-2\eta\frac{y}{x^4} - \eta_y\frac{y^2}{x^4} + \xi_x\frac{y^2}{x^4} = 0$$

gerekli sadeleşmeler yapılarak

$$2\eta_{xy} - \xi_{xx} - \xi_x\frac{y^2}{x^4} + 3\frac{y^3}{x^5}\xi_y + 4\frac{y^2}{x^5}\xi - 2\eta\frac{y}{x^4} = 0, \tag{5.37}$$

şeklinde (5.37) denklemi elde edilir.

$$(y^{'})^0 : \eta_{xx} - (\eta_y - 2\xi_x)\frac{y^3}{x^5} - 5\xi\frac{y^3}{x^6} + 3\eta\frac{y^2}{x^5} - \eta_x\frac{y^2}{x^4} = 0, \tag{5.38}$$

(5.35), (5.36), (5.37), (5.38) denklemlerinden sırasıyla

$$\xi_{yy} = 0, \tag{5.39}$$

$$x^4\eta_{yy} - 2x^4\xi_{xy} - 2y^2\xi_y = 0, \tag{5.40}$$

$$2x^5\eta_{xy} - x^5\xi_{xx} - xy^2\xi_x + 3y^3\xi_y + 4y^2\xi - 2xy\eta = 0, \tag{5.41}$$

$$x^6\eta_{xx} - xy^3(\eta_y - 2\xi_x) - 5y^3\xi + 3xy^2\eta - x^2y^2\eta_x = 0 \tag{5.42}$$

denklemleri oluşur. (5.39) denkleminden

$$\xi_{yy} = 0 \Longrightarrow \xi_y = a(x)$$

$$\Longrightarrow \xi(x,y) = a(x)y + b(x) \tag{5.43}$$

şeklinde elde edilir. (5.43) denkleminden elde edilen ξ' nin gerekli türevleri alınarak (5.40) denkleminde yazılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\xi(x,y) = a(x)y + b(x), \qquad \xi_x = a^{'}y + b^{'}, \qquad \xi_y = a, \qquad \xi_{xy} = a^{'}$$

$$x^4\eta_{yy} - 2x^4\xi_{xy} - 2y^2\xi_y = 0$$

$$\Longrightarrow\ x^4\eta_{yy} - 2x^4a^{'} - 2y^2a = 0 \tag{5.44}$$

(5.44) denklemi

$$x^4\eta_{yy} - 2y^2a = 2x^4a^{'} \tag{5.45}$$

şeklinde yazılarak elde edilen (5.45) denkleminin sağ tarafı x' e bağlıdır. O halde denklemin sol tarafı sadece x' e bağlı olmalı veya denklemin her iki tarafı 0 olmalıdır. (5.45) denklemi y' ye göre iki kere türetilirse

$$x^4\eta_{yyyy} - 4a = 0 \tag{5.46}$$

elde edilir. η_{yyyy}, y' ye bağlıysa $a(x) = 0$ dır veya $\eta_{yyyy} = 0$ ise yine $a(x) = 0$ olur. O halde $\xi(x, y)$

$$\xi(x, y) = b(x) \tag{5.47}$$

şeklindedir.

O halde $a(x) = 0$ ise (5.40) denkleminden

$$\eta_{yy} = 0 \tag{5.48}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi (5.41) denkleminde (5.47) ve (5.48) daki sonuçlar kullanılarak

$$2x^5\eta_{xy} - x^5\xi_{xx} - xy^2\xi_x + 3y^3\xi_y + 4y^2\xi - 2xy\eta = 0$$

denkleminde $\xi_x = b^{'}, \xi_y = 0, \xi_{xx} = b^{''}$ kısmi türevleri yazılarak

$$2x^5\eta_{xy} - x^5b^{''} - xy^2b^{'} + 4y^2b - 2xy\eta = 0 \tag{5.49}$$

şeklinde elde edilen (5.49) denklemini y' ye göre iki kere türetelim.

$$2x^5\eta_{xyy} - 2xyb^{'} + 8yb - 2x\eta - 2xy\eta_y = 0$$

$$\Longrightarrow\ -2xyb^{'} + 8yb - 2x\eta - 2xy\eta_y = 0$$

şeklinde oluşan denklem tekrar y' ye göre türetilirse

$$-2xb^{'} + 8b - 2x\eta_y - 2x\eta_y - 2xy\eta_{yy} = 0$$

$$\Longrightarrow\ -2xb^{'} + 8b - 4x\eta_y$$

$$\Longrightarrow\ xb^{'} - 4b + 2x\eta_y = 0 \tag{5.50}$$

elde edilir. (5.50) denklemi

$$4b - xb^{'} = 2x\eta_y$$

$$\Longrightarrow \eta_y = \frac{2}{x}b - \frac{b^{'}}{2} \tag{5.51}$$

şeklinde yazılarak oluşan (5.51) denkleminin sağ tarafı sadece x' in fonksiyonudur. O halde $\eta(x, y)$ için

$$\eta(x, y) = c(x)y + d(x) \tag{5.52}$$

şeklinde yazılabilir. O halde $\xi_(x, y)$ ve $\eta(x, y)$ için

$$\xi(x, y) = b(x)$$

$$\eta(x, y) = c(x)y + d(x)$$

fonksiyonları elde edilir. Şimdi bu sonuçları (5.42) denkleminde yazalım. (5.42) denklemi

$$x^6\eta_{xx} - xy^3(\eta_y - 2\xi_x) - 5y^3\xi + 3xy^2\eta - x^2y^2\eta_x = 0$$

şeklinde tekrar yazılarak

$$\eta_x = c^{'}y + d^{'}, \qquad \eta_y = c, \qquad \eta_{xx} = c^{''}y + d^{''}, \qquad \xi_x = b^{'}$$

formundaki kısmi türevleri bu denklemde yazılarak

$$x^6(c^{''}y + d^{''}) - xy^3(c - 2b^{'}) - 5y^3b + 3xy^2(cy + d) - x^2y^2(c^{'}y + d^{'}) = 0$$

$$\Longrightarrow x^6c^{''}y + x^6d^{''} - xy^3c + 2xy^3b^{'} - 5y^3b + 3xy^3c + 3xy^2d - x^2y^3c^{'} - x^2y^2d^{'} = 0$$

şeklinde oluşan son denklem

$$(-cx + 2xb^{'} - 5b + 3xc - x^2c^{'})y^3 + (3xd - x^2d^{'})y^2 + (x^6c^{''})y + x^6d^{''} = 0 \tag{5.53}$$

biçiminde y' nin kuvvetlerine göre yazılarak oluşan (5.53) denkleminden aşağıdaki denklemler yazılablir.

$$y^3 : -cx + 2xb^{'} - 5b + 3xc - x^2c^{'} = 0 \tag{5.54}$$

$$y^2 : 3xd - x^2d^{'} = 0 \tag{5.55}$$

$$y^1 : c^{''} = 0 \tag{5.56}$$

$$y^0 : d^{''} = 0 \tag{5.57}$$

(5.56) denkleminden k_1, k_2 sabitler olmak üzere

$$c(x) = k_1 x + k_2 \tag{5.58}$$

ve (5.47) denkleminden k_3, k_4 sabitler olmak üzere

$$d(x) = k_3 x + k_4 \tag{5.59}$$

eşitlikleri elde edilir.

ξ ve η sonsuz küçükleri

$$\xi(x,y) = b(x), \qquad \eta(x,y) = (k_1 x + k_2)y + k_3 x + k_4 \tag{5.60}$$

olarak elde edilir. (5.55) denklemine (5.59) deki $d(x)$ yazılarak

$$3x(k_3 x + k_4) - x^2 k_3 = 0$$

$$\implies 3x^2(k_3 + 3xk_4) - x^2 k_3 = 0$$

$$\implies 2x^2 k_3 + 3xk_4 = 0 \tag{5.61}$$

şeklinde elde edilen (5.61) denkleminden $k_3 = 0$ ve $k_4 = 0$ olarak bunur. Bu durumda

$$d(x) = 0 \tag{5.62}$$

şeklinde elde edilir.

(5.54) denkleminden

$$-cx + 2xb^{'} - 5b + 3xc - x^2 c^{'} = 0$$

c ve $c^{'}$ eşitleri yazılarak

$$-x(k_1 x + k_2) + 2xb^{'} - 5b + 3x(k_1 x + k_2) - x^2 k_1 = 0$$

$$\implies -x^2 k_1 - xk_2 + 2xb^{'} - 5b + 3x^2 k_1 + 3xk_2 - x^2 k_1 = 0$$

$$\implies x^2 k_1 + 2xk_2 + 2xb^{'} - 5b = 0 \tag{5.63}$$

elde edilir.

(5.51) denkleminden

$$\eta_y = \frac{2}{x} b - \frac{b^{'}}{2}$$

$\eta = (k_1 x + k_2)y$ ifadesini hatırlayarak

$$k_1 x + k_2 = \frac{2}{x}b - \frac{1}{2}b^{'}$$

şeklinde oluşan denklem

$$b^{'} - \frac{4}{x}b = -2k_1 x - 2k_2$$

formunda homojen olmayan lineer denkleme denktir. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$e^{-4\int \frac{dx}{x}} = e^{-4\ln x} = \frac{1}{x^4}$$

şeklinde elde edilr. İntegrasyon çarpanı ile yukarıdaki lineer denklemin her iki tarafı çarpılarak

$$-2\frac{1}{x^4}(k_1 x + k_2) = \frac{1}{x^4}(-\frac{4}{x}b + b^{'})$$

şeklinde oluşan denklem

$$-2(k_1 x^{-3} + k_2 x^{-4}) = (\frac{b}{x^4})^{'}$$

formunda yazılıp integre edildiğinde

$$\frac{b}{x^4} = -k_1 \int x^{-3}dx - 2k_2 \int x^{-4}dx$$

ve buradan integral alma kuralından

$$\frac{b}{x^4} = -2k_1(\frac{x^{-2}}{-2}) - 2k_2(\frac{x^{-3}}{-3})$$

denklemi yazılarak gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$b(x) = k_1 x^2 + \frac{2}{3}k_2 x \tag{5.64}$$

elde edilir. Yani

$$\xi(x, y) = k_1 x^2 + \frac{2}{3}k_2 x, \qquad \eta(x, y) = (k_1 x + k_2)y \tag{5.65}$$

formlarında ξ ve η elde edilir. (5.64) da elde edilen $b(x)$ ifadesi (5.63) denklemini aşağıda görüldüğü gibi sağlar.

$$x^2 k_1 + 2xk_2 + 2xb^{'} - 5b = 0$$

denkleminde b ve b' eşitleri yazılarak

$$x^2k_1 + 2xk_2 + 2x(2k_1x + \frac{2}{3}k_2) - 5(k_1x^2 + \frac{2}{3}k_2x) = 0$$

$$\Longrightarrow x^2k_1 + 2xk_2 + 4x^2k_1 + \frac{4}{3}k_2x - 5k_1x^2 - \frac{10}{3}k_2x = 0$$

denkleminin sağlandğı görülür.

Şimdi (5.65) sonsuz küçüklerinden yararlanarak

- $k_1 = 1, k_2 = 0$ ise
$$X_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$$
- $k_1 = 0, k_2 = 1$ ise
$$X_2 = \frac{2}{3}x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde üreteçler elde edilir. Önce X_1 üretecinden yararlanarak kanonik koordinatları bulup çözümü aranan diferansiyel denklemi bu koordinatlarda yazalım.

$$X_1r = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$X_1s = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} = 1$$

$X_1r = 0$ denklemini çözelim.

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dr}{0}$$

karakteristik denklemlerinden

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy}$$

şeklindeki ilk iki oranın eşitliğinden elde edilen

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

denkleminde integral alınarak

$$\ln x + \ln C = \ln y$$

şeklinde oluşan eşitlikten $C = \frac{y}{x}$ ise $r(x, y) = \frac{y}{x}$ elde edilir.

$X_1s = 1$ denkleminden

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{ds}{1}$$

karakteristik denklemleri yazılarak birinci ve ikinci oranın eşitliğinden

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{ds}{1}$$

integralle $s(x, y) = -\frac{1}{x}$ elde edilir. Dolayısıyla kanonik koordinatlar

$$(r, s) = (\frac{y}{x}, \frac{-1}{x})$$

veya

$$(x, y) = (\frac{-1}{s}, \frac{-r}{s})$$

şeklinde elde edilir. Şimdi verilen denklemi r ve s kanonik koordinatlarda yazalım. Bunun için önce $y^{'}$ ve $y^{''}$ türevlerinin kanonik koordinatlarda karşılık gelen ifadelerini bulalım.

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-sdr+rds}{s^2}}{\frac{ds}{s^2}}$$

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{-sdr + rds}{ds} = -s\frac{dr}{ds} + r$$

şeklinde hesaplanarak

$$y^{'} = -\frac{s}{s^{'}} + r$$

olarak birinci mertebeden türevin (r, s) koordinatlarındaki ifadesi elde edilir. Burada $s^{'} = \frac{ds}{dr}$ eşitliği geçerlidir. $(s = s(r))$ Benzer şekilde $y^{''}$ için

$$y^{''} = \frac{dy^{'}}{dx} = \frac{\frac{ss^{''}dr - s^{'}ds}{(s^{'})^2} + dr}{\frac{ds}{s^2}}$$

şeklinde yazılır. Buradan $\frac{ds}{dr} = s^{'}$ yazılıp gerekli işlemler yapılarak

$$y^{''} = \frac{ss^{''}dr - s^{'}ds + (s^{'})^2 dr}{(s^{'})^2} . \frac{s^2}{ds}$$

$$y^{''} = \frac{(ss^{''}\frac{1}{s^{'}} - s^{'} + (s^{'})^2\frac{1}{s^{'}})s^2}{(s^{'})^2}$$

$$y^{''} = \frac{(ss^{''}\frac{1}{s^{'}} - s^{'} + s^{'}))s^2}{(s^{'})^2}$$

formunda oluşan denklem gerekli sadeleşme sonucu

$$y^{''} = \frac{s^3 s^{''}}{(s^{'})^3}$$

şeklinde ikinci türev elde edilir.

Kanonik kordinatlarda elde edilen $x, y, y^{'}$ ve $y^{''}$ ifadeleri

$$x^5 y^{''} = xy^2 y^{'} - y^3$$

denkleminde yerlerine yazılarak

$$(-\frac{1}{s})^5 (\frac{s^{''} s^3}{(s^{'})^3}) = -\frac{1}{s}(-\frac{r}{s})^2[-\frac{s}{s^{'}} + r] - (-\frac{r}{s})^3$$

$$-\frac{s^{''}}{s^2 (s^{'})^3} = -\frac{r^2}{s^3}(\frac{-s + rs^{'}}{s^{'}}) + \frac{r^3}{s^3}$$

$$-\frac{ss^{''}}{(s^{'})^3} = -r^2 (\frac{-s + rs^{'}}{s^{'}}) + r^3$$

$$-\frac{ss^{''}}{(s^{'})^3} = -r^2 (\frac{-s + rs^{'} - rs^{'}}{s^{'}})$$

oluşan son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\frac{s}{s^{'}} \frac{s^{''}}{(s^{'})^2} = -\frac{s}{s^{'}} r^2$$

şeklinde değişkenlere ayrılabilen diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklem

$$\frac{s^{''}}{(s^{'})^2} = -r^2$$

şeklinde yazılıp aşağıdaki gibi integral hesaplanır.

$$\int \frac{s^{''}}{(s^{'})^2} dr = \int -r^2 dr$$

$s^{'} = u \implies s^{''} dr = du$ dönüşümü yapılarak integral

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int r^2 dr$$

formunu alır. Son eşitlikten $-\frac{c}{3}$ integral sabiti olmak üzere

$$-\frac{1}{u} = -\frac{r^3}{3} - \frac{c}{3}$$

şeklinde integral eşitleri bulunur ve buradan

$$u = \frac{3}{r^3 + c}$$

şeklinde u elde edilir. $u = s^{'}$ yazılarak

$$s^{'} = \frac{3}{r^3 + c}$$

olur ve bu denklem $c = 0$ seçerek tekrar integre edildiğinde

$$\int s^{'} dr = \int (\frac{3}{r^3}) dr$$

$$\Longrightarrow s = -\frac{3}{2r^2} + C$$

şeklinde kanonik koordinatlarda çözüm bulunur (C integral sabiti). Son olarak $s = -\frac{1}{x}$ ve $r = \frac{y}{x}$ yazılarak

$$-\frac{1}{x} = -\frac{3}{2\frac{y^2}{x^2}} - C \Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{3x^2}{2y^2} + C$$

$$\Longrightarrow \frac{3x^3}{2y^2} + Cx = 1 \Longrightarrow \frac{3x^3}{2y^2} = 1 - Cx \Longrightarrow 2y^2 = \frac{3x^3}{1 - Cx}$$

olur. Dolayısıyla denklemin çözümü

$$y = \mp x.\sqrt{\frac{3}{2}.\frac{x}{1 - Cx}}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi verilen denklemi

$$X_2 = \frac{2}{3}x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

üretecini kullanarak kanonik koordinatlarda yazalım.

$$X_2 r = 0$$

denklemini çözelim.

$$\frac{3}{2}\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dr}{0}$$

karakteristik denkleminden birinci ve ikinci oranın eşitliğinden

$$\frac{3}{2}\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Longrightarrow 3\frac{dx}{x} = 2\frac{dy}{y}$$

integral alındığında r sabit olduğundan

$$r(x, y) = \frac{y^2}{x^3}$$

olarak bulunur. $X_2 s = 1$ denkleminin karakteristik denklemlerinden

$$\frac{3}{2}\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{ds}{1}$$

birinci ve üçüncü oranın eşitliği yazılarak s

$$\frac{3}{2}\frac{dx}{x} = \frac{ds}{1} \implies s(x, y) = \frac{3}{2}\ln x$$

şeklinde bulunur. Şimdi x ve y kartezyen koordinatları elde edilen kanonik koordinatlar türünden

$$x = e^{\frac{2s}{3}}$$

$$y = e^{s}\sqrt{r}$$

şeklinde yazarak $y^{'}$ ve $y^{''}$ türevlerini bu koordinatlarda bulalım.

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{e^{s}\sqrt{r}ds + \frac{1}{2\sqrt{r}}e^{s}dr}{\frac{2}{3}e^{\frac{2s}{3}}ds}$$

$$y^{'} = \frac{3}{2}e^{\frac{s}{3}}\sqrt{r} + \frac{3}{4}e^{\frac{s}{3}}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{1}{s^{'}}$$

ve benzer şekilde

$$y^{''} = \frac{dy^{'}}{dx} = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{s}{3}}\sqrt{r}ds + \frac{3}{2}e^{\frac{s}{3}}\frac{1}{2\sqrt{r}}dr + \frac{1}{4}e^{\frac{s}{3}}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{1}{s^{'}}ds - \frac{3}{4}e^{\frac{s}{3}}\frac{s^{''}}{(s^{'})^{2}}\frac{1}{\sqrt{r}}dr - \frac{3}{8}\frac{1}{r\sqrt{r}}e^{\frac{s}{3}}\frac{1}{s^{'}}dr}{\frac{2}{3}e^{\frac{2s}{3}}ds}$$

şeklinde diferansiyel oranı yazılarak

$$y^{''} = e^{-\frac{s}{3}}[\frac{3}{4}\sqrt{r} + \frac{9}{8}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{1}{s^{'}} + \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{1}{s^{'}} - \frac{9}{8}\frac{s^{''}}{(s^{'})^{3}}\frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{9}{16}\frac{1}{(s^{'})^{2}}\frac{1}{r\sqrt{r}}]$$

şeklinde elde edilir. Kanonik koordinatlarda elde edilen x, y, $y^{'}$, $y^{''}$ ifadelerini

$$y^{''} = \frac{y^{2}y^{'}}{x^{4}} - \frac{y^{3}}{x^{5}}$$

denkleminde yazarak

$$e^{-\frac{s}{3}}[\frac{3}{4}\sqrt{r} + \frac{9}{8}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{1}{s^{'}} + \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{1}{s^{'}} - \frac{9}{8}\frac{s^{''}}{(s^{'})^{3}}\frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{9}{16}\frac{1}{(s^{'})^{2}}\frac{1}{r\sqrt{r}}]$$

$$= e^{2s}r\frac{(\frac{3}{2}e^{\frac{s}{3}}\sqrt{r} + \frac{3}{4}e^{\frac{s}{3}}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{1}{s^{'}})}{e^{\frac{8s}{3}}} - \frac{e^{3s}r\sqrt{r}}{e^{\frac{10s}{3}}}$$

formunda oluşan denklemde gerekli sadeleşmeler yapılarak

$$\frac{3}{4}\sqrt{r}+\frac{9}{8}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{1}{s'}+\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{1}{s'}-\frac{9}{8}\frac{s''}{(s')^3}\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{9}{16}\frac{1}{(s')^2}\frac{1}{r\sqrt{r}}=\frac{3}{2}r\sqrt{r}+\frac{3}{4}\frac{r}{\sqrt{r}}\frac{1}{s'}-r\sqrt{r}$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{4}\sqrt{r}+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{1}{s'}-\frac{9}{8}\frac{s''}{(s')^3}\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{9}{16}\frac{1}{(s')^2}\frac{1}{r\sqrt{r}}=\frac{1}{2}r\sqrt{r}+\frac{3}{4}\frac{r}{\sqrt{r}}\frac{1}{s'}$$

şeklinde oluşan denklemde

$$\frac{1}{(s')^2}=u^2 \Longrightarrow -2\frac{s''}{(s')^3}=2uu' \Longrightarrow -\frac{s''}{(s')^3}=uu'$$

dönüşümü uygulanarak

$$\frac{3}{4}\sqrt{r}+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{r}}u+\frac{9}{8}uu'\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{9}{16}u^2\frac{1}{r\sqrt{r}}=\frac{1}{2}r\sqrt{r}+\frac{3}{4}\frac{r}{\sqrt{r}}u$$

şeklinde elde edilen denklemin iki tarafı $16r\sqrt{r}$ ile çarpılırsa

$$12r^2+24ru+18ruu'-9u^2=8r^3+12r^2u$$

$$\Longrightarrow u'-\frac{1}{2r}u+(\frac{2r}{3}-\frac{4r^2}{9})\frac{1}{u}-\frac{2r}{3}+\frac{4}{3}=0$$

şeklinde verilen denklemin mertebesi indirgenir. Görüldüğü üzere X_1, denklemin tam çözümü için uygun olan Lie grubu operatörüdür. Bir başka ifadeyle diferansiyel denklemlerin kabul ettiği her simetri grubu denklemin tam çözümü için bize garanti vermediği literatürden bilinmektedir.

Örnek 5.5.2

$$y''-y^{-3}=0$$

diferansiyel denklemini Lie simetri yöntemiyle çözelim.

Çözüm:

$$X^{[2]}=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+(\eta_x+\eta_y y'-\xi_x y'-\xi_y y'^2)\frac{\partial}{\partial y'}$$

$$+[\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y'+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})(y')^2-\xi_{yy}(y')^3+(\eta_y-2\xi_x-3y'\xi_y)y'']\frac{\partial}{\partial y''}$$

şeklindeki ikinci genişleme sonsuz üreteci kullanılarak $H(x,y,y',y'')=$y$''-y^{-3}=0$ şeklinde denklemin belirttiği yüzey için

$$X^{[2]}H=X^{[2]}(y''-y^{-3})=0$$

şeklindeki değişmezlik şartında

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \frac{\partial H}{\partial y} = 3y^{-4}, \frac{\partial H}{\partial y'} = 0, \frac{\partial H}{\partial y''} = 1$$

kısmi türevleri yazarak

$$\eta \frac{\partial}{\partial y} 3y^{-4} + [\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - \xi_{yy}(y')^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)y''] = 0$$

şeklinde oluşan denklemde $y'' = y^{-3}$ eşiti yazılarak

$$\eta \frac{\partial}{\partial y} 3y^{-4} + [\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - \xi_{yy}(y')^3$$

$$+(\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)y^{-3}] = 0$$

elde edilen denklemden y' nün kuvvetlerinin katları ile aşağıdaki denklemler oluşur.

$$(y')^3 : \xi_{yy} = 0, \tag{5.66}$$

$$(y')^2 : \eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \tag{5.67}$$

$$(y')^1 : 2\eta_{xy} - \xi_{xx} - 3\xi_y y^{-3} = 0, \tag{5.68}$$

$$(y')^0 : 3\eta y^{-4} + \eta_{xx} + (\eta_y - 2\xi_x)y^{-3} = 0. \tag{5.69}$$

(5.66) denkleminden

$$\xi(x, y) = a(x)y + b(x)$$

şeklinde elde edilir. (5.67) denkleminden ise

$$\eta_{yy} = 2a' \implies \eta = a'y^2 + cy + d \tag{5.70}$$

olarak bulunur. (5.68) denkleminden

$$4a''y + 2c' - a''y - b'' - 3ay^{-3} = 0$$

şeklinde denklem yazılarak buradan

$$y^{-3} : a(x) = 0,$$

$$y : a''(x) = 0,$$

$$y^0 : 2c'(x) - b''(x) = 0 \tag{5.71}$$

denklemleri oluşur. Dolayısıyla

$$a(x) = 0 \implies \xi = b(x)$$

ve (5.71) denkleminden c_1 sabit olmak üzere

$$b^{''}(x) = 2c^{'}(x) \implies b^{'}(x) = 2c(x) + c_1$$

şeklinde olur. (5.69) denkleminde, elde edilen $\eta, \eta_y, \eta_{xx}, \xi$ ve ξ_x ifadeleri yazılarak

$$3(ky + d)y^{-4} + d^{''} + (k - 2b^{'})y^{-3} = 0$$

şeklinde oluşan denklemden aşağıdaki

$$y^{-3} : 3c + c - 2b^{'} = 0 \implies b^{'} = 2c, \tag{5.72}$$

$$y^{-4} : 3d = 0 \implies d = 0,$$

$$y : c^{''} = 0 \implies c(x) = kx + t, \tag{5.73}$$

$$y^0 : d^{''} = 0,$$

denklem sistemi elde edilir. $a(x) = a = 0$ ve $d(x) = d = 0$ olduğundan (5.70) denkleminden k, t birer sabit olmak üzere

$$\eta = c(x)y$$

elde edilir. (5.73) daki $c(x)$ kullanılarak

$$\eta = (kx + t)y$$

formunda elde edilir. (5.72) ve (5.73) eşitliklerinden

$$b^{'} = 2c \implies b^{'} = 2kx + 2t \implies b = b(x) = kx^2 + 2tx + c_2$$

ifadeleri göz önünde bulundurularak

$$\xi = kx^2 + 2tx + c_2$$

şeklinde elde edilir. Verilen denklem için sonsuz küçük üreteç genel olarak

$$X = (kx^2 + 2tx + c_2)\frac{\partial}{\partial x} + (kx + t)y\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde ifade edilir. Denklemin çözümü için

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

üretecini kullanalım. (Aynı zamanda, $Y = 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ ve $Z = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$ şeklindeki simetri üreteçleri de yazılabilir.)

$$Xr = 0$$

denkleminin

$$dx = \frac{dy}{0} = \frac{dr}{0}$$

şeklindeki karakteristik denklemlerinden (Lagrange yardımcı sistemi) r sabit olduğundan

$$dx = \frac{dy}{0} \implies y = r$$

ve

$$Xs = 1$$

denkleminin karakteristik denklemlerini aşağıdaki şekilde yazarak

$$dx = \frac{dy}{0} = \frac{ds}{1} \implies x = s$$

şeklinde s elde edilir. Şimdi $y^{''}$ türevini kanonik koordinatlarda hesaplayarak verilen denklemi (s, r) koordinatlarında yazalım.

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{dr}{ds} = \frac{1}{s'}$$

$$y^{''} = \frac{dy'}{dx} = \frac{-\frac{s^{''}}{(s')^2}dr}{ds} = -\frac{s^{''}}{(s')^3}$$

şeklinde elde edilerek

$$y^{''} = y^{-3}$$

denkleminde yazılarak

$$\frac{s^{''}}{(s')^3} = r^{-3}$$

denklemi oluşur. Son denklemde, $s^{'} = u \implies s^{''}dr = du$ dönüşümü kullanılarak

$$\frac{du}{u^3} = -\frac{dr}{r^3}$$

şeklinde elde edilen denklem integre edilerek c integral sabiti olmak üzere

$$\frac{1}{u^2} = -\frac{1}{r^2} + c$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem $c = 1$ alınarak u ya göre çözüldüğünde

$$u = \mp \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}}$$

şeklini alır. $u = s^{'}$ dönüşümü kullanılarak

$$s^{'} = \mp \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}}$$

şeklinde oluşan denklem integre edildiğinde

$$\int ds = \mp \int \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} dr$$

ve buradan

$$r^2 - 1 = v \implies 2rdr = dv$$

değişken dönüşümü kullanılarak C integral sabiti olmak üzere

$$\int ds = \mp \int \frac{dv}{2\sqrt{v}}$$

$$s = \mp \sqrt{v} + C$$

ve buradan

$$s = \mp \sqrt{r^2 - 1} + C$$

şeklinde verilen denklemin kanonik koordinatlarda çözümü elde edilir. (x, y) kartezyen koordinatlarına geçiş yapılarak

$$y = \mp \sqrt{(x - C)^2 + 1}$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.

6 NOETHER SİMETRİ YAKLAŞIMI

6.1 Noether Simetri Sınıflandırması ve İndirgemesi Üzerine Ön Bilgiler

$$X^{[1]} = X + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - (y')^2\xi_y]\frac{\partial}{\partial y'} \tag{6.1}$$

şeklinde birinci genişlemeye sahip olan

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.2}$$

(6.2) nokta tipi vektör alanını göz önünde bulunduralım. Buradaki $X^{[1]}$, X operatörünün birinci genişlemesidir.

Şimdi $L(x,y,y')$ Lagrangian'ına sahip

$$y'' = E(x,y,y') \tag{6.3}$$

şeklinde keyfi bir ikinci mertebeden (6.3) denklemi dikkate alınırsa, bu denklem

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial L}{\partial y'}) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{6.4}$$

şeklindeki Euler-Lagrange denklemine denktir [1].

Tanım 6.1.1

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + ... \tag{6.5}$$

(6.5) genişletilmiş türev operetörü olmak üzere, eğer

$$X^{[1]}L + D(\xi)L = D(A) \tag{6.6}$$

eşitliği geçerli olacak şekilde $A(x, y)$ ayar (ölçü) fonksiyonu varsa X operatörüne, (6.3) denklemin bir $L(x, y, y^{'})$ Lagrangian'ına karşılık gelen bir Noether nokta simetri üreteci denir [17].

Tanım 6.1.2 *(İlk İntegral) n. mertebeden*

$$y^{n} = f(x, y, y^{'}, ..., y^{(n-1)}) \tag{6.7}$$

şeklindeki adi diferansiyel denkleminin ilk integrali $y^{(n)} = f$ olduğunda

$$\frac{d\phi}{dx} = 0$$

şartını sağlayan ve $y^{(n-1)}$ temel bağımlılığı olan bir

$$\phi(x, y, y^{'}, ..., y^{n-1})$$

fonksiyonudur. Yani, $\phi(x, y, y^{'}, ..., y^{n-1})$, (6.7) denkleminin her $y = \omega(x)$ çözümü için sabittir [20].

(6.7) denkleminin ilk integrali, C bir sabit olmak üzere $\phi(x, y, y^{'}, ..., y^{n-1}) = C$ eşitliğini sağladığından diferansiyel denklemin herhangi bir $y = \omega(x)$ çözümü için korunan miktarı temsil ettiği gibi bu denklemi $(n-1)$. mertebeden bir denkleme indirgeyen bir quadrature sağladığından [20] denklemlerin çözümü için önem teşkil etmektedir.

Mevcut bir Noether nokta simetri üretecinin faydası aşağıdaki üç teoremde yatmaktadır.

Teorem 6.1.1 *X'in, (6.3) denkleminin $L(x, y, y^{'})$ Lagrangian'ına karşılık gelen, bir Noether nokta simetrisi olduğunu varsayalım. X operatörüyle ilişkili*

$$I = \xi L + (\eta - y^{'}\xi)\frac{\partial L}{\partial y^{'}} - A \tag{6.8}$$

şeklindeki I, (6.3) denkleminin ilk integralidir [1].

I ilk integrali, literatürde korunum kanunları için ayrıca önem teşkil etmektedir.

Kanıt: İspat için $\frac{dI}{dx} = 0$ eşitliğini gösterelim.

$$\frac{dI}{dx} = \xi\frac{\partial L}{\partial x} + L\frac{d\xi}{dx} + \sum_{\alpha=1}^{q}(\frac{d\eta_{\alpha}}{dx} - u_{x}^{\alpha}\frac{d\xi}{dx} - u_{xx}^{\alpha}\xi)\frac{\partial L}{\partial u_{x}^{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^{q}(\eta_{\alpha} - u_{x}^{\alpha}\xi)\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u_{x}^{\alpha}} - \frac{dA}{dx} =$$

$$(\frac{\partial L}{\partial x}+\sum_{\alpha=1}^{q}u_x^\alpha\frac{\partial L}{\partial u^\alpha})\xi+L\frac{d\xi}{dx}+\sum_{\alpha=1}^{q}(\frac{d\eta_\alpha}{dx}-u_x^\alpha\frac{d\xi}{dx})\frac{\partial L}{\partial u_x^\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{q}(\eta_\alpha-u_x^\alpha\xi)\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u_x^\alpha}-\frac{dA}{dx}=$$

$$\xi\frac{\partial L}{\partial x}+\sum_{\alpha=1}^{q}\eta_\alpha\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{q}\eta_\alpha^x\frac{\partial L}{\partial u_x^\alpha}+L\frac{d\xi}{dx}-\frac{dA}{dx}-\sum_{\alpha=1}^{q}\eta_\alpha\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{q}(\eta_\alpha-u_x^\alpha\xi)\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u_x^\alpha}$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{q}u_x^\alpha\xi\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}=X^{[1]}L+L\frac{d\xi}{dx}-\frac{dA}{dx}+\sum_{\alpha=1}^{q}(\eta_\alpha-u_x^\alpha\xi)[\frac{d}{dx}(\frac{\partial L}{\partial u_x^\alpha})-\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}]=0$$

şeklinde (6.6) denklemi ve Euler-Lagrange denklemi ile istenilen elde edilir [19]. Kanıtta

$$\xi\frac{\partial L}{\partial x}+\sum_{\alpha=1}^{q}\eta_\alpha\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{q}\eta_\alpha^x\frac{\partial L}{\partial u_x^\alpha}=X^{[1]}L$$

ve

$$(\frac{d\eta_\alpha}{dx}-u_x^\alpha\frac{d\xi}{dx})=\eta_\alpha^x$$

şeklinde eşitlikler kullanılmıştır.

Teorem 6.1.2 *Noether nokta simetrisi X ile ilişkili I ilk integral*

$$X^{[1]}I=0$$

eşitliğini sağlar [1].

Teoremdeki X, (6.3) denkleminin ilk integrali olan I'nın bir nokta simetri jeneratörüdür.

Teorem 6.1.3 *(6.3) denkleminin $L(x,y,y^{'})$ Lagrangian'ı için bir Noether nokta simetri üretecinin karşılık geldiğini varsayalım. O halde (6.3) denklemi, integrasyon çözüme sahiptir [1].*

6.2 Genelleştirilmiş Lane-Emden Denkleminin Noether Yöntemiyle İki Kere İndirgemesi

Bu alt bölümde [1] makalesi incelenmiştir.

$$y^{''}+\frac{n}{x}y^{'}+f(y)=0$$

denkleminin standart Lagrangian'ı

$$L=\frac{1}{2}x^n(y^{'})^2-x^n\int f(y)dy \tag{6.9}$$

şeklindedir. Bu Lagrangıan, [28] kaynağında ifade edilen teoremle kolayca elde edilebilir.

Şimdi (6.6) denklemini

$$X^{[1]}L + D(\xi)L = D(A)$$

şeklinde hatırlayarak bu denklemin bütün terimlerini hesaplayalım. Bunun için

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y^{'}\frac{\partial}{\partial y} + y^{''}\frac{\partial}{\partial y^{'}} + ...$$

ve

$$X^{[1]} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y^{'} - (y^{'})^2\xi_y]\frac{\partial}{\partial y^{'}}$$

operatörlerini göz önünde bulundurarak

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}nx^{n-1}y'^2 - nx^{n-1}\int f(y)dy,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -x^n f(y),$$

$$\frac{\partial L}{\partial y^{'}} = x^n y^{'},$$

şeklinde (6.9) Lagrangian'ın x, y ve $y^{'}$ değişkenlerine göre kısmi türevleri hesaplanarak sırasıyla $X^{[1]}$, $D(\xi)L$ ve $D(A)$ ifadeleri

$$X^{[1]}L = \xi[\frac{1}{2}nx^{n-1}y'^2 - nx^{n-1}\int f(y)dy] + \eta(-x^n f(y)) + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y^{'} - (y^{'})^2\xi_y]x^n y^{'}$$

$$D(\xi)L = (\xi_x + \xi_y y^{'})[\frac{1}{2}x^n(y^{'})^2 - x^n\int f(y)dy]$$

$$D(A) = A_x + A_y y^{'}$$

olacak şekilde hesaplanır. Elde edilen bu ifadeler

$$X^{[1]}L + D(\xi)L = D(A)$$

denkleminde yazılarak

$$\xi[\frac{1}{2}nx^{n-1}y'^2 - nx^{n-1}\int f(y)dy] + \eta(-x^n f(y)) + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y^{'} - (y^{'})^2\xi_y]x^n y^{'}$$

$$+(\xi_x + \xi_y y^{'})(\frac{1}{2}x^n(y^{'})^2 - x^n\int f(y)dy) = A_x + A_y y^{'} \tag{6.10}$$

şeklinde (6.10) eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $y^{'}$ in kuvvetlerine göre yazıldığında katsayılar

$$(y^{'})^3 : -x^n\xi_y + \frac{1}{2}x^n\xi_y = 0, \tag{6.11}$$

$$(y^{'})^2 : \frac{1}{2}nx^{n-1}\xi + (\eta_y - \xi_x)x^n + \frac{1}{2}x^n\xi_x = 0, \tag{6.12}$$

$$y^{'} : x^n\eta_x = A_y, \tag{6.13}$$

$$(y^{'})^0 : -nx^{n-1}\xi \int f(y)dy - x^n\eta f(y) - x^n\xi_x \int f(y)dy = A_x \tag{6.14}$$

biçiminde kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi oluşturur. (6.11) denkleminden,

$$\frac{-1}{2}x^n\xi_y = 0 \implies \xi_y = 0 \implies \xi = a(x) \tag{6.15}$$

şeklinde ξ elde edilir. (6.12) denklemi

$$\frac{1}{2}nx^{n-1}\xi + \eta_y x^n - \xi_x x^n + \frac{1}{2}x^n\xi_x = 0$$

formunda yazılarak oluşan denklemde x^n ifadesini sadeleştirerek

$$\eta_y = \frac{1}{2}(\xi_x - nx^{-1}\xi) \tag{6.16}$$

bulunur. (6.15) ifedesini (6.16) te kullanırsak $a(x) = a$ olmak üzere

$$\eta_y = \frac{1}{2}[a' - nx^{-1}a] \tag{6.17}$$

şeklinde oluşan (6.17) nın integralinden

$$\eta = \frac{1}{2}[a' - nx^{-1}a]y + b(x) \tag{6.18}$$

şeklinde η elde edilir. (6.13) denkleminden (6.18) denklemi kullanılarak A için

$$\eta_x = \frac{1}{2}[a^{''} + nx^{-2}a - nx^{-1}a^{'}]y + b^{'}$$

$$A_y = \frac{1}{2}x^n(a^{''} + nx^{-2}a - nx^{-1}a^{'}]y + x^n b^{'} \tag{6.19}$$

eşitliği elde edilir. (6.19)'in y'ye göre integrali alınırsa

$$A = \frac{1}{4}x^n[a^{''} - n(\frac{a}{x})^{'}]y^2 + b^{'}x^n y + c(x) \tag{6.20}$$

olacak şekilde A bulunur. Şimdi (6.14) denkleminde (6.15), (6.18) ve (6.20) ifadelerini kullanarak

$$A_x = \frac{1}{4}nx^{n-1}[a^{''} - n(\frac{a}{x})^{'}]y^2 + \frac{1}{4}x^n[a^{'''} - n(a^{''}x^{-1} - 2a^{'}x^{-2} + 2ax^{-3}]y^2$$
$$+b^{''}x^n y + nb^{'}x^{n-1}y + c^{'}$$
$$A_x = \frac{1}{4}a^{'''}x^n y^2 + \frac{1}{2}nx^{n-2}a^{'}y^2 - \frac{1}{2}nx^{n-3}ay^2 - \frac{1}{4}n^2x^{n-1}(\frac{a}{x})^{'}y^2$$
$$+b^{''}x^n y + nb^{'}x^{n-1}y + c^{'}$$
$$\Longrightarrow [-nx^{n-1}a - a^{'}x^n]\int f(y)dy + [-\frac{1}{2}x^n a^{'}y + \frac{1}{2}nx^{n-1}ay - x^n b]f(y)$$
$$= \frac{1}{4}a^{'''}x^n y^2 + \frac{1}{2}nx^{n-2}a^{'}y^2 - \frac{1}{2}nx^{n-3}ay^2 - \frac{1}{4}n^2x^{n-1}(\frac{a}{x})^{'}y^2$$
$$+b^{''}x^n y + nb^{'}x^{n-1}y + c^{'} \tag{6.21}$$

şeklinde oluşan (6.21) denkleminin analizi aşağıdaki sekiz durumu ortaya çıkarır.

1.Durum: $n \neq 0$, $f(y)$ keyfi fakat $3, 4, 5$ ve 6 durumlarında yer alan biçimde değil.

- $f(y)$ lineer değil, $f(y) \neq \alpha y^2 + \beta y + \gamma$
- $f(y)$ kuadratik değil, $f(y) \neq \alpha y^r$
- $f(y) \neq \alpha \exp(\beta y) + \gamma y + \delta$, $\alpha, \beta \neq 0$

(6.21) denklemi

$$[\frac{1}{4}a^{'''}x^n + \frac{1}{2}nx^{n-2}a^{'} - \frac{1}{2}nx^{n-3}a - \frac{1}{4}n^2x^{n-1}(\frac{a}{x})^{'}]y^2 + [b^{''}x^n + b^{'}nx^{n-1}]y$$
$$+[nx^{n-1}a + a^{'}x^n]\int f(y)dy + [\frac{1}{2}x^n a^{'}y - \frac{1}{2}nx^{n-1}ay + x^n b]f(y) + c^{'} = 0 \tag{6.22}$$

şeklinde yazılarak aşağıdaki denklem sistemleri elde edilir.

$$y^2 : \frac{1}{4}a^{'''}x^n + \frac{1}{2}nx^{n-2}a^{'} - \frac{1}{2}nx^{n-3}a - \frac{1}{4}n^2x^{n-1}(\frac{a}{x})^{'} = 0, \tag{6.23}$$
$$y^1 : b^{''}x^n + b^{'}nx^{n-1} = 0, \tag{6.24}$$
$$y^0 : c^{'} = 0,$$
$$\int f(y)dy : nx^{n-1}a + a^{'}x^n = 0, \tag{6.25}$$
$$f(y) : \frac{1}{2}x^n a^{'}y - \frac{1}{2}nx^{n-1}ay + x^n b = 0 \tag{6.26}$$

(6.26) denkleminden y 'nin kuvvetlerinin katlarından

$$y^1 : \frac{1}{2}x^n a^{'} - \frac{1}{2}nx^{n-1}a = 0, \tag{6.27}$$

$$y^0 : b = 0 \tag{6.28}$$

olarak (6.27) ve (6.28) denklemleri yazılabilir.

Şimdi (6.27) denkleminden

$$x^n a^{'} - nx^{n-1}a = 0 \tag{6.29}$$

(6.29) denklemini yazarak ve ayrıca (6.25) denklemini

$$x^n a^{'} + nx^{n-1}a = 0 \tag{6.30}$$

tekrar göz önünde bulundurarak (6.29) ve (6.30) denklemlerinin ortak çözümünden

$$a = 0 \tag{6.31}$$

ve $\xi = a(x)$ olduğundan

$$\xi = 0 \tag{6.32}$$

elde edilir. Ayrıca (6.28) ve (6.31) eşitlikleri kullanılarak (6.18) denkleminden

$$\eta = \frac{1}{2}[a' - nx^{-1}a]y + b(x)$$

olduğundan

$$\eta = 0 \tag{6.33}$$

şeklinde η bulunur ve (6.20) denkleminden

$$A = k \tag{6.34}$$

k sabit olacak şekilde A'ya ulaşılır. Dolayısıyla bu durum için Noether nokta simetrisi yoktur.

2.Durum: $n = 0, f(y)$ keyfi fakat durum 3 teki gibi lineer değil.

$$y^{''} + \frac{n}{x}y^{'} + f(y) = 0$$

denklemi

$$y^{''} + f(y) = 0 \tag{6.35}$$

denklemine dönüşür. (6.35) denkleminin Lagrangian'ı

$$L = \frac{1}{2}x^n(y^{'})^2 - x^n \int f(y)dy$$

$$\Longrightarrow \;\; L = \frac{1}{2}(y^{'})^2 - \int f(y)dy \qquad (6.36)$$

şeklinde elde edilir. (6.36) denklemi .

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial L}{\partial y^{'}}) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dx}(y^{'}) - (-f(y)) = y^{''} + f(y) = 0$$

şeklinde Euler-Lagrange denkleminde yazılarak (6.35) denklemi elde edildiğinden L, (6.35) denkleminin Lagrangian'ıdır. Bu durum için Lane-Emden denklemi

$$y^{''} + f(y) = 0 \qquad (6.37)$$

şeklinde olup bununun Lagrangian'ı (6.9) ifadesinden

$$L = \frac{1}{2}(y^{'})^2 - \int f(y)dy \qquad (6.38)$$

olacak şekilde bulunur.

$$X^{[1]}L + D(\xi)L = D(A)$$

denklemindeki her terim

$$X^{[1]} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y^{'} - (y^{'})^2\xi_y]\frac{\partial}{\partial y^{'}}$$

ve D operatörleri kullanılarak

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -f(y), \qquad \frac{\partial L}{\partial y^{'}} = y^{'}$$

kısmi türevleri yazılarak $X^{[1]}L$

$$X^{[1]}L = \xi(0) + \eta(-f(y)) + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y^{'} - (y^{'})^2\xi_y]y^{'}$$

şeklinde elde edilir.

$$D(\xi) = \xi_x + \xi_y y^{'}$$

şeklindeki $D(\xi)$ ve L kullanılarak $D(\xi)L$

$$D(\xi)L = (\xi_x + \xi_y y^{'})(\frac{1}{2}(y^{'})^2 - \int f(y)dy)$$

olacak şekilde elde edilir. Son olarak

$$D(A) = A_x + A_y y^{'}$$

eşitliğini yazarak elde edilen tüm terimler

$$X^{[1]}L + D(\xi)L = D(A)$$

denkleminde yazılarak

$$-\eta f(y) + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y^{'} - \xi_y(y^{'})^2]y^{'} + (\xi_x + \xi_y y^{'})(\frac{1}{2}(y^{'})^2 - \int f(y)dy) = A_x + A_y y^{'} \tag{6.39}$$

şeklinde (6.39) denklemi elde edilir. (6.39) denklemindeki $y^{'}$'nün kuvvetlerinin katlarından aşağıdaki denklemler yazılır.

$$(y^{'})^3 : -\xi_y + \frac{1}{2}\xi_y = 0, \tag{6.40}$$

$$(y^{'})^2 : (\eta_y - \xi_x) + \frac{1}{2}\xi_x = 0, \tag{6.41}$$

$$(y^{'})^1 : \eta_x - \xi_y \int f(y)dy = A_y, \tag{6.42}$$

$$(y^{'})^0 : -\eta f(y) - \xi_x \int f(y)dy = A_x \tag{6.43}$$

(6.40) ve (6.41) denklemlerinden sırasıyla

$$\xi = a(x) \tag{6.44}$$

ve

$$\eta_y = \frac{1}{2}\xi_x \tag{6.45}$$

elde edilir. (6.44) ifadesini (6.45) denkleminde kullanarak

$$\eta_y = \frac{1}{2}a^{'}$$

şeklinde oluşan denklem integre edildiğinde

$$\eta = \frac{1}{2}a^{'}y + b(x) \tag{6.46}$$

formunda η elde edilir. (6.42) denkleminde (6.44) ve (6.46) yazılarak

$$\eta_x - \xi_y \int f(y)dy = A_y$$

$$\frac{1}{2}a^{''}y + b^{'} = A_y \tag{6.47}$$

(6.47) şeklinde A_y bulunur. (6.47)' da integral alınırsa

$$A = \frac{1}{4}a^{''}y^2 + b^{'}y + c(x) \tag{6.48}$$

şeklinde A'ya ulaşılır. (6.43) denkleminde (6.44), (6.46) ve (6.48) eşitlikleri kullanılarak

$$(\frac{1}{2}a^{'}y + b(x))f(y) - a^{'}\int f(y)dy = \frac{1}{4}a^{'''}y^2 + b^{''}y + c^{'} \tag{6.49}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{4}a^{'''}y^2 + b^{''}y + a^{'}\int f(y)dy - (\frac{1}{2}a^{'}y + b(x))f(y) + c^{'} = 0 \tag{6.50}$$

şeklinde oluşan (6.50) denkleminden

$$f(y) : \frac{1}{2}a^{'}y + b(x) = 0, \tag{6.51}$$

$$\int f(y) : a^{'} = 0, \tag{6.52}$$

$$y^2 : a^{'''} = 0, \tag{6.53}$$

$$y^1 : b^{''} = 0, \tag{6.54}$$

$$y^0 : c^{'} = 0 \tag{6.55}$$

biçiminde elde edilen denklemlerden (6.51) denkleminde (6.52) kullanılarak

$$b(x) = 0 \tag{6.56}$$

ve (6.55) denkleminden

$$c(x) = k \tag{6.57}$$

olarak bulunur. k sabit olmak üzere sonsuz küçükler

$$\xi = k \qquad\qquad \eta = 0 \tag{6.58}$$

ve burada $k = 1$ seçilerek

$$\xi = 1 \qquad\qquad \eta = 0 \tag{6.59}$$

şeklinde sonsuz küçükler bulunur. Dolayısıyla Noether simetri jeneratörü

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \tag{6.60}$$

şeklindeki X tir. Bu durum için integrasyon, Noether simetrisi dışında bile önemsizdir. Noether integrali

$$I = \xi L + (\eta - \xi y^{'})\frac{\partial L}{\partial y^{'}} - A = \frac{1}{2}(y^{'})^2 - \int f(y)dy + (0 - 1y^{'})y^{'} - A$$

$$I = \frac{1}{2}(y^{'})^2 + \int f(y)dy \tag{6.61}$$

şeklinde kullanılır ve $I = C$ denkleminden kolayca çözüm elde edilir. Bu durum için $f(y) = -y^{-3}$ şeklinde alındığında oluşan denklemin Lie simetri yöntemiyle çözümü örnek 5.5.2 de verilmiştir.

3. Durum : $f(y)$, y' ye göre lineer

Bu durum iyi bilinmektedir. Karşılık gelen Lane-Emden denklemi $sl(3, \mathbb{R})$ simetri cebirine sahiptir ve bu diferansiyel denklemin standart Lagrangian'ıyla ilişkili beş Noether nokta simetrisi mevcuttur [29].

4. Durum : $f(y) = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$ formunda $f(y)$ olsun.

$$[\frac{1}{4}a^{'''}x^n + \frac{1}{2}nx^{n-2}a^{'} - \frac{1}{2}nx^{n-3}a - \frac{1}{4}n^2x^{n-1}(\frac{a}{x})^{'}]y^2 + [b^{''}x^n + b^{'}nx^{n-1}]y$$

$$+[nx^{n-1}a+a^{'}x^n](\frac{\alpha}{3}y^3+\frac{\beta}{2}y^2+\gamma y+\mu)+[\frac{1}{2}x^n a^{'}y-\frac{1}{2}nx^{n-1}ay+x^n b](\alpha y^2+\beta y+\gamma)+c^{'} = 0$$

i: Eğer $n = 5, \beta = 0, \gamma = 0$ ise bir önceki denklem

$$[\frac{1}{4}a^{'''}x^5 + \frac{1}{2}5x^3a^{'} - \frac{1}{2}5x^2a - \frac{1}{4}25x^4(\frac{a}{x})^{'}]y^2 + [b^{''}x^5 + b^{'}5x^4]y$$

$$+[5x^4a + a^{'}x^5](\frac{\alpha}{3}y^3) + [\frac{1}{2}x^5a^{'}y - \frac{1}{2}5x^4ay + x^5b](\alpha y^2) + c^{'} = 0$$

şeklinde yazılarak oluşan denklem y'nin kuvvetlerine göre yazıldığında

$$y^3 : \frac{\alpha}{3}(5x^4a + a^{'}x^5) + \alpha(\frac{1}{2}x^5a^{'} - \frac{5}{2}x^4a) = 0, \tag{6.62}$$

$$y^2 : \frac{1}{4}a^{'''}x^5 + \frac{5}{2}x^3a^{'} - \frac{5}{2}x^2a - \frac{25}{4}x^4(\frac{a}{x})^{'} + \alpha x^5 b = 0, \tag{6.63}$$

$$y^1 : b^{''}x^5 + 5b^{'}x^4 = 0, \tag{6.64}$$

$$y^0 : c^{'} = 0 \tag{6.65}$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. (6.65) denkleminden k sabit olmak üzere

$$c(x) = k \tag{6.66}$$

elde edilir. (6.62) denkleminden

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{3}x^4a + \frac{1}{3}a^{'}x^5 + \frac{1}{2}x^5a^{'} - \frac{5}{2}x^4a = 0 \\
&\Longrightarrow\ 10a + 2a^{'}x + 3a^{'}x - 15a = 0 \\
&\Longrightarrow\ 5a^{'}x - 5a = 0 \\
&\Longrightarrow\ \frac{a^{'}}{a} = \frac{1}{x} \qquad (6.67)
\end{aligned}$$

şeklinde oluşan (6.67) denkleminde eşitliğin iki tarafının integrali alınarak c_1 sabit olmak üzere

$$a(x) = c_1 x \tag{6.68}$$

(6.68) den $c_1 = 1$ seçilirse

$$\xi = x \tag{6.69}$$

elde edilir. (6.18) denkleminden ise

$$\eta = -2y \tag{6.70}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (6.69) ve (6.70) sonsuz küçükleriyle

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}$$

olarak bir tek Noether ve Lie nokta simetri üreteci elde edilir. (6.8) e göre X, I'nın bir simetri üretecidir [1].

$$y^{''} + \frac{5}{x}y^{'} + \alpha y^2 = 0 \tag{6.71}$$

denkleminin Lagrangian'ı (6.9) den

$$L = \frac{1}{2}x^5(y^{'})^2 - x^5\int \alpha y^2 dy = \frac{1}{2}x^5(y^{'})^2 - x^5\alpha y^3\frac{1}{3}$$

şeklinde elde edilir. L'nin Euler-Lagrange denklemini sağladığı basitçe gösterilebilir.

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial L}{\partial y^{'}}) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{6.72}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=\frac{d}{dx}(x^5y')=5x^4y'+x^5y'' \tag{6.73}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=-x^5\alpha y^2 \tag{6.74}$$

(6.73) ve (6.74) ifadeleri (6.72) denkleminde yazılırsa

$$5x^4y'+x^5y''-(-x^5\alpha y^2)=0$$

ve buradan denklemin her iki tarafı x^5 ile bölünmesiyle (6.71) denklemi elde edilir.

Şimdi (6.8) den I ilk integralini bulalım. (6.64), (6.69) ve (6.70) denklemlerindeki ifadeler (6.20) denkleminde kullanıldığında

$$A=k$$

olur. Dolayısıyla

$$I=\xi L+(\eta-y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'}-A$$

ifadesinde

$$\xi=x \quad , \quad \eta=-2y, \quad A=k \quad , \quad L=\frac{1}{2}x^5(y')^2-x^5\alpha y^3\frac{1}{3} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y'}=x^5y'$$

ifadeleri yazılarak

$$I=x\left(\frac{1}{2}x^5(y')^2-\frac{1}{3}x^5\alpha y^3\right)+(-2y-y'x)x^5y'-k$$

$$I=\frac{1}{2}x^6(y')^2-\frac{1}{3}x^6\alpha y^3-2yx^5y'-(y')^2x^6-k$$

şeklinde elde edilir. $I=C_1$ ise

$$\frac{1}{2}x^6(y')^2-\frac{1}{3}x^6\alpha y^3-2yx^5y'-(y')^2x^6=C \tag{6.75}$$

olarak indirgenmiş denklem bulunur. ($C_1, C=C_1+k$ birer keyfi sabit) (6.75) denkleminin çözümü için X üretecinin bir invaryantı kullanılır. Karaktaristik denklemden

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y} \tag{6.76}$$

(6.76) denkleminin integre edilerek çözümünden

$$y=\frac{v}{x^2} \tag{6.77}$$

olacak şekilde X üretecininin invaryantı elde edilir. Türev alınarak

$$y^{'}=\frac{v^{'}}{x^2}-\frac{2v}{x^3} \tag{6.78}$$

denklemi elde edilir. (6.77) ve (6.78) ifadeleri (6.75) denkleminde yazılarak

$$\frac{x^6}{2}(\frac{v^{'}}{x^2}-\frac{2v}{x^3})^2-\frac{1}{3}x^6\alpha(\frac{v}{x^2})^3-2\frac{v}{x^2}x^5(\frac{v^{'}}{x^2}-\frac{2v}{x^3})-(\frac{v^{'}}{x^2}-\frac{2v}{x^3})^2x^6=C$$

$$\Longrightarrow \frac{x^6}{2}(\frac{(v^{'})^2}{x^4}-\frac{4vv^{'}}{x^5}+\frac{4v^2}{x^6})+\frac{\alpha v^3}{3}+2vv^{'}x-4v^2=C$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2(v^{'})^2}{2}-2vv^{'}x+2v^2+\frac{\alpha v^3}{3}+2vv^{'}x-4v^2=C$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2(v^{'})^2}{2}+2v^2+\frac{\alpha v^3}{3}-4v^2=C$$

$$\Longrightarrow (v^{'})^2=2(C-2v^2-\frac{\alpha v^3}{3}+4v^2)\frac{1}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{dv}{\mp\sqrt{2C+4v^2-\frac{2\alpha v^3}{3}}}=\frac{dx}{x}$$

şeklinde bu durum için verilen f'ye göre denklemin iki kere indirgemesi elde edilir.

ii: $n=5, \beta^2=4\alpha\gamma$ ve $f(y)=\alpha y^2+\beta y+\gamma$ ifadelerini (6.21) denkleminde yazarak

$$[\frac{1}{4}a^{'''}x^5+\frac{1}{2}5x^3a^{'}-\frac{1}{2}5x^2a-\frac{1}{4}25x^4(\frac{a}{x})^{'}]y^2+[b^{''}x^5+b^{'}5x^4]y$$

$$+[5x^4a+a^{'}x^5](\frac{\alpha}{3}y^3+\frac{\beta}{2}y^2+\frac{\beta^2}{4\alpha}y+\mu)+[\frac{1}{2}x^5a^{'}y-\frac{1}{2}5x^4ay+x^5b](\alpha y^2+\beta y+\frac{\beta^2}{4\alpha})+c^{'}=0 \tag{6.79}$$

şeklinde elde edilen (6.79) denkleminin sol tarafı y' nin polinomu formunda düşünerek katsayılardan

$$y^3:\frac{5\alpha}{3}x^4a+\frac{\alpha}{3}a^{'}x^5+\frac{\alpha}{2}x^5a^{'}-\frac{5}{2}\alpha x^4a=0, \tag{6.80}$$

$$y^2:\frac{1}{4}a^{'''}x^5+\frac{5}{2}x^3a^{'}-\frac{5}{2}x^2a-\frac{25}{4}x^4(\frac{a}{x})^{'}+\frac{5\beta}{2}x^4a+\frac{\beta}{2}a^{'}x^5+\alpha x^5b+\frac{\beta}{2}x^5a^{'}-\frac{5\beta}{2}x^4a=0, \tag{6.81}$$

$$y:b^{''}x^5+5b^{'}x^4+\frac{5\beta^2}{4\alpha}x^4a+\frac{\beta^2}{4\alpha}a^{'}x^5+\beta x^5b+\frac{\beta^2}{8\alpha}x^5a^{'}-\frac{5\beta^2}{8\alpha}x^4a=0, \tag{6.82}$$

$$y^0:\frac{-\beta^2}{4\alpha}x^5b+c^{'}=0 \tag{6.83}$$

denklem sistemi yazılır. (6.80) denkleminin her iki tarafı 6 ile çarpılarak

$$10\alpha x^4a+2\alpha a^{'}x^5+3\alpha x^5a^{'}-15\alpha x^4a=0$$

denklemi elde edilir. Buradan gereken sadeleşmeler yapılarak

$$5\alpha a^{'} x^5 - 5\alpha a x^4 = 0 \implies \frac{a^{'}}{a} = \frac{1}{x} \implies \ln a = \ln{(Cx)}$$

C sabiti $C = 1$ alınarak

$$a(x) = \xi = x$$

şeklinde ξ bulunur. (6.81) denkleminde $a(x) = a = x$, $a^{'} = 1$, $a^{'''} = 0$ ve $(\frac{a}{x})^{'} = 0$ ifadeleri yazılıp gerekli hesaplarla kolayca

$$b = b(x) = \frac{-\beta}{\alpha}$$

şeklinde elde edilir.

(6.18) denklemini göz önüne alarak

$$\eta = \frac{1}{2}[a' - nx^{-1}a]y + b(x)$$

elde edilen $a(x)$ ve $b(x)$ ifadeleri ve $n = 5$ değeri yazılarak

$$\eta = -2y - \frac{\beta}{\alpha}$$

şeklinde η elde edilir. Dolayısıyla

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - (2y + \frac{\beta}{\alpha})\frac{\partial}{\partial y}$$

Noether operatörü elde edilir. Bu operatör aynı zamanda Lie üretecidir. (6.20) ifadesinden $a = x$, $a^{'} = x$ ve $b = \frac{-\beta}{\alpha}$ yazılarak

$$A = c(x)$$

elde edilir. Buradaki $c(x)$, (6.83) denklemi

$$\frac{\beta^2}{4\alpha}x^5 b = c^{'}$$

şeklinde olup $b = \frac{-\beta}{\alpha}$ yazarak

$$c^{'} = \frac{\beta^3}{4\alpha^2}x^5$$

Buradan integral alınarak $\beta^2 = 4\gamma\alpha$ yazılırsa c_1 integral sabiti olmak üzere

$$c = c(x) = \frac{\beta\gamma}{6\alpha}x^6 + c_1$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla A ayar fonksiyonu $c_1 = 0$ alınarak

$$A(x) = \frac{\beta\gamma}{6\alpha}x^6$$

şeklinde elde edilir. Bu alt durum için oluşan Lane-Emden denklemi

$$y'' + \frac{5}{x}y' + \alpha y^2 + \beta y + \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

şeklinde olup bunun Lagrangian'ı (6.9) den

$$L = \frac{1}{2}x^5 y'^2 - x^5 \int (\alpha y^2 + \beta y + \frac{\beta^2}{4\alpha})dy$$

$$L = \frac{1}{2}x^5 (y')^2 - x^5 (\frac{\alpha y^3}{3} + \frac{\beta y^2}{2} + \frac{\beta^2}{4\alpha}y)$$

formunu alır. L'nin Euler-Lagrange denklemini sağladığını göstermek kolaydır.

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = x^5 y', \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -x^5(\alpha y^2 + \beta y + \frac{\beta^2}{4\alpha})$$

kısmi türevleri Euler-Lagrange denkleminde yazıldığında bu durum için Lane-Emden denklemi bulunur. Elde edilen ξ, η, L, $\frac{\partial L}{\partial y'}$ ve A ifadeleri Teorem 6.1.1 deki

$$I = \xi L + (\eta - y'\xi)\frac{\partial L}{\partial y'} - A$$

eşitliğinde yazılarak

$$I = x[\frac{1}{2}x^5(y')^2 - x^5(\frac{1}{3}\alpha y^3 + \frac{1}{2}\beta y^2 + \frac{1}{4}\frac{\beta^2}{\alpha}y)] - (2y + \frac{\beta}{\alpha} + y'x)x^5 y' - \frac{\beta\gamma}{6\alpha}x^6$$

$$I = \frac{-1}{2}x^6(y')^2 - x^6(\frac{1}{3}\alpha y^3 + \frac{1}{2}\beta y^2 + \frac{1}{4}\frac{\beta^2}{\alpha}y) - y'x^5(2y + \frac{\beta}{\alpha}) - \frac{\beta\gamma}{6\alpha}x^6$$

şeklinde elde edilen I ilk integrali için tanım gereği

$$I = \frac{1}{2}x^6(y')^2 + x^6(\frac{1}{3}\alpha y^3 + \frac{1}{2}\beta y^2 + \frac{1}{4}\frac{\beta^2}{\alpha}y) + y'x^5(2y + \frac{\beta}{\alpha}) + \frac{\beta\gamma}{6\alpha}x^6 = C \qquad (6.84)$$

şeklinde denklem yazılır. (C sabit) Bu denklemin çözümü için X Noether operatörünün değişmezini bulalım. Karakteristik denklem

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{(2y + \frac{\beta}{\alpha})}$$

şeklinde yazılarak oluşan denklemin çözümü

$$v=(2y+\frac{\beta}{\alpha})x^2 \tag{6.85}$$

şeklindeki değişmezi verir. Buradan

$$v=(2y+\frac{\beta}{\alpha})x^2 \implies y=\frac{v}{2x^2}-\frac{\beta}{2\alpha} \tag{6.86}$$

ve

$$v'=2y^{'}x^2+2(2y+\frac{\beta}{\alpha})x \implies y^{'}=\frac{v^{'}}{2x^2}-\frac{v}{x^3} \tag{6.87}$$

şeklinde (6.86) ve (6.87) da bulunan y ve $y^{'}$ ifadelerinin eşitleri (6.84) denkleminde yazılarak gerekli hesaplamalar sonucu

$$2v^2-\frac{1}{2}x^2(v^{'})^2-\frac{\alpha}{3}v^3=C$$

şeklinde oluşan denklem

$$xv^{'}=\mp\sqrt{4v^2-\frac{2}{3}\alpha v^3-2C}$$

şeklinde yazılıp değişkenlerine ayırarak

$$\frac{dv}{\mp\sqrt{4v^2-\frac{2}{3}\alpha v^3-2C}}=\frac{dx}{x}$$

formunda integre edilerek çift indirgeme elde edilir.

iii: $n=\frac{5}{3},\beta=0,\gamma=0,f(y)=\alpha y^2$ durumunda (6.21) denklemi

$$[\frac{1}{4}a^{'''}x^{\frac{5}{3}}+\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{3}}a^{'}-\frac{5}{6}x^{-\frac{4}{3}}a-\frac{25}{36}x^{\frac{2}{3}}(\frac{a}{x})^{'}]y^2+[b^{''}x^{\frac{5}{3}}+b^{'}\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}]y$$

$$+[\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}a+a^{'}x^{\frac{5}{3}}]\frac{\alpha y^3}{3}+[\frac{1}{2}x^{\frac{5}{3}}a^{'}y-\frac{5}{6}x^{\frac{2}{3}}ay+x^{\frac{5}{3}}b]\alpha y^2+c^{'}=0 \tag{6.88}$$

şeklini alır. Buradan y'nin kuvvetlerinin katlarını sıfıra eşitleyerek

$$y^3:\frac{5\alpha}{9}x^{\frac{2}{3}}a+\frac{\alpha}{3}a^{'}x^{\frac{5}{3}}+\frac{\alpha}{2}x^{\frac{5}{3}}a^{'}-\frac{5}{6}\alpha x^{\frac{2}{3}}a=0, \tag{6.89}$$

$$y^2:\frac{1}{4}a^{'''}x^{\frac{5}{3}}+\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{3}}a^{'}-\frac{5}{6}x^{-\frac{4}{3}}a-\frac{25}{36}x^{\frac{2}{3}}(\frac{a}{x})^{'}+\alpha x^{\frac{5}{3}}b=0, \tag{6.90}$$

$$y:b^{''}x^{\frac{5}{3}}+b^{'}\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=0, \tag{6.91}$$

$$y^0:c^{'}=0 \tag{6.92}$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. (6.92) denkleminden k sabit olmak üzere $c(x) = k$ olur. (6.89) denkleminden

$$(\frac{a}{3} - \frac{a}{2})\frac{5}{3}\alpha x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{3}}\alpha(\frac{a^{'}}{3} + \frac{a^{'}}{2}) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{-5a}{18}\alpha x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{3}}\frac{5\alpha}{6}a^{'} = 0$$

$$\Longrightarrow 3xa^{'} - a = 0 \Longrightarrow \frac{3da}{a} = \frac{dx}{x}$$

integre edilerek C integral sabiti olmak üzere $a(x) = Cx^{\frac{1}{3}}$ ve buradan $C = 1$ için

$$\xi = a(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

elde edilir. (6.90) denkleminde a ve bunun gerekli türevleri yazılarak $b(x) = 0$ bulunur. (6.18) denkleminde $a, a^{'}$ ve b ifadeleri yazılarak

$$\eta = -\frac{2}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

şeklinde elde edilir. Bu durum için Noether simetri operatörü

$$X = x^{\frac{1}{3}}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde elde edilir. (6.20) denkleminde $a^{''}(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}, b^{'}(x) = 0, c(x) = k$ ve $n = \frac{5}{3}$ ifadelerini yazarak

$$A = \frac{1}{4}x^{n}[a^{''} - n(\frac{a}{x})^{'}]y^{2} + b^{'}x^{n}y + c(x)$$

$$A = \frac{1}{4}x^{\frac{5}{3}}[-\frac{2}{9}x^{\frac{-5}{3}} - \frac{5}{3}(\frac{-2}{3})x^{\frac{-5}{3}}]y^{2} + 0.x^{n}y + k$$

$$A = \frac{2}{9}y^{2} + k$$

şeklinde ayar (ölçü) fonksiyonu elde edilir. Bu durum 5. durumun ii alt durumunda mevcuttur.

5. Durum: $f(y) = \alpha y^{m}$, α ve m birer sabitler ve $\alpha \neq 0$, $m \neq -3, 0, 1$ Buradaki iki alt durumu inceleyelim.

i: $n = \frac{m+3}{m-1}$ ifadesi ve $f(y) = \alpha y^{m}$ fonksiyonu (6.21) denkleminde aşağıdaki şekilde yazılarak

$$[\frac{1}{4}a^{'''}x^{n} + \frac{1}{2}nx^{n-2}a^{'} - \frac{1}{2}nx^{n-3}a - \frac{1}{4}n^{2}x^{n-1}(\frac{a}{x})^{'}]y^{2} + [b^{''}x^{n} + b^{'}nx^{n-1}]y$$

$$+[nx^{n-1}a + a^{'}x^{n}]\int \alpha y^{m}dy + [\frac{1}{2}x^{n}a^{'}y - \frac{1}{2}nx^{n-1}ay + x^{n}b]\alpha y^{m} + c^{'} = 0 \quad (6.93)$$

oluşan (6.93) denklemindeki y nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek oluşan denklemler aşağıdaki gibi yazılır.

$$y^{m+1} : \frac{\alpha}{m+1}nx^{n-1}a + a^{'}\frac{\alpha}{m+1}x^{n} + \frac{\alpha}{2}x^{n}a^{'} - \frac{1}{2}nx^{n-1}a\alpha = 0, \quad (6.94)$$

$$y^{2} : \frac{1}{4}a^{'''}x^{n} + \frac{1}{2}nx^{n-2}a^{'} - \frac{1}{2}nx^{n-3}a - \frac{1}{4}n^{2}x^{n-1}(\frac{a}{x})^{'} = 0, \quad (6.95)$$

$$y^{1} : b^{''}x^{n} + b^{'}nx^{n-1} = 0, \quad (6.96)$$

$$y^{0} : c^{'} = 0 \quad (6.97)$$

(6.97) eşitliğinden $c(x) = k$, k sabiti bulunur. (6.94) denkleminden

$$\frac{\alpha}{m+1}\frac{na}{x} + a^{'}\frac{\alpha}{m+1} + \frac{\alpha}{2}a^{'} - \frac{1}{2}\frac{n}{x}a\alpha = 0$$

$$\Longrightarrow a^{'}\alpha(\frac{m+3}{2m+2}) + \frac{na\alpha}{x}(\frac{1-m}{2m+2}) = 0 \quad (6.98)$$

buradan gerekli sadeleştirmeler yapılarak ve $n = \frac{m+3}{m-1}$ yazılarak $\frac{a^{'}}{a} = \frac{1}{x}$ şeklinde elde edilen denklem integre edilerek $a(x) = Cx$ ve özel olarak C=1 alınarak

$$a(x) = \xi = x$$

elde edilir.

(6.96) denkleminin aşikar çözümü $b(x) = 0$ alınarak (6.18) eşitliğinden

$$\eta = \frac{2}{1-m}y$$

şeklinde elde edilir. (6.20) denkleminde $a = a(x) = x, b = b(x) = 0$ ifadeleri yazılarak k sabit olmak üzere

$$A = c(x) = k$$

şeklinde ayar fonksiyonu elde edilir. Bu durum için elde edilen

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{1-m}y\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklindeki aynı zamanda bir tek Lie üreteci olan Noether üreteci için invaryant fonksiyon

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1-m)dy}{2y}$$

denkleminin integre edilmesiyle

$$\ln x = \frac{1-m}{2}\ln(y) + \ln v$$

formunda elde edilen denklemdeki v ifadesidir. Son denklem y ye göre çözülerek

$$y = v^{\frac{2}{m-1}} x^{\frac{2}{1-m}} \tag{6.99}$$

elde edilir. Teorem (6.1.1) deki denklemden bu alt durum için

$$I = \frac{1}{2}x^{\frac{2m+2}{m-1}}(y')^2 - x^{\frac{2m+2}{m-1}}\alpha\frac{y^{m+1}}{m+1} + (\frac{2}{1-m}y - xy')x^{\frac{m+3}{m-1}}y'$$

şeklinde elde edilen I ilk integrali yardımıyla

$$\frac{1}{2}x^{\frac{2m+2}{m-1}}(y')^2 - x^{\frac{2m+2}{m-1}}\alpha\frac{y^{m+1}}{m+1} + (\frac{2}{1-m}y - xy')x^{\frac{m+3}{m-1}}y' = C \tag{6.100}$$

indirgenmiş denklemi elde edilir (C sabit). (6.99) eşitliğinden y, y' ve y^{m+1} hesaplanarak (6.100) denkleminde yazılarak gerekli hesaplamalar sonucu

$$\int \frac{dv}{\mp\sqrt{4(1-m)^{-2}v^2 - 2\alpha(1+m)^{-1}v^{1+m} - C_1}} = \ln xC_2$$

şeklinde

$$y'' + \frac{m+3}{m-1}y' + \alpha y^m = 0$$

formundaki Lane-Emden denkleminin çift indirgemesi elde edilir.

ii: $n = \frac{m+3}{m+1}, m \neq -1$ ifadesi ve $f(y) = \alpha y^m$ fonksiyonu (6.21) denkleminden bir önceki **i** alt durumunda yapılan hesaplamalar göz önünde bulundurularak (6.98) denkleminde $n = \frac{m+3}{m+1}$ yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılarak elde edilen

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{x}.\frac{m-1}{m+1}$$

denklemi integre edildiğinde

$$\xi = x^{\frac{m-1}{m+1}}$$

şeklinde ξ sonsuz küçüğü bulunur ($a = \xi$).

(6.18) eşitliğide $a = \xi = x^{\frac{m-1}{m+1}}, b = 0$ ve $n = \frac{m+3}{m+1}$ yazılarak

$$\eta = -\frac{2}{m+1}x^{-\frac{2}{m+1}}.y$$

sonsuz küçüğü elde edilir. Bu durumda oluşan Noether üreteci

$$X = x^{\frac{m-1}{m+1}}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{m+1}x^{-\frac{2}{m+1}}.y\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklindedir. İkinci Lie simetri operatörü $\xi = x, \eta = \frac{2}{1-m}y$ sonsuz küçükleriyle elde edilir. Noether üretecin değişmezi

$$\frac{dx}{x^{\frac{m-1}{m+1}}} = \frac{dy}{-\frac{2}{m+1}x^{-\frac{2}{m+1}}.y}$$

denkleminin çözümünden elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$-\frac{2}{m+1}\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

şeklinde değişkenlerine ayırarak integre edildiğinde

$$y = vx^{-\frac{2}{m+1}}$$

formunda bulunur.(v üretecin değişmezi)

(6.20) ifadesinde $a = x^{\frac{m-1}{m+1}}, b = o$ ve $c = k$ yazarak

$$A = \frac{1}{4}x^{\frac{m+3}{m+1}}[(x^{\frac{m-1}{m+1}})'' - \frac{m+3}{m+1}(x^{\frac{-2}{m+1}})']y^2 + k$$

şeklinde oluşan denklemde gerekli türevler alınarak yapılan hesaplar sonucu

$$A = \frac{2}{(m+1)^2}y^2 + k$$

şeklinde A ölçü fonksiyonu elde edilir. Teorem 6.1.1 denkleminden yararlanarak bu alt durum için gerekli hesaplar sonucu elde edilen I ilk integrali k sabit olmak üzere

$$I = -\frac{1}{2}x^2(y^{'})^2 - \frac{\alpha}{m+1}x^2y^{m+1} - \frac{2}{m+1}xyy^{'} - \frac{2}{(m+1)^2}y^2 - k$$

şeklinde olur. Buradan tanım gereği C sabit olmak üzere

$$I = \frac{1}{2}x^2(y^{'})^2 + \frac{\alpha}{m+1}x^2y^{m+1} + \frac{2}{m+1}xyy^{'} + \frac{2}{m+1}xyy^{'} + \frac{2}{(m+1)^2}y^2 = C$$

denklemi yazılarak oluşan bu denklemde

$$y = vx^{-\frac{2}{m+1}}, \quad y^{m+1} = v^{m+1}x^{-2}, \quad y^{'} = v^{'}x^{-\frac{2}{m+1}} - \frac{2}{m+1}x^{\frac{-3-m}{m+1}}v$$

ve

$$y'^2 = v'^2 x \frac{-4}{m+1} + \frac{4}{(m+1)^2} x^{\frac{-6-2m}{m+1}} v^2 - \frac{4}{m+1} v' v x^{\frac{-5-m}{m+1}}$$

ifadeleri yerlerine yazılıp gerekli hesaplar yapılarak

$$\frac{1}{2} x^{\frac{2m-2}{m+1}} (v')^2 + \frac{\alpha}{m+1} v^{m+1} = C$$

olacak şekilde $I = C$ denklemi, v değişmezine göre ifade edilir. Buradan v'

$$v' = \mp\sqrt{-2\alpha(m+1)^{-1} v^{m+1} + C_1} x^{\frac{1-m}{m+1}}$$

şeklinde elde edilir ve değişkenlerine ayırarak integre edilirse bu durum için

$$y'' + \frac{m+3}{m+1} y' + \alpha y^m = 0$$

formundaki Lane-Emden denkleminin çift indirgemesi

$$\int \frac{dv}{\mp\sqrt{-2\alpha(m+1)^{-1} v^{m+1} + C_1}} = \frac{m+1}{2} x^{\frac{2}{m+1}} + C_2$$

şeklinde bulunur. (C_1 ve C_2 integral sabiti)

6. Durum : $f(y) = \alpha \exp(\beta y) + \gamma y + \delta; \alpha, \beta, \gamma$ ve δ birer sabit $\alpha, \beta \neq 0$

Eğer $n = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ ise (6.21) denklemi

$$[\frac{1}{4} a''' x + \frac{1}{2} x^{-1} a' - \frac{1}{2} x^{-2} a - \frac{1}{4} (\frac{a}{x})'] y^2 + [b'' x + b'] y$$

$$+[a + a' x] \frac{\alpha e^{\beta y}}{\beta} + [\frac{1}{2} x a' y - \frac{1}{2} a y + x b] \alpha e^{\beta y} + c' = 0$$

şeklini alır. Bu denklemden

$$y^2 : \frac{1}{4} a''' x + \frac{1}{2} x^{-1} a' - \frac{1}{2} x^{-2} a - \frac{1}{4} (\frac{a}{x})' = 0,$$

$$y^1 : b'' x + b' = 0,$$

$$y^0 : c' = 0,$$

$$\alpha e^{\beta y} : \frac{a}{\beta} + a' x \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2} x a' y - \frac{1}{2} a y + x b = 0 \qquad (6.101)$$

denklem sistemi elde edilir. (6.101) denkleminden aşağıdaki denklemler yazılarak

$$y^0 : \frac{a}{\beta} + a^{'} x \frac{1}{\beta} + xb = 0,$$

$$y : \frac{1}{2} x a^{'} - \frac{1}{2} a = 0$$

ikinci denklemden integral alınarak

$$a = \xi = x$$

ve $a(x)$ ifadesi ilk denklemde yazılarak $b(x) = b = -\frac{2}{\beta}$ şeklinde bulunur. Elde edilen a ve b ifadeleri (6.18) denkleminde yazılarak

$$\eta = -\frac{2}{\beta}$$

şeklinde sonsuz küçükler elde edilir.

Bu durum için Noether simetri üreteci

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{\beta} \frac{\partial}{\partial y}$$

formunu alır. Bu durum için de ikinci Lie nokta operatörü, $Y = x \ln x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{\beta}(1 + \ln x) \frac{\partial}{\partial y}$ şeklindedir.
(6.20) denkleminde $a(x) = x, b(x) = -\frac{2}{\beta}$ ve $c(x) = k$ yazılarak

$$A = k$$

şeklinde ölçü fonksiyonu bulunur. Noether simetri üreteci değişmezi

$$\frac{dx}{x} = -\frac{\beta}{2} dy$$

denkleminin integre edilmesiyle

$$y = \frac{2}{\beta} \ln \left(\frac{v}{x}\right)$$

şeklinde elde edilen çözümdeki v ifadesidir.

Elde edilen η, ξ, A ifadeleri ve bu durum için $L = \frac{1}{2} x (y^{'})^2 - x \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta y}$ şeklinde elde edilen Lagrangian Teorem 6.1.1 deki eşitlikte yazılarak I ilk integrali

$$I = \frac{1}{2} x^2 (y^{'})^2 - x^2 \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta} y - \left(\frac{2}{\beta} + y^{'} x\right) x y^{'} - k$$

şeklinde bulunur. İlk integral tanımından c keyfi sabit olmak üzere

$$I = \frac{1}{2}x^2(y^{'})^2 - x^2\frac{\alpha}{\beta}e^{\beta}y - (\frac{2}{\beta} + y^{'}x)xy^{'} - k = c$$

şeklinde denklem yazılır ve sadeleşmeler yapılarak

$$I = \frac{1}{2}x^2(y^{'})^2 + x^2\frac{\alpha}{\beta}e^{\beta}y + \frac{2}{\beta}xy^{'} = C$$

(C sabit) şeklinde elde edilen denklem v invaryantı türünden gerekli hesaplamalar yapılarak aşağıdaki şekilde yazılır.

$$2x^2(v^{'})^2 + \alpha\beta v^4 - v^2(2 + C\beta^2) = 0$$

Bu son denklem $v^{'}$ ifadesine göre çözülerek oluşan değişkenlerine ayrılabilir denklemin integrasyonu sonucu

$$\int \frac{dv}{\mp v\sqrt{1 - \frac{1}{2}\alpha\beta v^2 + C_1}} = \ln(xC_2)$$

C_1 ve C_2 integral sabitleri olmak üzere bu durum için elde edilen Lane- Emden denkleminin çözümüne ulaşılır. ($y = \frac{2}{\beta}\ln(\frac{v}{x})$)

7 . Durum : $f(y) = \alpha\ln y + \gamma y + \delta, \alpha, \gamma$, δ sabitler ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere

Eğer $n = 0$ ve $\delta = 0$ ise (6.21) denklemi

$$\frac{1}{4}a^{'''}y^2 + b^{''}y + a^{'}\int(\alpha\ln y + \gamma y)dy + (\frac{1}{2}a^{'}y + b)(\alpha\ln y + \gamma y) + c^{'} = 0$$

şeklinde yazılarak integral alınıp gerekli hesaplar yapıldığında

$$(\frac{1}{4}a^{'''} + a^{'}\gamma)y^2 + (b^{''} - a^{'}\alpha + b\gamma)y + \frac{3}{2}a^{'}\alpha y\ln y + b\alpha\ln y + c^{'} = 0 \qquad (6.102)$$

elde edilen (6.102) denkleminden $\ln y$ nin kuvvetlerinin katlarından

$$(\ln y)^0 : (\frac{1}{4}a^{'''} + a^{'}\gamma)y^2 + (b^{''} - a^{'}\alpha + b\gamma)y + c^{'} = 0, \qquad (6.103)$$

$$(\ln y)^1 : \frac{3}{2}\alpha a^{'}y + b\alpha = 0 \qquad (6.104)$$

şeklindeki denklemler yazılarak (6.103) eşitliğinden

$$y^2 : \frac{1}{4}a^{'''} + a^{'}\gamma = 0,$$

$$y^1 : b^{''} - a^{'}\alpha + b\gamma = 0,$$

$$y^0 : c^{'} = 0$$

denklemleri elde edilir. Son eşitlikten $c = c(x) = k$ sabit olduğu görülür.

(6.104) denkleminden

$$y^1 : a^{'} = 0 \implies a = a(x) = C$$

C sabit ve

$$y^0 : b\gamma = 0 \implies b = b(x) = 0$$

şeklinde çözümler elde edilir. Dolayısıyla C sabiti 1 seçilerek $a(x) = \xi = 1$ ve (6.18) eşitliğinden $\eta = 0$ şeklinde elde edilir. (6.20) eşitliğinden ise $A = k$, (k sabit) bulunur. Bu, 2. Durumdaki Noether simetrisine götürür. Bu durum için Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}(y^{'})^2 - \alpha y \ln y + \alpha y - \frac{1}{2}\gamma y^2$$

şeklinde olup, ilk integral

$$I = -\frac{1}{2}(y^{'})^2 - \alpha y \ln y + \alpha y - \frac{1}{2}\gamma y^2 - k$$

şeklinde yazılarak C sabit olmak üzere, $I = C$ denklemi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$I = -\frac{1}{2}(y^{'})^2 - \alpha y \ln y + \alpha y - \frac{1}{2}\gamma y^2 - k = C$$

Oluşan denklem, $-C - k = C_1$ sabit olmak üzere

$$\frac{1}{2}(y^{'})^2 + \alpha y \ln y - \alpha y + \frac{1}{2}\gamma y^2 = C_1$$

$$y^{'} = \mp\sqrt{2C_1 - 2\alpha y(\ln y - 1) - \gamma y^2}$$

şeklinde çözülerek C_2 integral sabiti olmak üzere ,

$$\int \frac{dy}{\mp\sqrt{2C_1 - 2\alpha y(\ln y - 1) - \gamma y^2}} = x + C_2$$

şeklindeki integral ile çözüm elde edilir.

8. Durum: $f(y) = \alpha y \ln y + \gamma y + \delta$,$\alpha$, γ, δ birer sabit ve $\alpha \neq 0$ Eğer $n = 0$ ise (6.21) denklemi

$$\frac{1}{4}a^{'''}y^2 + b^{''}y + a^{'}\int(\alpha y \ln y + \gamma y + \delta)dy + (\frac{1}{2}a^{'}y + b)(\alpha \ln y + \gamma y + \delta y) + c^{'} = 0$$

şeklinde yazılarak integral alınıp gerekli hesaplar yapıldığında $\xi = 1$, $\eta = 0$ ve $A = k$, k sabit elde edilir. Bu durumda, $L = \frac{1}{2}(y^{'})^2 - \frac{1}{2}y^2\alpha\ln y + \frac{1}{4}\alpha y^2 - \frac{1}{2}\gamma y^2 - \delta y$ olmak üzere Teorem 6.1.1 ilk intgral aracılığıyla Lane- Emden denkleminin çözümü C ve C_1 sabitler olmak üzere aşağıdaki şekilde çift indirgemesi bulunur.

$$\int \frac{dy}{\mp\sqrt{(-\gamma - \alpha\ln y + \frac{\alpha}{2})y^2 - 2\delta y + C}} = x + C_1$$

7 SONUÇ VE ÖNERİLER

Adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için uygulanan simetri yöntemleri üzerine literatür araştırması ve incelemesi yapılan bu tez çalışmasında; Lie ve Noether simetri yaklaşımları tanıtılarak Lie simetri metodu uygulanarak kanonik koordinatlar aracılığıyla biri özgün olmak üzere birinci ve ikinci mertebeden non-linear diferansiyel denklemler çözülmüştür. İki simetri üreteci elde edilen 5.5.1 örneğinde simetrilerden biri ile denklem değişkenlerine ayrılabilir hale getirilerek tam çözüme ulaşılmış olması ilginçtir. Buna benzer durum diğer çözümü yapılan denklemlerde de görümektedir. Ayrıca bir diferansiyel denklemin kabul ettiği her simetri grubu ile mertebesinin indirgenebildiği; fakat indirgenmiş denklemin çözümüne her zaman ulaşılmadığı literatürde bilinmekle beraber bu durum örnek 5.5.1 de ikinci üreteç aracılığıyla görülmüştür.

Lie ve Noether simetri grupları, adi diferansiyel denklemlerin mertebelerini indirgemek ve hatta kısmi diferansiyel denklemlerin adi diferansiyel denklemleri dönüştürülmesi için literatürde önemli bir yeri olan yöntemlerdir. Bu metotlar, kısmi türevli diferansiyel denklemler ve bunların çözümler üzerinde yapılan ileri çalışmalarda da kullanılabilmekte dir.

Bu çalışmada aynı zamanda fizikte sistemlerin doğası ve hareketi hakkında fikir veren, Noether teoremi için önemli bir yer teşkil eden varyasyon hesabı sonucu elde edilen Euler-Lagrange denklemi ve Hamilton ilkesi aracılığıyla en az eylem ilkesine dikkat çekilmiştir. Ayrıca Khalique ve arkadaşlarının çalışmış olduğu standart Lagrangıan fonksiyonuna sahip genelleştirilmiş Lane-Emden denkleminin farklı formlarındaki durumları için Noether ayar simetrisi kullanılarak yapılan çözümleri incelenmiştir. Bazı denklemleri kabul eden Lie simetrisi, aynı zamanda Noether simetrisi olduğu, ikinci duruma karşılık gelen bir denklemin örnek 5.5.2 de Lie yöntemiyle çözümü yapılarak yazarların da belirttiği gibi görünmüştür.

Painlave denklemleri gibi birçok ünlü denklemin Noether yöntemiyle elde edilen ilk integralleri literatürden incelenebilir. Bazı denklemlerin standart Lagrangıan'ını belirlemek zor veya imkansız olduğundan kısmi Noether metodu literatürde kullanılan yöntemlerdendir.

Çok parametreli simetri grupları kullanılarak diferansiyel denklemlerin kabul ettiği simetri grubu üreteçleriyle oluşturulan Lie cebri uygulamaları ile denklemlerin çözümü ve indirgemeleri için ileri çalışmalar yapılabilir.

Kaynaklar

[1] Masood C Khalique, Fazal M Mahomed, and Ben Muatjetjeja. Lagrangian formulation of a generalized Lane-Emden equation and double reduction. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 15(2):152–161, 2008.

[2] HT Davis. *İntroduction to Nonlinear Differantial and İntegral Equations*. USA Atomic Energy Commission, 1960.

[3] Abdul-Majid Wazwaz. A new algorithm for solving differential equations of Lane-Emden type. *Applied mathematics and computation*, 118(2-3):287–310, 2001.

[4] Shijun Liao. A new analytic algorithm of Lane–Emden type equations. *Applied Mathematics and Computation, Elsevier*, 142(1):1–16, 2003.

[5] R Singh, N Das, and J Kumar. The optimal modified variational iteration method for the Lane-Emden equations with Neumann and Robin boundary conditions. *The European Physical Journal Plus, Springer*, 132:1–11, 2017.

[6] Cantwel Brian J. *Introduction to symmetry analysis*. Cambridge University Press, New York, 2002.

[7] Özlem Orhan. *Symmetry Group Classification of Some Problems in Mathematical Physics* . İstanbul Technical Universty, Graduate School of Science Engineering and Technology, 2018.

[8] S Lie. Classification und integration von gewöhnlichen differentialgleichungen zwischen xy, die eine gruppe von transformationen gestatten: Die nachstehende arbeit erschien zum ersten male im frühling 1883 im norwegischen archiv. *Mathematische Annalen*, 32:213–281, 1888.

[9] AH Kara, FM Mahomed, Naeem I, and C Wafo Soh. Partial Noether Operators and First Integrals Via Partial Lagrangians. *Mathematical Methods In The Applied Scıences, Wiley online library*, 30(16):2079–2089, 2007.

[10] L Dresner. *Applications of Lie's theory of ordinary and partial differential equations*. CRC Press, 1998.

[11] Jesse Douglas. Solution of the inverse problem of the calculus of variations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 50(1):71–128, 1941.

[12] Kevin W Cassel. *Variational Methods with Appications in Science and Engineering*. Cambridge University Press, 2013.

[13] Stephen T Thornton and Jerry B Marion. *Classical dynamics of particles and systems, 5th Ed.* Cengage Learning, 2021.

[14] Tai L Chow. *Classical mechanics, 2nd Ed.* CRC press, Boca Raton, 2013.

[15] E Balaban. *Pasifliğe Dayalı Kontrol Teknikleri*, (Yüksek Lisans Tezi) İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü , 2005.

[16] A. S Baykal. *Varyasyon Problemlerinin Çözüm Metodları Üzerine*, (Yüksek Lisans Tezi) Bozok Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2016.

[17] Nail H Ibragimov. *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations*, volume 1. CRC press, Boca Raton,1994.

[18] Nail H İbragimov. *Application in Differential Equations and Mathematical Modeling Practical Course, A: Classical and New Methods. Non-Linear Mathematical Models. Principles of Symmetry and Immutability.* World Scientific Publishing Company, 2009.

[19] NH Ibragimov, AH Kara, and FM Mahomed. Lie–Bäcklund and Noether Symmetries with Applications. *Nonlinear Dynamics. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands*, 15:115–136, 1998.

[20] George W. Bluman and Stephen C. Anco . *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*, volume 154. Springer Science & Business Media, New York, 2002.

[21] Abraham Cohen. *An İntroduction to the Lie Theory of One- Parameter Groups :With Aplication to the Solution of Differantial Equation*. DC Health & Company, 1911.

[22] L.V. Ovsyannikov, N.K. Ibragimov, and E.D. Avdonina. *Lectures on the Theory of Group Properties of Differential Equations*. G - Reference,Information and Interdisciplinary Subjects Series. Higher Education Press, 2013.

[23] John B Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra, 7th edition*. Pearson Education, London, 2003.

[24] Thomas W Hungerford. *Algebra*, volume 73. Springer Science & Business Media, New York, 1974.

[25] Serge Lang. *Algebra*, volume 211. Springer Science & Business Media, 2002.

[26] Hans Stephani. *Differential equations: their solution using symmetries*. Cambridge University Press, 1989.

[27] Peter Ellsworth Hydon. *Symmetry methods for differential equations: a beginner's guide*. Number 22. Cambridge University Press, 2000.

[28] Jan L Cieśliński and Tomasz Nikiciuk. A direct approach to the construction of standard and non-standard lagrangians for dissipative-like dynamical systems with variable coefficients. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(17):175205, 2010.

[29] FM Mahomed, AH Kara, and PGL Leach. Lie and Noether counting theorems for one-dimensional systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 178(1):116–129, 1993.