

**T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YAPAY MANYETİK ALAN ETKİSİ ALTINDA FARKLI YÜKLÜ
ATOMİK ÜSTÜN AKIŞKAN KARIŞIMLARININ
ÖZELLİKLERİ**

DOKTORA TEZİ

S. Seyyare AKSU

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

**Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Nader GHAZANFARI
Eş Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet Levent SUBAŞI**

Ağustos 2020

**T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YAPAY MANYETİK ALAN ETKİSİ ALTINDA FARKLI YÜKLÜ
ATOMİK ÜSTÜN AKIŞKAN KARIŞIMLARININ
ÖZELLİKLERİ**

DOKTORA TEZİ

S. Seyyare AKSU

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

**Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Nader GHAZANFARI
Eş Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet Levent SUBAŞI**

Ağustos 2020

Serhan Seyyare Aksu tarafından hazırlanan YAPAY MANYETİK ALAN ETKİSİ ALTINDA FARKLI YÜKLÜ ATOMİK ÜSTÜN AKIŞKAN KARIŞIMLARININ ÖZELLİKLERİ adlı bu tezin doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Fizik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan :

Üye :

Üye :

Üye :

Üye :

Bu tez, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ücret karşılığı başka kişilere yazdırmadığımı (dikte etme dışında), uygulamalarımı yaptırmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

TEŞEKKÜR

Öncelikli olarak doktora tez çalışmam boyunca danışmanlığımı yürüterek bu uzun süreçte her zaman bilimsel bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan, çalışmalarımı yönlendirerek bana kılavuzluk eden ve bu tez çalışmasında çok değerli emekleri olan kıymetli danışman hocalarıma Dr. Öğr. Üyesi Nader Ghazanfari ve Doç. Dr. Ahmet Levent Su-başı'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora tez döneminde projesinde yer almamı sağlayan ve belli bir dönem danışmanlığımı da üstlenen, kendisini aynı zamanda bir bilim kadını olarak da örnek aldığım Prof. Dr. Yamaç Deliduman'a çok teşekkür ederim. Ayrıca MSGSÜ fizik bölümünde tamamladığım doktora çalışmam vesilesiyle MSGSÜ fizik bölümü öğretim üyelerine çok teşekkür ederim. MSGSÜ fizik bölümünde kendilerini tanıma fırsatı yakaladığım, yardıma ihtiyaç duyduğumda desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen tüm değerli bölüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Son olarak çalışmalarım boyunca bana her zaman manevi anlamda destek olan ve güç veren aileme çok teşekkür ederim.

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) 117F469 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Ağustos 2020

S. Seyyare Aksu

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
ŞEKİL LİSTESİ	v
TABLO LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
SUMMARY	xi
1 GİRİŞ	I
2 Aşırı Soğuk Atomlarda Bose-Einstein Yoğuşması	7
2.1 Gross-Pitaevskii Yaklaşımı	7
2.1.1 Thomas Fermi Yaklaşımı	11
2.1.2 Kuantize Dolaşım	12
2.2 Ortalama Alan Ötesinde Bogoliubov Yaklaşımı	13
2.2.1 Bogoliubov Dönüşümü	16
2.3 İki Bileşenli Karışımlarda Faz Ayrışımı	17
2.4 Yapay Manyetik Alan Altında Bose-Einstein Yoğuşuğu	20
3 Halka Potansiyeli ve Manyetik Alan Altında Bose-Einstein Yoğuşuğu	22
3.1 Halka Potansiyelinde Tek Bileşenli Bose-Einstein Yoğuşuğu	23
3.1.1 Yoğuşuk dışı Parçacık Sayısı ve Açısız Momentum	30
3.2 Manyetik Alan Etkisinde İki Bileşenli Bose-Einstein Yoğuşuğu	32
3.2.1 Enerjetik ve Dinamik Kararlılıkların İncelenmesi	38
3.2.2 Açısız Momentum Aktarımı	43
3.2.3 Faz Diyagramı	47
4 Yüklü İki Bileşenli Üstün Akışkanlar Karışımında Faz Ayrışmaları	51
4.1 Yapay Manyetik Alan Altında Bose-Einstein Yoğuşuğu	52
4.2 Thomas Fermi Yaklaşımı	56
4.3 Arayüzey Enerjisi	60
4.3.1 Timmermans'ın Modeli	61
4.3.2 Tanjant Hiperbolik Modeli	63
4.3.3 Bir Tuzak Potansiyeli Altında Arayüzey Enerjisi	66
4.4 Açısız ve Radyal Faz Ayrışmaları	66
4.5 Etkileşimlerin Fonksiyonu olarak Ayrışma Durumları	68

4.5.1	Simetrik Etkileşim Durumu	69
4.5.2	Asimetrik Etkileşim Durumu	71
4.5.3	Faz Diyagramı	73
4.6	İki Bileşenli Yoğuşuğun Dönme Özellikleri	76
4.7	Bölüm içi Sonuçlar	79
5	SONUÇ	81
	KAYNAKLAR	85
A	Bose-Einstein Yoğuşuğu: Rotasyon ve Manyetik Alan Niceliklerinin Karşılaştırılması	96
B	Etkin İki Boyutta İki Bileşenli Bose-Einstein Yoğuşuğu	98
C	Faz Ayrışması - Thomas-Fermi Enerjisi	101



ŞEKİL LİSTESİ

2.1	Işık uyarımlı yapay manyetik alan deney düzeneğini gösteren şekil . . .	21
3.1	Etkileşimsiz durumda manyetik alana göre Gross-Pitaevskii enerjisinindeki değişimi gösteren şekil	26
3.2	Etkileşimli durumda manyetik alana göre Gross-Pitaevskii enerjisinindeki değişimi gösteren şekil	29
3.3	Etkileşim enerjisi-manyetik alan düzleminde sistemin faz diyagramını gösteren şekil	29
3.4	Belli bir etkileşim değerinde manyetik alana göre toplam açısal momentum ve $\pm q$ momentum durumlarına göre toplam uyarılmış parçacık sayısını gösteren şekil	31
3.5	Etkileşimsiz durumda farklı yüklü iki bileşenli karışımın manyetik alana göre Gross-Pitaevskii enerjisindeki değişimi gösteren şekil	37
3.6	Etkileşimsiz durumda eşit yüklü iki bileşenli karışımın manyetik alana göre Gross-Pitaevskii enerjisindeki değişimi gösteren şekil	38
3.7	Manyetik alan yokken etkileşim parametresine göre Bogoliubov enerji spektrumundaki değişimi gösteren şekil	39
3.8	Etkileşim parametreleri düzleminde sistemin dinamik kararlılık koşulunu gösteren şekil	39
3.9	Farklı yüklü karışımın Bogoliubov enerji spektrumunu gösteren şekil	40
3.10	Eşit yüklü ve farklı yüklü karışımların enerjetik kararlılık eğrilerini gösteren şekil	41
3.11	Eşit yüklü ve farklı yüklü karışımların dinamik kararlılık eğrilerini gösteren şekil	42
3.12	Eşit yüklü karışımın toplam açısal momentumu ve toplam uyarılmış parçacıklarının dağılımını gösteren şekil	45
3.13	Farklı yüklü karışımın toplam açısal momentumu ve toplam uyarılmış parçacıklarının dağılımını gösteren şekil	46
3.14	Eşit ve farklı yüklü karışımların faz diyagramını gösteren şekil	48
3.15	Eşit ve farklı yüklü karışımların enerjetik ve dinamik kararlılık eğrilerini gösteren şekil	49
4.1	Ayrışık faz konfigürasyonlarını gösteren şekil	51
4.2	Timmermans modelinin yoğunluk profilini gösteren şekil	62
4.3	Tanjant hiperbolik modelin yoğunluk profilini gösteren şekil	65
4.4	Etkileşim parametrelerine göre \bar{d} parametresinin değişimini gösteren şekil	65
4.5	AFA ve RFA konfigürasyonlarının yoğunluk dağılımını gösteren şekil	67

4.6	AFA ve RFA konfigürasyonlarının Thomas-Fermi ve Gross-Pitaveskii yoğunluk profillerini gösteren şekil	68
4.7	Simetrik etkileşim altında Thomas-Fermi enerjisindeki değişimi gösteren şekil	71
4.8	Asimetrik etkileşimler altında faz ayrışım konfigürasyonlarını bileşenlerin iç etkileşim oranına göre gösteren şekil	72
4.9	Asimetrik etkileşimler altında faz ayrışım konfigürasyonlarını bileşenler arası etkileşim oranına göre gösteren şekil	73
4.10	Timmermans'ın modeline göre sistemin faz diyagramını gösteren şekil	75
4.11	Tanjant hiperbolik modele göre sistemin faz diyagramını gösteren şekil	75
4.12	Corbino geometride yoğunluk dağılımlarını ve hız profillerini gösteren şekil	77
4.13	Disk geometride yoğunluk dağılımlarını ve hız profillerini gösteren şekil	78
4.14	RFA ve AFA konfigürasyonlarının rotasyon parametresine göre açısal momentumlarındaki değişimi gösteren şekil	79



TABLO LİSTESİ

4.1	Gross-Pitaevskii ve Thomas-Fermi enerjilerini disk geometrisinde karşılaştıran tablo	69
4.2	Gross-Pitaevskii ve Thomas-Fermi enerjilerini Corbino $r_0 = 8$ geometrisinde karşılaştıran tablo	70
4.3	Gross-Pitaevskii ve Thomas-Fermi enerjilerini Corbino $r_0 = 12$ geometrisinde karşılaştıran tablo	70
4.4	Timmermans'ın modeli ile tanjant hiperbolik modelin Thomas-Fermi enerjilerini karşılaştıran tablo	76

SEMBOL LİSTESİ

a_s	: s -dalga saçılma uzunluğu
g	: Bağlanma sabiti
Q	: Yapay yük
a_h	: Harmonik salınıcı uzunluğu
g	: Bağlanma sabiti
Q	: Etkin yük
ξ	: Bağdaşım uzunluğu
κ	: Dolaşım sabiti
P	: Basınç
V	: Hacim
M	: Kütle
k_B	: Boltzmann sabiti
T	: Sıcaklık
R	: Halkanın dış yarıçapı
r_0	: Halkanın iç yarıçapı
\mathbf{v}	: Hız alanı
v_θ	: Açısal hız
L_z	: Açısal momentum z -bileşeni
U_a	: Bileşen içi etkileşim
U_b	: Bileşen içi etkileşim
U_{ab}	: Bileşenlerarası etkileşim
γ_0	: Bileşenler içi etkileşim oranı
γ	: Bileşenler arası etkileşim oranı
Φ	: Manyetik akı miktarı
Φ_0	: Manyetik akı kuantası
\mathbf{B}	: Manyetik alan
\mathbf{A}	: Vektör potansiyeli
ω_\perp	: Radyal doğrultuda tuzak frekansı

ω_z	: z -doğrultusunda tuzak frekansı
l_{\perp}	: Radyal doğrultuda karakteristik harmonik salımcı uzunluğu
l_z	: z -doğrultusunda karakteristik harmonik salımcı uzunluğu
Ω_j	: Rotasyon parametresi
R_{TF}	: Thomas-Fermi yarıçapı
l_b	: Arayüzey genişliği
Σ_a	: Boyutsuz bir parametre
A	: Yüzey alanı
d	: Örtüşme sabiti
N_0	: Yoğuşmuş parçacık sayısı
N	: Toplam parçacık sayısı
n	: Yoğuşma yoğunluğu
n_{TF}	: Thomas-Fermi yoğuşma yoğunluğu
l_j	: Bileşenlerin açısal momentumları

**YAPAY MANYETİK ALAN ETKİSİ ALTINDA FARKLI YÜKLÜ
ATOMİK ÜSTÜN AKIŞKAN KARIŞIMLARININ
ÖZELLİKLERİ
(Doktora Tezi)
S. Seyyare AKSU**

**MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ağustos 2020

ÖZET

Seyreltik atomik kuantum gazlar alanında araştırmacıların deneysel olarak elde ettikleri soğutma ve tuzaklama tekniklerindeki ileri düzey gelişmelerle Bose-Einstein yoğunlaşması ilk kez bu sistemler üzerinde deneysel olarak gerçekleştirilmiştir. Bu deneylerde atomlar çeşitli geometrilerde tuzaklanabilmekte ve parçacıklar arası etkileşim çok hassas bir şekilde ayarlanabilmektedir. Bu alanda elde edilen önemli gelişmelerden bir diğeri ise, yapay bir manyetik alan üretimi ve nötr yüklü atomların bu alana bağlanmasıyla Lorentz kuvvetinin etkisinin nötr atomik sistemler üzerinde oluşturulmasıdır. Işık uyarımlı yapay manyetik alanların üretimi, atomların kütle merkezi hareketi dışında iç kuantum durumlarına bağlı olduğundan, farklı iç kuantum durumlarına sahip atomlar ışıkla farklı şekilde bağlanabilecek ve farklı yapay manyetik alanlar görebilecektir. Bu sayede, etkin yüke sahip atomik gazların özelliklerinin geniş bir çerçevede çalışılması olanağı doğmuştur.

Bu tez çalışmasında, etkileşen yüklü Bose-Einstein karışımlarının yapay manyetik alan etkisi altındaki özellikleri farklı tuzak geometrilerinde incelenmiştir. Etkileşimlere ve bileşenlerin yoğunluk dağılımlarına bağlı olarak örtüşük ve ayrışık durumlar dikkate alınmıştır. Örtüşük karışımlarda iki bileşen işgal ettikleri fiziksel uzayda karışık bir biçimde birlikte var olabilirken ayrışık karışımlarda bileşenler farklı uzaysal bölgeleri işgal ederek birbirlerinden ayrışırlar ve aralarında ancak sınır bölgesinde bir etkileşim gerçekleşir.

İki bileşenli Bose gazı karışımında parçacıklar arası etkileşimler aracılığıyla manyetik alanla bağlanmış bir Bose gazı manyetik alanla doğrudan bağlanmayan diğere Bose gazına, Lorentz kuvvetinin etkisini aktarabilir. Bu durumda manyetik kuvvetten dolayı ivmelenen bir gaz, manyetik alanı görmeyen diğere gazı ivmelendirebilir. Böylece üstün akışkanlar durumunda görebileceğimiz gibi iki sistem arasında momentum

aktarımıyla kayıpsız bir sürüklenme olayı ortaya çıkabilir. Bu kapsamda örtüşük durumda, yapay manyetik alan etkisi altında bir boyutlu bir halka tuzak potansiyeli ele alınarak sürüklenme olayı ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bileşenlerarası etkileşimler aracılığıyla gerçekleşebilecek açıl momentum aktarımı ve bunun neticesinde ortaya çıkabilecek girdap endüklenme olayı Bogoliubov yaklaşımı çerçevesinde çalışılmıştır. Ayrıca, girdap aktarımının örtüşük durumda gerçekleştiğini tespit edebilmek için sistemin enerjetik ve dinamik kararlılık koşulları analiz edilmiştir.

Öte yandan, ayrışık durumda itici etkileşimli karışımın açıl ve radyal olarak adlandırılan ayrışma konfigürasyonları ile bu konfigürasyonların rotasyonel özellikleri disk ve Corbino geometrilerinde incelenmiştir. Etkileşimlerin şiddetine ve rotasyon parametresinin büyüklüğüne bağlı olarak sistemin enerji açısından avantajlı olduğu taban durum konfigürasyonu belirlenirken Gross-Pitaevskii ve Thomas-Fermi yaklaşımları karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmanın tutarlı olabilmesi ve Thomas-Fermi yaklaşımı altında doğru konfigürasyonun seçilebilmesi için arayüzey enerjisi yerel yoğunluk yaklaşımı çerçevesinde hesaplanmıştır ve Thomas-Fermi yaklaşımına eklenerek karışımın doğru taban durumu belirlenmiştir. Etkileşimlerin bir fonksiyonu olarak ayrışık faz durumları incelendiğinde konfigürasyonlar arası geçişin bileşenler içi etkileşim simetrisinin kırılmasıyla gerçekleşebildiği gösterilmiştir. Tuzağın geometrisi ise ancak asimetric bir etkileşimin var olduğu durumda faz geçişleri için etkili bir faktör haline gelmektedir. Sistemin etkileşim parametreleri düzleminde faz diyagramı oluşturularak ayrışık durumların enerjetik açıdan avantajlı olduğu bölgeler belirlenmiştir. Ayrışık faz durumunda bileşenlerin yoğunluk dağılımlarındaki farklılık aynı zamanda sistemin rotasyonel özelliklerini de etkileyecektir. Açıl ayrışma durumunda, üstün bir akışkan özelliği olan dolaşım kuantizasyonu özelliği kırılmaktadır ve böylece bileşenlerin artan dönmeye göre açıl momentumu kesikli değil sürekli değerler almaktadır. Buna karşın radyal konfigürasyonda dolaşım kuantizasyon koşulu kırılmadığından bileşenlerin açıl momentum değerleri kesiklidir.

Anahtar Kelimeler: Aşırı soğuk atomik kuantum gazlar, Bose-Einstein yoğunlaşması, İki bileşenli yüklü üstün akışkan karışımları.

Sayfa Adedi: 117 Sayfa.

Tez Yöneticisi: Dr. Öğr. Üyesi Nader GHAZANFARI

Eş Yönetici: Doç. Dr. Ahmet Levent SUBAŞI

**PROPERTIES OF A MIXTURE OF UNEQUALLY CHARGED
ATOMIC SUPERFLUIDS
UNDER A SYNTHETIC MAGNETIC FIELD
(Ph.D. Thesis)
S. Seyyare AKSU**

**MIMAR SINAN FINE ARTS UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
August 2020**

SUMMARY

Thanks to the advanced developments in experimental cooling and trapping techniques in the field of dilute atomic gases, Bose-Einstein condensation has been experimentally observed in these systems. In the experiments, atoms can be trapped in different geometries and inter-particle interactions can be tuned using Feshbach resonances. Another important development in this field is the generation of an artificial magnetic fields. In particular, the effect of Lorentz force on a charged particle can be mimicked by coupling neutral atoms to laser field. Since the generation of light-stimulated artificial magnetic fields depends on internal quantum states of atoms in addition to the center of mass motion, atoms with different internal quantum states will be able to couple differently with light and see different artificial magnetic fields. Thus, the properties of atomic gases with an effective charge have come experimentally accessible.

In this thesis, the properties of interacting charged Bose-Einstein mixtures are investigated in different trap geometries under the influence of an artificial magnetic field. Depending on the interactions and density distribution of the components, spatially overlapping and spatially separated phases are taken into account. In overlapping mixtures, two components can co-exist in a mixed form in the physical space that they occupy, while in phase separated mixtures the components are separated from each other by occupying different spatial regions, and the interaction between them only occurs in the boundary region.

In a charged-uncharged Bose gas mixture, the charged component that is coupled to magnetic field can transfer the effect of the Lorentz force to the other one, which is not coupled to the magnetic field, via the inter-component particle interactions. In this case, a gas accelerated due to the magnetic force can accelerate the other gas that does not see the magnetic field. Thus, a non-dissipative drag between the two systems can occur through momentum transfer as observed in superfluid mixtures. In this context,

the non-dissipative drag was studied in detail by considering a one-dimensional ring trap under the influence of an artificial magnetic field for a miscible mixture. The angular momentum transfer that can occur through intercomponent interactions and the vortex induction that may occur as a result of this has been studied within the Bogoliubov approach. Moreover, the energetic and dynamic stability conditions of the system were analyzed in order to determine the vortex induction.

On the other hand, for immiscible mixtures with repulsive interactions, the so-called azimuthal and radial configurations and the rotational properties of these configurations are investigated in disc and Corbino geometries. We employ Gross-Pitaevskii and Thomas-Fermi approaches and compare them. In order for this comparison to be accurate within the Thomas-Fermi approach, the interface energy has been calculated using local density approximation and the correct ground state configuration of the mixture was determined by adding it to the Thomas-Fermi approach. The ground state configuration depends on the strength of the interactions and the shape of the trapping potential. It has been shown that the transition between the two configurations can occur by breaking the symmetry of intracomponent interactions. The geometry of the trap becomes a relevant factor for the phase transitions only in the case of asymmetric interactions. Phase diagram of the system has been constructed as a function of interaction strengths and energetically favorable configurations have been determined. The difference between the density distribution of the components will also affect the rotational properties of the system. The circulation quantization condition about the common axis, which is a superfluid property, is broken in the azimuthal phase separation, and thus the angular momenta of the components takes continuous rather than discrete values as magnetic field is increased. Since the circulation quantization condition holds in the radial configuration, the angular momenta of the components take discrete values.

Key Words: Ultra cold atomic quantum gases, Bose-Einstein condensation, Two component charged mixtures of superfluid.

Page Number: 117 Pages.

Supervisor: Assist. Prof. Nader GHAZANFARI

Co-Supervisor: Assoc. Prof. Ahmet Levent SUBAŞI

1 GİRİŞ

Bose-Einstein yoğuşması, Bose parçacıklarının sistemin en düşük kuantum durumuna birikmesiyle gerçekleşen bir faz geçişidir. Bu faz geçişinin teorik altyapısı Satyendra N. Bose [1] ve A. Einstein [2] tarafından geliştirilmiştir. Yirminci yüzyılın başlarında öngörülen yoğuşmanın deneysel olarak gerçekleştirilmesi ancak yetmiş yıl sonra mümkün olmuştur. Bose-Einstein yoğuşması ilk kez 1995 yılında ^{87}Rb alkali atomları kullanılarak JILA grubu [5] tarafından, aynı yıl içerisinde ^{23}Na atomları kullanılarak MIT grubu [6] tarafından ve ^7Li atomları kullanılarak RICE grubu [7] tarafından gerçekleştirilmiştir.

Bose-Einstein yoğuşmasının deneysel olarak seyreltik atomik gazlarda gözlemlenmesinin ardında aşırı soğuk atomlar alanında elde edilmiş deneysel başarılar yatmaktadır. Araştırmacılar bu sistemlerin farklı parametreleri üzerinde yüksek kontrole sahiptirler ve özellikle deneyler sırasında bu gazları oluşturan parçacıklar arasındaki etkileşim parametrelerini ve bu gazların geometrisini belirleyen elektromanyetik tuzak potansiyelini hassas bir biçimde ayarlayabilmektedirler. Böylece ayrıntılı bir şekilde çok-parçacıklı sistemlerin mikroskopik özelliklerini kontrol ederek birçok model sistemi inceleme ve araştırma şansı elde edilmiştir [8].

Ultra soğuk atomik gazlarda parçacıklar arası kısa erimli etkileşimler s -dalga saçılma uzunluğu kullanılarak efektif bir noktasal etkileşim potansiyeli ile anlatılmaktadır. Bu etkileşim deneylerde Feshbach rezonansı ile kontrol edilebilmektedir [9], [10]. Böylece deney esnasında etkileşimin şiddetini ve hatta işaretini (etkileşimin çekici veya itici olma durumunu) kontrol edebilme olanağı mevcuttur [11], [12]. Bu sayede Bose yoğuşmalarının etkileşimden kaynaklı farklı özellikleri, yeni madde halleri ve değişik kuantum fazlarının oluşumu ayrıntılı bir biçimde çalışılmıştır [13], [14], [15], [16]. Üstelik tuzak geometrisi üzerinde var olan kontrol sonucunda bu çalışmalar farklı tuzak potansiyellerinde ve farklı uzaysal boyutlarda gerçekleştirilebilmiştir [15].

Atomik sistemler elektriksel olarak nötr yüklü sistemlerdir. Gerçek bir manyetik

alan uygulanarak bu tür sistemler üzerinde Lorentz kuvvetinin etkisi yaratılmadığı gibi ortaya çıkabilecek kuantum etkileri de gözlemlenememektedir. Bu sebeple farklı şekillerde yapay bir manyetik alan üretilerek gerçek bir manyetik alanın sistem üzerindeki etkileri oluşturulabilir. Kullanılan çok yaygın yöntemlerden biri, Coriolis kuvveti ile Lorentz kuvvetinin biçimsel olarak denkleğine dayanır ve atomik gazı döndürerek manyetik alanın etkisi taklit edilir [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23]. Söz konusu denkleğe dayanarak yüksek ilintili sistemlerde kuantum Hall, Hofstadter vb. etkiler dönen gazlar çerçevesinde çalışılmıştır [24], [25], [26], [27], [28] [29]. Bu yöntem bazı deneysel olanakları ortaya çıkarsa da tuzaklama sınırı yüzünden çok yüksek manyetik alan etkilerini çalışma olanağını sağlayamamaktadır. Örneğin, harmonik tuzağın dengesini korumak için bu gazları tuzak frekansından daha hızlı döndürmek mümkün değildir [30], [31].

Yapay manyetik alan üretmek için son zamanlarda kullanılan en yaygın yöntem ise ışık uyarımlı ayar alanı yaratma prensibine dayanır [32], [33], [34], [35], [36]. Deneysel olarak, Raman lazer demetlerinin uygun şekilde kombinasyonları düzenlenerek Bose-Einstein yoğunlaşması üzerine düşürülür ve atomların iç kuantum durumlarının düşürülen fotonlar ile bağlanması sağlanır. Böylece çok soğuk yüksüz atomik sistem için yapay ayar alanı üretilir ve bu aynı zamanda sistem üzerinde yapay bir manyetik alan üretmeye karşılık gelir. Yapay manyetik alanın önemli etkilerinden biri, atomik sistemler üzerinde kuantize girdapların yaratılabilmesidir. Döndürme yoluyla çok soğuk atomik sistemler üzerinde kuantize girdaplar oluşturulabildiği [19], [20], [23], [38], [39], [40], [41] [42], [43] gibi ışık uyarımlı yapay manyetik alan yöntemiyle de atomik sistemler üzerinde döndürme analogisine dayanarak kuantize girdaplar oluşturmak mümkündür [34], [37]. Işık uyarımlı yapay manyetik alan üretimi sayesinde daha önce teorik olarak çalışılmış veya öngörölmüş, başta katıhal fiziği olmak üzere fiziğin çeşitli dallarında deneysel olarak ilginç kuantum fazlarını ve madde hallerini [8], [44], [45], [46], [47] çalışma olanağı yaratılmıştır.

Işık uyarımlı yapay manyetik alanlarının üretimi atomların iç kuantum durumlarına bağlı olduğundan, farklı iç kuantum durumlarına sahip atomlar ışıkla farklı şekilde bağlanacaktır. Dolayısıyla farklı iç kuantum durumlarına sahip atomlar farklı yapay manyetik alan görebilecek hatta bir kısmı manyetik alana maruz kalıp bir kısmı manyetik alanı görmeyebilecektir. Başka bir ifadeyle, farklı etkin yüke sahip atomik

gazlardan söz etmek mümkün olacaktır [48], [49], [50].

Aşırı soğuk atomlardaki deneysel ve teorik gelişmelerin ışığında bu tez çalışmasında farklı tuzak potansiyelleri ele alınarak ışık uyarımlı yapay manyetik alan etkisi altında zayıf etkileşimli, yüklü ve iki bileşenli Bose-Einstein yoğuşuk karışımının özellikleri üzerine odaklanılmıştır.

İki bileşenli atomik Bose gazı karışımları deneysel olarak, JILA ve NIST [51], [52], [53] ile MIT [54], [55] grupları tarafından gerçekleştirilmiştir. İki bileşenli yoğuşuklar farklı alkali atom kombinasyonlarıyla oluşturulabilir. Örneğin, aynı tür alkali atomların farklı kuantum durumları [51], [52], [56], [57], [58], aynı tür alkali atomların farklı izotopları [59], [60] veya farklı alkali atom çiftleri [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67] kullanılarak iki bileşenli yoğuşuk karışımları gerçekleştirilmiştir. Bu sistemler ile ilgili olarak teorik çalışmalarda, ortalama alan yaklaşımı çerçevesinde Gross-Pitaveskii [68], [69], [70], [71], [72] ile Thomas-Fermi yaklaşımları [73], [103], [104], [108] kullanılmıştır. Bu çalışmaların temel amacı, sistemin taban durum özelliklerini belirlemek olmuştur. Ortalama alan ötesinde ise Bogoliubov-de Gennes / Hartree-Fock-Bogoliubov teorileri [74], [75], [76], [77], [78], [79], [80] sistemin özelliklerini belirlemek için kullanılan diğer yöntemlerdir.

Bu tez çalışması, itici etkileşimli ve yüklü Bose-Einstein karışımlarını iki durumda dikkate almaktadır. Bu durumlar, bileşenlerin yoğunluk dağılımlarına göre örtüşük ve ayrışık durumlardır. Örtüşük karışımlarda iki bileşen işgal ettikleri fiziksel uzayda karışık bir biçimde birlikte var olabilirken ayrışık karışımlarda bileşenler farklı uzaysal bölgeleri işgal ederek birbirlerinden ayrışırlar ve aralarında ancak sınır bölgesinde bir etkileşim gerçekleşir. Bu çalışmada, örtüşük durumda bileşenlerarası açısız momentum aktarımı ve bunun sonucunda ortaya çıkabilecek girdap endükleme olayı incelenmiştir. Ayrışık durumda ise, ortaya çıkan farklı konfigürasyonlar, konfigürasyonlar arasında gerçekleşen faz geçişleri ve gazların dönme özellikleri irdelenmiştir.

İki bileşenli Bose gazı karışımında manyetik alana bağlanmış bir Bose gazı, parçacıklar arası etkileşimler aracılığıyla manyetik alanı görmeyen diğer Bose gazına Lorentz kuvvetinin etkisini aktarabilir. Bu durumda manyetik kuvvetten dolayı ivmelenen bir gaz, manyetik alanı görmeyen diğer gazı ivmelendirebilir. Böylece üstün akışkanlar durumunda görebileceğimiz gibi iki sistem arasında momentum aktarımıyla kayıpsız bir sürüklenme olayı ortaya çıkabilir [81] [82]. Işık uyarımlı yapay manyetik alanın

sunduğu yeni olanakları göz önüne alarak aynı tuzak potansiyelinde farklı yüklü üstün akışkanların sürtünmesiz sürüklenme problemi deneysel olarak da ele alınabilir. Bu doğrultuda bu tez çalışmasında, yapay manyetik alan etkisi altında bir boyutta sürüklenme olayı ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Örtüşük üstün akışkan karışımında açısal momentum aktarımını inceleyebilmek amacıyla bir boyutlu bir halka potansiyeli ele alınmıştır. Deneysel olarak halka biçimde tuzak geometrileri yaratılabildiği [83], [84], [85], [86], [87] gibi bu tuzak potansiyeli üzerinde girdap endüksiyonu sıklıkla çalışılan bir alan olmuştur [84], [85], [88], [89], [90], [91], [92], [93], [94], [95], [96]. Halka potansiyeline tuzaklanmış farklı yüklü iki bileşenli Bose karışımının açısal momentum özellikleri Bogoliubov yaklaşımı [97] çerçevesinde ele alınmıştır. Bu yaklaşım, yoğunlaşmayı oluşturan Bose parçacıklarının büyük bir oranının en düşük enerjili kuantum durumuna yoğunlaştığı ve geriye kalan küçük bir kesrin ise yüksek enerjili diğer kuantum durumlarını işgal ettiği varsayımı yapan ortalama alan ötesi bir yaklaşımdır. Dolayısıyla uyarılan parçacıklar tarafından açısal momentumun aktarılabildiği ele alınırsa sistemin açısal momentum özelliklerini inceleyebilmek için Bogoliubov yaklaşımı uygun bir yöntem olacaktır.

Diğer taraftan, ayrışık durumda itici etkileşimli Bose gazı karışımının ayrışma konfigürasyonları ile bu konfigürasyonların rotasyonel özellikleri disk ve Corbino geometrilerinde incelenmiştir. Karışımların ayrışık faz konfigürasyonları, bileşenler içi etkileşimlere ve tuzak potansiyelinin biçimine bağlı olarak araştırılmaktadır [98], [99], [100], [101], [102]. Bu tür sistemlerin mümkün örtüşük ve ayrışık taban durum konfigürasyonları bileşenlerarası etkileşimlere bağlı olarak Thomas-Fermi yaklaşımı altında çalışılmıştır [103], [104]. Ayrıca atomik sistemlerde bileşenler arası etkileşimlerin şiddeti ayarlanarak karışımın örtüşük ve ayrışık durumları arasında geçişi sağlanabilmektedir. Bu tür bir geçiş, dengeli bileşen içi etkileşimler altında döndürme ve manyetik alan etkileri olmadan incelenmiştir [105], [106]. Karışımın taban durum konfigürasyon yapısı, bileşenlerarası etkileşime bağlı olarak tuzak potansiyeli yokken [107], [108] ve bir tuzak potansiyeli varlığında [75], [77], [106] incelenmiştir.

Ayrışık durumda bir karışımın bileşenleri uzaysal olarak birbirlerinden ayrık bölgeleri işgal ettiğinden etkileşimler arayüzeyde gerçekleşecektir. Arayüzey etkileşim enerjisi yerel yoğunluk yaklaşımı kullanılarak [108] hesaplanmıştır. Daha ayrıntılı bir çalışma ise ayrışık konfigürasyonları güçlü ve zayıf olmak üzere iki farklı rejim altında

incelemiştir [105]. Dolayısıyla ayrışık limitte bulunan karışımın arayüzey enerjisi, sınırda farklı yoğunluk profilleri ele alınarak detaylı bir biçimde incelenmiştir [109], [110], [111], [112], [113], [114], [115], [116].

Ayrışık durum konfigürasyonları Gross-Pitaevskii ve Thomas-Fermi yaklaşımı çerçevesinde çalışılmıştır. Thomas-Fermi yaklaşımı ayrışık limit durumunda uygulandığından arayüzey enerjisi yerel yoğunluk yaklaşımı çerçevesinde hesaplanarak ayrıca eklenmiştir. Böylece Gross-Pitaveskii sonuçları ile Thomas-Fermi sonuçları karşılaştırıldığında nitel ve nicel olarak yakın sonuçlar elde edilmiştir.

Ayrışık karışımın iki farklı konfigürasyonu; açısız ve radyal konfigürasyon olarak adlandırılabilir. Sistemin rotasyonel özelliklerinin tercih ettiği taban durum konfigürasyonuna bağlı olarak farklı davranış sergilediği gösterilmiştir. Ayrıca konfigürasyonlar arasındaki geçişler, bileşenler içi ve bileşenler arası etkileşimlerin fonksiyonu olarak detaylı bir biçimde incelenmiştir. Son olarak üstün akışkan davranışı sergileyen bu sistemlerin açısız hız profili hem disk hem de Corbino geometriler üzerinde hesaplanmıştır.

Tezin Planı

Bu tez çalışmasının genel bir planı ve bölümlerin içerikleri aşağıda özetlenmiştir.

Öncelikle Bölüm 2'de zayıf etkileşimli, seyreltik, çok soğuk atomik kuantum gazların fizikini açıklayan temel teoriler anlatılacaktır. Bu modeller, sıfır sıcaklıkta ortalama alan yaklaşıklığı çerçevesinde Gross-Pitaveskii ile ortalama alan ötesi Bogoliubov yaklaşımıdır. Bu metodlar yukarıda ifade edilen söz konusu sistemleri; ışık uyarımlı manyetik alan etkisinde ve bir tuzak potansiyeli altında itici etkileşimli, yüklü, iki bileşenli Bose-Einstein sistemlerini modellemek için kullanılacaktır. Ayrıca bu bölümde iki bileşenli bir karışımın örtüşük ve ayrışık durumlarının oluşma koşulu anlatılacaktır. Son olarak, yapay manyetik alan altında atomik Bose gazı sistemi tasvir edilecektir.

Bölüm 3'te halka potansiyeline tuzaklanan farklı yüklü iki bileşenli Bose-Einstein karışımının açısız momentum özellikleri ve sisteme girdap endükleme koşulları Bogoliubov yaklaşımı çerçevesinde anlatılacaktır. Öncesinde iki bileşenli bir karışımın özelliklerini daha iyi anlayabilmek adına aynı geometri üzerinde ve düzgün bir manyetik alan etkisinde tek bileşenli bir yoğunluğun açısız momentum özellikleri yine aynı çerçevede verilecektir. Bu bölümde eşit yüklü ve farklı yüklü karışımlar için uyarılmış

parçacıklarının momentum durumları üzerine dağılımları arasındaki farklılıklar ve bunun neticesinde ortaya çıkan açısal momentum özellikler detaylı bir şekilde tartışıldıktan sonra, farklı yüklü bir karışım için söz konusu olan açısal momentum aktarımı ve dolayısıyla sürüklenme olayı anlatılacaktır. Ayrıca girdap aktarımının örtüşük durumda gerçekleşebileceğini teyit edebilmek için sistemin enerjetik ve dinamik kararlılık koşulları analiz edilecektir ve sistemin faz diyagramı etkileşim enerjisi-manyetik alan düzleminde oluşturulacaktır.

Bölüm 4'de disk ve Corbino geometrileri ele alınarak itici etkileşimli ve yüklü Bose-Einstein karışımının ayrık durum konfigürasyonları ve bu konfigürasyonların rotasyonel özellikleri Gross-Pitaevskii ve Thomas-Fermi yaklaşımı çerçevesinde anlatılacaktır. Ayrışık limitteki karışımın arayüzey enerjisi, benzer iki farklı arayüzey yaklaşımı kullanılarak hesaplanacaktır. Bu iki yöntem arasında hangisinin daha iyi çalıştığı Gross-Pitaevskii yaklaşımı ile kıyaslanarak bölüm sonunda tartışılacaktır. Etkileşimlerin bir fonksiyonu olarak sistem iki şekilde incelenecektir; dengeli bileşen içi etkileşimlere göre sistemin taban durum olarak hangi konfigürasyonu seçtiği belirlenecektir. Sonrasında bu etkileşimler arası simetrinin kırılmasıyla birlikte konfigürasyonlar arası geçişlerin mümkün olabileceği anlatılıp, etkileşimlerin bir fonksiyonu olarak karışımın ayrışık konfigürasyonları arasındaki mümkün geçişler verilecektir. Ayrıca disk ve Corbino geometrilerinin etkileşimler düzleminde faz diyagramları oluşturulacaktır. Son olarak ayrışık limitteki karışımın hız profili ve açısal momentum özellikleri disk ve Corbino geometrileri ele alınarak hesaplanacaktır.

2 Aşırı Soğuk Atomlarda Bose-Einstein Yoğuşması

Bose-Einstein yoğuşmasının deneysel olarak atomik gaz sistemlerinde gözlemlenmesiyle [5], [6], [17] [51], birlikte bu tip kuantum gazlarının teorisi geniş bir çerçevede incelenmiştir [117], [118], [119], [120], [121], [122], [123], [124], [125]. Bu bölümde sıfır sıcaklıkta seyreltik ve zayıf etkileşimli Bose-Einstein yoğuşmasını tasvir eden temel teorik metodlar anlatılacaktır. İlk olarak, sistemin taban durum özellikleri ortalama alan yaklaşıklığı çerçevesinde Gross-Pitaevskii denklemi ile verilecektir. Ortalama alan yaklaşımı ötesinde sıfır sıcaklık lineer uyarılmaları, Bogoliubov yaklaşımı çerçevesinde anlatılacaktır. İki bileşenden oluşan yoğuşuk karışımları için Gross-Pitaveskii denklem çifti ve bu karışımların örtüşük ve ayrışık durumları ifade edilecektir. Son olarak bu tezin temel unsurunu oluşturan yapay manyetik alan altında sistemin Hamiltonyeni tasvir edilecektir.

2.1 Gross-Pitaevskii Yaklaşımı

Sıfır sıcaklıkta, etkileşimli ve seyrek bozonik gazların teorisini açıklayan en temel yaklaşım Gross-Pitaevskii yaklaşıklığıdır. Çok parçacıklı sistem Hamiltonyeni aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \\ &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V_{\text{etk}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Burada $V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r})$, tuzak potansiyelini temsil eder, $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ ve $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$ bozonik kuantum alan operatörleridir ve aralarında eş zamanlı komütasyon ilişkisi geçerlidir.

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.2)$$

$$[\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t)] = 0 \quad (2.3)$$

Etkileşimler, parçacıkların birbirleriyle ikili etkileşimleri üzerinden tanımlanabilir. Bozonlar arasındaki ikili etkileşimler eşyönlü, radyal simetrik bir potansiyel aracılığıyla

gerçekleşir. Bu potansiyel $V_{\text{etk}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ sadece parçacıklar arası mesafeye bağlıdır. Yeterince düşük sıcaklıklarda atomik çarpışmalar, nokta parçacıkların birbirleriyle elastik olarak kafa kafaya çarpışmaları gibi ele alınabilir. Yoğuşma yoğunluğu, birim hacim başına parçacık sayısı $n = N/V$ ile tanımlanır ve saçılma uzunluğu a_s ile ifade edilir. Söz konusu düşük yoğunluklarda,

$$na_s^3 \ll 1 \quad (2.4)$$

geçerlidir. Dolayısıyla yukarıda ifade edilen limit durumu altında etkileşim potansiyeli uygun bir noktasal temas etkileşim potansiyeli ile ifade edilebilir.

$$V_{\text{etk}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.5)$$

Burada bağlanma sabiti g , saçılma uzunluğu ile doğru orantılıdır. Böylece etkileşimler tek bir parametre ile ifade edilebilir.

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{M}a_s \quad (2.6)$$

Denklem (2.5) ile tanımlanan noktasal etkileşim potansiyeli kullanıldığında denklem (2.1) ile ifade edilen Hamiltonyen aşağıdaki biçimi alır.

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r}\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{h}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r}\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad (2.7)$$

Burada $\hat{h}(\mathbf{r})$ tek parçacık Hamiltonyenini belirtmektedir.

$$\hat{h}(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

Bu aşamada $\hat{\Psi}$ bozonik kuantum alan operatörü için Heisenberg hareket denklemini tanımlayalım.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H}] \quad (2.9)$$

Denklem (2.7) ile verilen Hamiltonyen, Heisenberg hareket denkleminde yerine yazıldığında alan operatörüne ait hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) \right]\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) + g\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad (2.10)$$

Yoğuşma durumunda bozonik kuantum alan operatörü iki ayrı parçanın toplamıyla tanımlanabilir.

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle + \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) + \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \quad (2.11)$$

Bozonik alan operatörünün beklenen değeri üzerinden tanımlanan ilk parça $\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \phi(\mathbf{r}, t)$, klasik bir alana karşılık gelir ve yoğunluk dalgası fonksiyonunu temsil eder. İkinci parça ise ortalama etrafındaki dalgalanmaları veren yoğunluk dışı kuantum alan operatörüdür $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$. Burada önemli olan nokta, $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ alan operatörünün ortalama dışındaki operatör özelliklerinin $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ yoğunluk dışı alan operatörü tarafından temsil edilmesidir. Sıfır sıcaklıkta dalgalanmaların çok küçük olduğu varsayımı altında bozonik kuantum alan operatörü sadece klasik alan üzerinden tanımlanabilir $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t)$. Bu yaklaşıklıkla sıfıncı derece hareket denklemi yoğunluk dalgası fonksiyonu ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) + g|\phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.12)$$

Bu denklem, zamana bağlı Gross-Pitaevskii (GP) denklemi olarak bilinir [3], [4]. GP denklemi $\phi(\mathbf{r}, t)$ klasik alanın sağladığı lineer olmayan Schrödinger denklemdir. GP denkleminde lineerliği bozan terim ise $g|\phi(\mathbf{r}, t)|^2$ etkileşim potansiyelidir.

Yoğunluk dalgası fonksiyonu kompleks değerli klasik bir alandır. Yoğunluk yoğunluğu, bu makroskobik dalgası fonksiyonunun norm karesi üzerinden tanımlanır ve toplam yoğunlaşmış parçacık sayısı ise söz konusu yoğunluğun konum üzerinden integrali ile verilir.

$$n(\mathbf{r}, t) = |\phi(\mathbf{r}, t)|^2, \quad \Rightarrow \quad N_0 = \int d^3\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (2.13)$$

Yoğunlaşma oranı N_0/N olarak tanımlanmaktadır. Geri kalan parçacıklar yoğunluk dışındaki normal yoğunluğu oluşturur.

Durağan Çözüm

Zamana bağlı GP denkleminin durağan çözümü, konum bağımlı ve zaman bağımlı iki ayrı parçanın çarpımı ile ifade edilebilir.

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) e^{-i\mu t/\hbar} \quad (2.14)$$

Burada μ kimyasal potansiyeldir. Bu çözümün denklem (2.12) ile ifade edilen zamana bağlı GP denkleminde yerine yazılmasıyla zamandan bağımsız Gross-Pitaevskii denklemi elde edilir.

$$\mu\phi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) + g|\phi(\mathbf{r})|^2 \right] \phi(\mathbf{r}) \quad (2.15)$$

Zamandan bağımsız GP denklemini yoğuşmanın enerji fonksiyoneli üzerinden de belirlemek mümkündür. GP denklemi, μ Lagrangian çarpanı ve $E[\phi(\mathbf{r})]$ enerji fonksiyoneli olmak üzere tam yoğuşma durumunda $E - \mu N_0$ ifadesinin ϕ^* fonksiyonuna göre varyasyonel minimizasyonu ile aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\frac{\delta}{\delta\phi^*} (E[\phi] - \mu N_0[\phi]) = 0 \quad (2.16)$$

Yoğuşmanın enerji fonksiyoneli,

$$E[\phi(\mathbf{r})] = \int d^3\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\phi(\mathbf{r})|^2 + V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}g|\phi(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (2.17)$$

olarak tanımlanmıştır.

Bir etkileşimli yoğuşuğun çoğu taban durumu özelliğini GP denklemini çözerek elde edebiliriz. Sistemin temel uyarılmaları veya dönme özellikleri GP denkleminin analitik incelemesiyle anlaşılabilir. Ancak lineer olmadığından bu denklemin genel çözümlerini elde etmek için sayısal yöntemler kullanmak gerekir. Ayrıca, bazı limit durumlarda analitik çözüm elde etmek de mümkündür.

Harmonik Salıncı Potansiyeli

Bu kısımda zamandan bağımsız GP denkleminin çözümü etkileşimsiz durumda, $g = 0$, ve harmonik salıncı tuzak potansiyeli altında incelenecektir. Denklem (2.15) ile verilen zamandan bağımsız GP denklemi etkileşimler ihmal edildiğinde aşağıdaki gibi Schrödinger denklemine indirgenebilir.

$$\mu\phi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) \right] \phi(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

En genel durumu ifade etmek için, üç doğrultudaki tuzak frekansları birbirinden farklı olacak şekilde seçilirse, $\omega_x \neq \omega_y \neq \omega_z$, eşyönlü olmayan harmonik salıncı potansiyeli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M\omega_x^2x^2 + \frac{1}{2}M\omega_y^2y^2 + \frac{1}{2}M\omega_z^2z^2 \quad (2.19)$$

Böylece, yoğuşmasının taban durumu Gaussian yoğunluk profili ile tanımlanabilir.

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \sqrt{\frac{N_0}{a_x a_y a_z}} e^{-x^2/2a_x^2} e^{-y^2/2a_y^2} e^{-z^2/2a_z^2} \quad (2.20)$$

Burada $a_i = \sqrt{\hbar^2/M\omega_i}$ dalga fonksiyonun üç doğrultudaki genişliğini belirten büyüklüktür. Yukarıda ifade edilen taban durumu, etkileşimsiz durumda ve harmonik salıncı potansiyeli altında zamandan bağımsız GP denkleminin tek parçacık düzeyindeki temel çözümünü belirtir.

2.1.1 Thomas Fermi Yaklaşımı

Parçacık sayısının çok yüksek olduğu durumda etkileşimler ihmal edilemez hale gelir. Fakat, harmonik tuzak potansiyeli altında zamandan bağımsız GP denkleminin basit bir çözümü kinetik enerji teriminin ihmal edildiği Thomas-Fermi yaklaşıklığı altında incelenebilir. Bunun için öncelikle sistemin toplam enerjisini parça parça olarak inceleyelim. Sistemin toplam enerjisi; kinetik enerji, potansiyel enerji ve etkileşim enerjisi olarak üç ayrı parçaya ayrılır $E_{\text{top}} = E_k + E_p + E_e$. Her bir terimin katkısı aşağıda gibi ifade edilebilir.

$$E_k \approx \frac{\hbar^2}{MR^2} = \frac{\hbar\omega_h}{R_0^2} \quad (2.21)$$

$$E_p \approx m\omega_h^2 R^2 = \hbar\omega_h R_0^2 \quad (2.22)$$

$$E_e \approx gn(R) = \frac{\hbar\omega_h}{R_0^3} \left(\frac{N_0 a_s}{a_h} \right) \quad (2.23)$$

Burada $R_0 = R/a_h$, yoğuşuğun yarıçapıdır, $a_h = \sqrt{\hbar^2/M\omega_h}$ ise harmonik salınıcı uzunluğudur. Böylece toplam enerji,

$$E_{\text{top}} \approx \langle E_k + E_p + \frac{1}{2}E_e \rangle = N_0 \hbar\omega_h (R_0^{-2} + R_0^2 + \lambda R_0^{-3}) \quad (2.24)$$

olarak elde edilir. Burada $\lambda = \frac{N_0 a_s}{a_h}$, boyutsuz bir parametredir. Thomas-Fermi yaklaşıklığının geçerliliği bu boyutsuz parametrenin birden çok büyük olduğu durum, yani $\lambda = N_0 a_s/a_h \gg 1$ ile tanımlanabilir. Örneğin, üç boyutlu bir yoğuşuğu dik-kate aldığımızda, parçacık sayısı $N_0 \approx 10^5$, $a_s \approx 5nm$ ve $a_h \approx 1\mu m$ olmak üzere $N_0 a_s/a_h \approx 500$ olarak elde edilir. Burada etkileşim enerji terimi ile kinetik enerji terimi kıyaslandığında, $E_e \gg E_k$ olduğundan Thomas-Fermi yaklaşıklığı altında kinetik enerji teriminin katkısı etkileşim enerjisinin yanında ihmal edilebilir. Özetle, Thomas-Fermi yaklaşıklığı, güçlü etkileşim ve yüksek parçacık sayısı $N_0 \gg 1$ limitinde geçerlidir.

Thomas-Fermi yaklaşıklığı altında denklem (2.15) ile ifade edilen zamandan bağımsız GP denklemini aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$[V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) + g|\phi(\mathbf{r})|^2]\phi(\mathbf{r}) = \mu\phi(\mathbf{r}) \quad (2.25)$$

Yoğuşma yoğunluğu ise,

$$n(\mathbf{r}) = \frac{\mu - V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r})}{g} \Theta(\mu - V_{\text{tuzak}}) \quad (2.26)$$

ile ifade edilir. Burada $\Theta(x)$ basamak fonksiyonu olarak tanımlanır. Bir önceki kısımda denklem (2.19) ile ifade edilen harmonik salıncı tuzak potansiyeli altında Thomas-Fermi yoğunlukları aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$n(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{g} \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) \quad (2.27)$$

Thomas-Fermi yarıçapları, $R_i = \sqrt{2\mu/M\omega_i^2}$, yoğunlaşma yoğunluğunun sıfıra gittiği noktalar olarak tanımlanır.

Ayrıca, TF yaklaşımından bağımsız olarak, burada yoğunlaşmanın önemli karakteristik parametrelerinden biri olan ξ , bağdaşım uzunluğunu tanımlayabiliriz. Bağdaşım uzunluğu kinetik enerji ile etkileşim enerjisinin dengeye geldiği noktada aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\hbar^2}{2M\xi^2} \approx gn \Rightarrow \xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2Mgn}} \quad (2.28)$$

Bu uzunluk yoğunlaşmanın bir tedirgeme karşısında kendini yineleme uzunluğu olarak görülebilir.

2.1.2 Kuantize Dolaşım

Yoğunlaşma dalga fonksiyonu, yoğunlaşma yoğunluğu $n(\mathbf{r}, t)$ ve yoğunlaşma fazı $\varphi(\mathbf{r}, t)$ cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)} \quad (2.29)$$

Bu ifade, yoğunlaşmanın akım yoğunluğu

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{i\hbar}{2M} (\phi \nabla \phi^* - \phi^* \nabla \phi) \quad (2.30)$$

tanımında yerine koyulduğunda yoğunlaşma için hız alanının yoğunlaşma fazının gradyenti ile ilişkili olduğu sonucu elde edilir.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{M} \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (2.31)$$

Buradan elde edilen bu önemli sonuç hız alanının irrotasyonel olmasıdır, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Fazda bir tekillik oluşmadığı takdirde yoğunlaşmanın dönmeyen bir akışkan olduğunu belirtir. Böyle bir tekillik yoğunluğun sıfıra gittiği noktalarda girdap şeklinde ortaya çıkar.

Yoğuşuğun çevresinde kapalı bir C eğrisi seçelim. Yoğuşma dalga fonksiyonunun tek değerli olma koşulundan dolayı kapalı C eğrisi üzerinde yoğuşma fazındaki değişim $\Delta\varphi$, 2π değerinin tam katları şeklinde kuantize olmalıdır. Eğri üzerinde dolaşım,

$$\kappa = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\ell = 2\pi q, \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{h}{M}q, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.32)$$

olarak ifade edilir. Burada q tamsayıdır; $q = 0$ değeri dönmeyen bir yoğuşmadır, $q \neq 0$ değerlerinde ise kapalı C eğrisi içerisinde girdap oluştuğu anlamına gelir. Yoğuşma çevresinde bir dolaşım κ , sabit h/M değerinin katları şeklinde kuantizedir ve bu sonuç, tekil noktayı içerdigi sürece seçilen kapalı C eğrisinin yarıçapından bağımsızdır.

2.2 Ortalama Alan Ötesinde Bogoliubov Yaklaşımı

Etkileşimli atomik gazlarda Bose-Einstein yoğuşması, toplam parçacık sayısının, makroskobik büyüklükteki bir kesrinin en düşük enerjili taban durumuna yoğuştuğu ve geri kalan küçük bir kesrin ise yüksek enerjili diğer kuantum durumlarını işgal ettiği bir rejimdir. Bu bölümde zayıfça etkileşen homojen ($V_{\text{uzak}}(\mathbf{r}) = 0$) bir Bose gazı için ortalama etrafındaki küçük dalgalanmalar incelenecektir. Bozonik alan operatörleri cinsinden denklem (2.7) ile verilen Hamiltonyen aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \left(\frac{\hbar^2}{2M} \nabla \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \nabla \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right) + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (2.33)$$

Homojen durumda bozonik alan operatörleri düzlem dalga tabanında yazılabilir. Sırasıyla bozonik yok etme $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ ve yaratma alan operatörleri $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ aşağıdaki gibi düzlem dalga tabanında açılır.

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \quad (2.34)$$

Burada $a_{\mathbf{k}}$ ve $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ operatörleri; \mathbf{k} değerli momentum durumunda bir parçacık yok eden ve bir parçacık yaratan bozonik operatörlerdir. Bozonik operatörlerin sağladığı bozonik komütasyon ilişkisi şu şekilde verilir.

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (2.35)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad (2.36)$$

Düzlem dalga tabanında denklem (2.34) ile tanımlanan alan operatörleri (2.33) denkleminde yerine yazıldığında momentum uzayında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_3} \hat{a}_{\mathbf{k}_4} \quad (2.37)$$

Burada $\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}^2}{2M}$ ile tanımlanır. Hamiltonyende ilk terim kinetik enerjiyi ikinci terim ise etkileşimleri temsil etmektedir. Bozon gazının en düşük enerjili taban durumu (yoğuşma durumu) $\mathbf{k} = 0$ momentum durumudur. Böylece, $\mathbf{k} \neq 0$ durumları yoğuşma dışı momentum durumlarıdır veya uyarılmış durumlara karşılık gelir. Etkileşimler iki parçacık etkileşimlerine dayandığından yoğuşma durumundaki iki parçacık etkileşimler aracılığıyla yoğuşuk dışındaki $\pm\mathbf{k} \neq 0$ momentum durumlarına saçılabilir.

Toplam parçacık sayısı N , yoğuşma durumundaki parçacık sayısı N_0 ve uyarılmış durumların parçacık sayısı N_e olmak üzere iki katkının toplamı ile yazılabilir ve aşağıda bozonik operatörleri cinsinden ifade edilirler.

$$N = N_0 + N_e = N_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}} \right) \quad (2.38)$$

Yukarıda da ifade edildiği üzere Bogoliubov yaklaşıklığı altında yoğuşma durumunun operatörleri $a_{\mathbf{k}=0}, a_{\mathbf{k}=0}^\dagger$ toplam yoğuşuk parçacık sayısı ile yer değiştirebilir.

$$a_0, a_0^\dagger \rightarrow \sqrt{N_0} \quad (2.39)$$

Kinetik enerji ve etkileşim terimlerini taban durum ve uyarılmış durumlar olmak üzere yeniden ifade edelim. Öncelikle kinetik enerji kısmı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\hat{H}_{\text{kin}} = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \epsilon_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}} \right) \quad (2.40)$$

Etkileşim Hamiltonyeni yeniden düzenlenirken parçacıkların ikili etkileşimlerini göz önünde bulundurularak momentum korunumuna dikkat edilmelidir. Denklem (2.37) Hamiltonyeni için mümkün durumlar aşağıda sıralanmıştır.

- Yoğuşma içindeki iki parçacığın etkileşimi ve Hamiltonyene katkısı:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4 = 0$$

$$\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 = N_0^2 \quad (2.41)$$

- Yoğuşma içindeki bir parçacık ile yoğuşma dışı bir parçacığın etkileşimi mümkün dört farklı durum üzerinden tanımlanır; sırasıyla etkileşimler ve Hamiltonyene katkıları:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3 = 0, \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_4; \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_4 = 0, \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_4 = 0, \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3; \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 = 0, \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_4$$

$$4\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} = 2N_0 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}} \right) \quad (2.42)$$

- Etkileşimlerden dolayı yoğuşma içindeki iki parçacık yoğuşma dışına saçılabilir veya yoğuşma dışındaki iki parçacık yoğuşma içerisine düşebilir. Mümkün farklı durumlar ve oluşturdıkları toplam katkı:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = 0; \mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_4 \text{ ve } \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4 = 0; \mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$$

$$\sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 \right) = N_0 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right) \quad (2.43)$$

İkili etkileşimler altında mümkün tüm durumlardan etkileşim Hamiltonyenine gelecek olan toplam katkı yoğuşuk parçacık sayısının N_0 en yüksek iki kuvveti cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\hat{H}_{\text{etk}} \simeq \frac{gN_0^2}{2V} + \frac{gN_0}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}} \right) + \frac{gN_0}{2V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right) \quad (2.44)$$

Bu seviyede toplam Hamiltonyen yoğuşuk parçacık sayısı N_0 ile ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{gN_0^2}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \epsilon_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}} \right) + \frac{gN_0}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}} \right) \\ &+ \frac{gN_0}{2V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Bogoliubov yaklaşıklığı altında denklem (2.38) ile tanımlanan toplam parçacık sayısının ikinci meretebeye kadar olan terimleri alınır ve üst mertebedeki terimlerinin katkıları ihmal edilir. Örneğin, $\left(\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right)^2$ gibi terimlerin katkıları ihmal edilir.

$$N_0^2 \approx N^2 - N \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}} \right) \quad (2.46)$$

Kinetik enerji ile etkileşimlerden gelen katkılarla birlikte Hamiltonyen toplam parçacık sayısı kullanılarak yeniden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\hat{H} = \frac{gN^2}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[(\epsilon_{\mathbf{k}} + gn) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}} \right) + gn \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right) \right] \quad (2.47)$$

Toplam parçacık yoğunluğu $n = N/V$ ile tanımlanmıştır. Yukarıda belirtilen Hamiltonyen, $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger$ operatörleri cinsinden kuadratik formda bir Hamiltonyendir. Kuadratik yapıdaki bir Hamiltonyen kanonik bir dönüşüm altında köşegenleştirilebilir. Burada bu kanonik dönüşüm Bogoliubov dönüşümü olarak bilinir.

2.2.1 Bogoliubov Dönüşümü

Bir önceki kısımda denklem (2.47) ile ifade edilen Hamiltonyen Bogoliubov dönüşümü olarak bilinen bir kanonik dönüşümle köşegenleştirilebilir. Kanonik dönüşüm, yok etme ve yaratma operatörlerinin lineer bir kombinasyonu ile tanımlanır.

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}}\hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}, \quad \hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger} = u_{\mathbf{k}}\hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}^{\dagger} - v_{\mathbf{k}}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}} \quad (2.48)$$

Burada parçacığımsı fazı uygun şekilde ayarlanarak $(u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}})$ reel seçilebilir, $\alpha_{\mathbf{k}}$ ve $\alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ bozonik parçacığımsı yok etme ve yaratma operatörleridir. Kanonik dönüşümün tanımı gereği yeni tanımlanan bozonik parçacığımsı operatörler bozonik komütasyon ilişkisini sağlarlar.

$$[\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}, \hat{\alpha}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad [\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^{(\dagger)}, \hat{\alpha}_{\mathbf{k}'}^{(\dagger)}] = 0 \quad (2.49)$$

Yukarıda ifade edilen komütasyon ilişkisi $(u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}})$ katsayıları üzerinde bir kısıtlama oluşturur. Bu kısıtlama aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2 = 1 \quad (2.50)$$

Denklem (2.48) ile tanımlanan dönüşüm denklem (2.47)'de yerine yazıldığında Hamiltonyen yeni operatörler cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2}gn^2V + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [(\epsilon_{\mathbf{k}} + gn)v_{\mathbf{k}}^2 - gnu_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [(\epsilon_{\mathbf{k}} + gn)(u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2) - 2gnu_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}] (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}} + \hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [gn(u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2) - 2(\epsilon_{\mathbf{k}} + gn)u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}] (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}\hat{\alpha}_{-\mathbf{k}} + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Hamiltonyen matris formatında yazıldığında son satır köşegen olmayan terimlere denk gelirken ikinci satır ise köşegen üzerindeki terimleri belirtir. Bu aşamada köşegen olmayan terimlerin katsayısı sifıra eşitlenebilir ve böylece $(u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}})$ katsayıları seçilebilir.

$$gn(u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2) - 2(\epsilon_{\mathbf{k}} + gn)u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} = 0 \quad (2.52)$$

Bu eşitlik neticesinde $(u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}})$ katsayıları şu şekilde belirlenir.

$$(u_{\mathbf{k}}^2, v_{\mathbf{k}}^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}} + gn}{E_{\mathbf{k}}} \pm 1 \right) \quad (2.53)$$

Belirlenen katsayıların Hamiltonyende yerine yazılmasıyla,

$$\hat{H} = E_{TD} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} E_{\mathbf{k}} \left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}} + \hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{\alpha}_{-\mathbf{k}} \right) \quad (2.54)$$

köşegen formdaki Hamiltonyen elde edilir. Bu Hamiltonyen Bogoliubov Hamiltonyeni olarak bilinir. Burada $E_{\mathbf{k}}$ parçacığımsı enerji değerleri, bilinen Bogoliubov spektrumunu verir.

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}} (\epsilon_{\mathbf{k}} + 2gn)} \quad (2.55)$$

Sistemin taban durum enerjisi ise,

$$E_{TD} = \frac{1}{2} gn^2 V - \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\epsilon_{\mathbf{k}} + gn - E_{\mathbf{k}}) \quad (2.56)$$

olarak elde edilir.

Başlangıçta birbirleriyle etkileşim halinde bulunan $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ parçacık operatörlerinin tanımladığı Hamiltonyen, Bogoliubov dönüşümü sonrasında $\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ parçacığımsı operatörlerin tanımladığı etkileşimsiz ve köşegen formda bir Hamiltonyene dönüşür.

2.3 İki Bileşenli Karışımlarda Faz Ayrışımı

Gazların yoğunluk dağılımı göz önünde bulundurulduğunda, iki bileşenli Bose gazı karışımı için iki farklı faz durumu mevcuttur. Bunlardan biri, bileşenlerin işgal ettiği fiziksel uzayda iç içe geçtikleri *örtüşük* faz durumudur. Diğer faz durumu ise, bileşenlerin işgal ettikleri fiziksel uzayda birbirlerinden ayrıldıkları, birinin işgal ettiği bölgede diğer bileşenin yoğunluğunun sıfıra gittiği *ayrışık* faz durumudur. Bu bölümde örtüşük ve ayrışık faz durumlarının oluşum şartı incelenecektir.

İki bileşenden oluşan karışımlar, GP denklem çifti ile ifade edilmektedir. İki bileşenli bir sistemde, bileşenlerin kendi içlerindeki etkileşimlerine ek olarak birbirleriyle olan karşılıklı etkileşimleri de dikkate alınmalıdır. Bu terim, GP denklemlerinde yeni bir etkileşim terimi olarak ifade edilir ve denklemleri birbirine bağlar. Bileşenleri temsil eden yoğunluk dalgası fonksiyonlarını $\phi_1(\mathbf{r}, t)$ ve $\phi_2(\mathbf{r}, t)$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$i\hbar \frac{\partial \phi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M_1} + V_1(\mathbf{r}) + g_{11} |\phi_1(\mathbf{r}, t)|^2 + g_{12} |\phi_2(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \phi_1(\mathbf{r}, t) \quad (2.57)$$

$$i\hbar \frac{\partial \phi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M_2} + V_2(\mathbf{r}) + g_{22} |\phi_2(\mathbf{r}, t)|^2 + g_{12} |\phi_1(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \phi_2(\mathbf{r}, t) \quad (2.58)$$

yukarıda ifade edildiği üzere iki bileşenli yoğunluğun zamana bağlı çiftlenmiş GP denklemleri verilir. Yoğuşuk karışımı $g_{ij}|\phi_i(\mathbf{r})|^2\phi_j(\mathbf{r})$ terimi aracılığıyla bileşenleri birbirlerine bağlar. Burada M_1, M_2 bileşenlerin kütlelerini temsil eder, $V_1(\mathbf{r})$ ve $V_2(\mathbf{r})$ tuzak potansiyellerini belirtir, g_{11} ve g_{22} bileşenlerin içsel etkileşim enerjilerini ve $g_{12} = g_{21}$ bileşenlerin karşılıklı etkileşim enerjilerini gösterir. Üç boyutta etkileşim enerjileri saçılma uzunlukları cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$g_{ii}^{3D} = \frac{4\pi\hbar^2}{M_i} a_s^{(ii)}, \quad g_{12}^{3D} = 2\pi\hbar^2 \left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} \right) a_s^{(12)}, \quad i = 1, 2 \quad (2.59)$$

Zamana bağlı GP denklem çifti için durağan çözümler önerildiğinde $\phi_i(\mathbf{r}, t) = \phi_i(\mathbf{r}) e^{-i\mu_i t/\hbar}$, aşağıdaki gibi zamandan bağımsız GP denklem çifti elde edilir.

$$\mu_1 \phi_1(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M_1} + V_1(\mathbf{r}) + g_{11}|\phi_1(\mathbf{r})|^2 + g_{12}|\phi_2(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_1(\mathbf{r}) \quad (2.60)$$

$$\mu_2 \phi_2(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M_2} + V_2(\mathbf{r}) + g_{22}|\phi_2(\mathbf{r})|^2 + g_{12}|\phi_1(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_2(\mathbf{r}) \quad (2.61)$$

Sistemin enerji fonksiyoneli,

$$\begin{aligned} E[\phi_1, \phi_2] &= \int \left(\frac{\hbar^2}{2M_1} |\nabla \phi_1(\mathbf{r})|^2 + V_1(\mathbf{r}) |\phi_1(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} g_{11} |\phi_1(\mathbf{r})|^4 \right) d\mathbf{r} \\ &+ \int \left(\frac{\hbar^2}{2M_2} |\nabla \phi_2(\mathbf{r})|^2 + V_2(\mathbf{r}) |\phi_2(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} g_{22} |\phi_2(\mathbf{r})|^4 \right) d\mathbf{r} \\ &+ \int g_{12} |\phi_1(\mathbf{r})|^2 |\phi_2(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.62)$$

tanımlanır ve her bir bileşenin toplam parçacık sayısı N_1 ve N_2 ile gösterilir.

$$N_i = \int |\phi_i(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \quad (2.63)$$

Örtüşük ve ayrışık durumlarının oluşma koşulunu incelemek için yukarıda anlattığımız iki bileşenli sistemi daha basit hale getirmek yararlı olacaktır. İki bileşenli Bose gazı karışımının toplam parçacık sayıları N_1 ve N_2 olmak üzere bileşenler $V = L^3$ hacimli bir kutu içerisinde hapsedilebilir. Kutunun kenar uzunluğu L , bağdaşım uzunluğundan yeterince büyük ise $L > \xi$, TF yaklaşıklığı uygulanabilir. Bu analiz, dış potansiyelin yavaşça değiştiği yerel yoğunluk yaklaşımında da geçerli olacaktır. Denklemler (2.60) ve (2.61) ile ifade edilen GP denklem çifti TF yaklaşıklığı altında (kinetik enerji teriminden gelen katkı tamamen ihmal edildiğinde),

$$g_{11}|\phi_1|^2 + g_{12}|\phi_2|^2 = \mu_1 \quad (2.64)$$

$$g_{22}|\phi_2|^2 + g_{12}|\phi_1|^2 = \mu_2 \quad (2.65)$$

ile verilir. Bu sistemin homojen çözümleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{N_1}{V}}, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{N_2}{V}} \quad (2.66)$$

İlk önce örtüşük faz durumunun enerjisini elde edelim. Denklem (2.66) ile ifade edilen homojen çözümler denklem (2.62) ile ifade edilen enerji fonksiyonelinde yerine yazıldığında örtüşük faz durumunun enerjisi,

$$E_o = \frac{1}{2}g_{11}\frac{N_1^2}{V} + \frac{1}{2}g_{22}\frac{N_2^2}{V} + g_{12}\frac{N_1N_2}{V} \quad (2.67)$$

olarak tanımlanır. Sistem karışık faz durumunda iken bileşenler ortak V hacmini dolduracaktır.

Ayrışık faz durumunda ise bileşenlerden biri V_1 hacmini işgal ederken diğer bileşen V_2 hacmini işgal eder ve toplam hacim ise bileşenlerin işgal ettikleri hacimlerin toplamına eşittir, yani $V = V_1 + V_2$. Bileşenlerin homojen çözümleri ayrışık faz durumu için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{N_1}{V_1}}, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{N_2}{V_2}} \quad (2.68)$$

Toplam enerji ise,

$$E_a = \frac{g_{11}}{2}\frac{N_1^2}{V_1} + \frac{g_{22}}{2}\frac{N_2^2}{V_2} = \frac{g_{11}}{2}\frac{N_1^2}{V_1} + \frac{g_{22}}{2}\frac{N_1^2}{V - V_1} \quad (2.69)$$

ile ifade edilir. Denklem (2.69) ile ifade edilen ayrışık fazın enerjisinin V_1 ve $V_2 = V - V_1$ hacimlerine göre minimizasyonlarının birbirine denk olduğu nokta $dE_1/V_1 = dE_2/V_2$, bileşenlerin basınçlarının birbirine eşit olduğu denge şartını verir, $P_1(\mathbf{r}) = P_2(\mathbf{r})$ ve bu limitte,

$$P_1 = \frac{1}{2}g_{11}n_1^2, \quad P_2 = \frac{1}{2}g_{22}n_2^2 \quad (2.70)$$

olarak verilir. Burada n_1 ve n_2 bileşen yoğunluklarıdır. Yukarıda ifade edilen eşitlik aynı zamanda bileşenlerin yoğunlukları arasında bir ilişki tanımlar. Bu ilişki aşağıdaki ifade de belirtilir.

$$n_1 = n_2\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \quad (2.71)$$

Bileşenlerin işgal ettikleri hacimler V_1 ve V_2 , ayrışık fazın enerjisinin V_1 hacmine göre minimizasyonu ile belirlenebilir.

$$V_1 = \frac{V}{1 + \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}\frac{N_2}{N_1}}}, \quad V_2 = \frac{V}{1 + \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}\frac{N_1}{N_2}}} \quad (2.72)$$

Denklem (2.69) ile ifade edilen ayrışık faz durumunun enerjisi toplam hacim cinsinden yeniden düzenlenir.

$$E_a = \frac{1}{2}g_{11}\frac{N_1^2}{V} + \frac{1}{2}g_{22}\frac{N_2^2}{V} + \sqrt{g_{11}g_{22}}\frac{N_1N_2}{V} \quad (2.73)$$

Bu aşamada toplam hacim cinsinden ifade edilen ayrışık faz durumunun enerjisi, denklem (2.67) ile tanımlanan örtüşük faz durumunun enerjisiyle karşılaştırılır. Eğer ki bileşenlerin birbirleriyle karşılıklı etkileşimi g_{12} , yeterince büyük ise,

$$g_{12} > \sqrt{g_{11}g_{22}} \quad (2.74)$$

iki bileşenli Bose gazı karışımının taban durumu, bileşenlerin fiziksel uzayda birbirlerinden ayrıldıkları ayrışık faz durumudur. Bu durum enerjetik olarak daha avantajlıdır. Ayrışık faz durumunun enerjisi ile örtüşük faz durumunun enerjileri arasındaki fark, ayrışık faz durumunun denklem (2.74) ile verilen koşul altında kararlı olduğunu gösterir.

$$\Delta E = E_o - E_a = (g_{12} - \sqrt{g_{11}g_{22}}) \frac{N_1N_2}{V} \quad (2.75)$$

Enerjiler arasındaki fark pozitifdir $\Delta E > 0$.

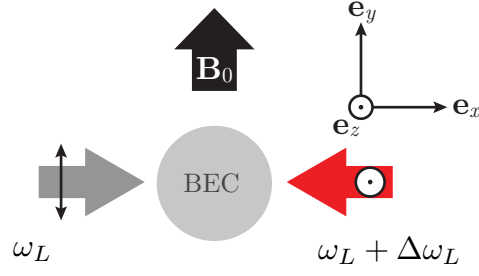
2.4 Yapay Manyetik Alan Altında Bose-Einstein Yoğuşuğu

Sabit bir manyetik alan etkisi altında hareket eden Q yüklü ve M kütleli bir parçacığın Hamiltonyeni aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$H = \frac{1}{2M} (\mathbf{p} - Q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + V(\mathbf{r}) \quad (2.76)$$

Burada $V(\mathbf{r})$ zamandan bağımsız tuzak potansiyelini temsil etmekte ve $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, düzgün manyetik alanı üreten vektör potansiyelini göstermektedir. Vektör potansiyeli, z yönünde düzgün bir manyetik alan $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ üretecek şekilde uygun bir ayar seçilebilir. Landau ayarı $\mathbf{A} = B(-y, 0)$ veya $\mathbf{A} = B(0, x)$ ile simetrik ayar $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ örnek olarak verilebilir. Manyetik alan altında hareket eden yüklü bir parçacığın mekanik momentumu, $m\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{p} - Q\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ile yerdeğiştirecektir ve burada \mathbf{p} kanonik momentumu ifade eder.

Atomik bozonlar yüksüz parçacıklardır ve yükü olmayan bir parçacık gerçek bir manyetik alan ile doğrudan etkileşmez. Son zamanlarda geliştirilen bir teknik ile [34],



Şekil 2.1: Yapay manyetik alan üretimini temsili olarak gösteren deneysel düzeneğdir. Sistem düzeneği; BEC: Bose-Einstein yoğuşması, iki farklı frekanstaki Raman lazer demeti $\omega_L, \omega_L + \Delta\omega_L$ ile y doğrultusunda uygulanan gerçek, sabit bir manyetik alandan $\mathbf{B} = B_0\hat{y}$ oluşmaktadır. Temsili gösterim [126] tezinden alıntılanmıştır.

[35], [36] yapay manyetik alan üretilmiştir ve böylece yapay manyetik alan altında bozonik nötr atomların sanki gerçek manyetik alan altında hareket eden yüklü birer parçacıklarımış gibi davranmaları sağlanmıştır. Bu teknik şu şekilde özetlenebilir; Bose-Einstein yoğuşması, bir doğrultu boyunca küçük şiddette ve gerçek bir manyetik alana maruz bırakılırken birbirlerine dik açılarda iki lazer demeti yerleştirilir. Lazer demetlerin frekansları birbirlerinden az bir oranda farklılık gösterir ($\Delta \sim 3\text{MHz}$) ve yoğuşma üzerine düşürülen lazer demetleri, atomların iç kuantum durumları ile bağlanır. Standart bir deney düzeneği Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Deney düzeneğinde görüldüğü üzere y doğrultusunda gerçek bir manyetik alan $B_0\hat{y}$ uygulanmaktadır ve x doğrultusu boyunca yoğuşma üzerine düşürülecek şekilde Raman lazer demetleri birbirlerine dik olarak yerleştirilmiştir. Lazer demetlerinin atomun iç kuantum durumları ile bağlanması sağlanarak atomun kütle merkezi için z doğrultusunda düzgün yapay bir manyetik alan üretilmiştir. Bunun neticesinde yüksüz bozon parçacıkları sanki sabit ve gerçek bir manyetik alan etkisi altında hareket eden yüklü birer parçacıklarımış gibi davranacaklardır.

3 Halka Potansiyeli ve Manyetik Alan Altında Bose-Einstein Yoğuşuğu

Bu bölümde halka potansiyeline tuzaklanan ve halka düzleminde dik homojen yapay bir manyetik alanın etkisindeki iki bileşenli Bose-Einstein yoğuşuğu karışımlarının statik-taban durum/denge özellikleri Bogoliubov yaklaşımı çerçevesinde incelenmiştir.

Yapay manyetik alanın etkisinde her bir bileşenin yapay yükü eşit ya da farklı olacak şekilde ayarlanabilir. Dolayısıyla yüklü iki bileşenli yoğuşuğun özellikleri bileşenlerin eşit yüklü $Q_1 = Q_2$ ve farklı yüklü $Q_1 \neq Q_2$ olduğu karışım çeşitleri üzerinden incelenmiştir. Bileşenler arasında açısal momentum aktarımı görebilmek amacıyla karışımın farklı yüklü olduğu durum, bileşenlerden birinin yüklü $Q_1 \neq 0$ diğer bileşenin ise yüksüz olduğu $Q_2 = 0$ bir limit altında ele alınmıştır. Burada, karışımların özelliklerini anlamamızda yardımcı olması açısından öncelikli olarak aynı geometride tek bileşenli bir yoğuşuğun manyetik alan altındaki özellikleri verilmiştir.

Manyetik alana bağlanmayan serbest bir parçacığın kinetik enerjisi, $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2M$, negatif ve pozitif değerli momentum durumlarının işaretinden bağımsız olarak eşit $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{-\mathbf{p}}$ elde edilmektedir. Manyetik alan etkisinde olan Q yüklü bir parçacığın kinetik enerjisi, $\varepsilon_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2/2M$, ise $\pm p$ değerli kanonik momentum durumları için farklı $\varepsilon_{\mathbf{p}} \neq \varepsilon_{-\mathbf{p}}$ elde edilmektedir. Manyetik alan serbest parçacığın sahip olduğu simetriyi kırarak dağılım (dispersiyon) bağıntısının $|QA|$ büyüklüğü kadar ötelenmesine neden olmaktadır. Böylece, uyarılmış parçacıkların momentum durumları üzerindeki dağılımı incelenirken, manyetik alan önemli rol oynayacaktır. Tek bileşenli yoğuşukta ve eşit yüklü yoğuşuk karışımında uyarılmış parçacıkların momentum durumları üzerindeki dağılımı simetrik iken farklı yüklü bileşenlerden oluşan yoğuşukta simetrik olmayan bir davranış elde edilmiştir. Bu simetrik ve simetrik olmayan davranışlar, Bogoliubov yaklaşımının geçerli olduğu $\xi n \ll 1$ limit durumunu sağlamaktadır. Dolayısıyla uyarılmış parçacıkların momentum durumları üzerindeki dağılımını incelemek aynı zamanda Bogoliubov yaklaşımının çalıştığı limiti kontrol etmenin de bir yoludur.

Literatürde [89], [93], [95], [102], [127], [128] eşit yüklü karışımların özelliklerinin sıklıkla çalışıldığı düşünüldüğünde burada, bileşenler arasında açısız momentum aktarımı ve bu prensip odağında bileşenler arasında bir sürüklenme olayı inceleyebilmek için farklı yüklü karışımlar üzerine odaklanılmıştır. Atomik etkileşimler aracılığıyla manyetik alan ile güçlü bağlanan bir bileşen, manyetik alan ile zayıf bağlanan bir diğer bileşene Lorentz kuvvetinin etkisini aktarabilir. Bu kuvvetin etkisiyle manyetik alan ile zayıf bağlanan bileşenin güçlü bağlanan bileşen tarafından ivmelenmesi neticesinde enerji açısından kayıpsız bir sürüklenme olayı ortaya çıkabilir ve böylece bileşenler arasında bir açısız momentum aktarımı meydana gelebilir. Bu aktarımın, bir limit durumu olarak, yukarıda da ifade edildiği üzere manyetik alan ile bağlanan yüklü bileşen ve manyetik alan ile doğrudan bağlanmayan yüksüz bileşen karışımı için belirgin olarak ortaya çıkabileceğini düşünmekteyiz.

Burada açısız momentum aktarımının incelenebilmesi için Bogoliubov yaklaşımı uygun bir yöntem olacaktır. Bogoliubov yaklaşımı çerçevesinde parçacıkların küçük bir kesrinin uyarıldığı dikkate alındığından bileşenler arasındaki açısız momentum aktarımı bu uyarılmış parçacıklar düzeyinde gerçekleşecektir. Sadece ortalama etrafındaki parçacık etkileşimlerin dikkate alındığı Gross-Pitaevskii yaklaşımı çerçevesinde ise bu aktarımının incelenebilmesi mümkün olmayacaktır.

Son olarak, eşit yüklü ve farklı yüklü karışımların Bogoliubov enerji spektrumu üzerinden enerjetik ve dinamik kararsızlık sergiledikleri parametre uzayı, etkileşim enerjisi ve manyetik alan düzleminde oluşturularak sisteme girdap endükte etme koşulları incelenmiştir.

3.1 Halka Potansiyelinde Tek Bileşenli Bose-Einstein Yoğuşuğu

Yarıçapı R ve arakesit yarıçapı r_0 olan bir halka geometride tuzaklanmış tek bileşenli Bose-Einstein yoğuşuğu dikkate alınmıştır. Halkanın çevresi $L = 2\pi R$ ve ara kesit alanı $S = \pi r_0^2$ olarak tanımlanmaktadır. Burada arakesit yarıçapının, halka yarıçapından çok küçük olması $r_0 \gg R$ varsayımı altında bir halka potansiyeli düşünülmüştür. Bu tuzak potansiyeli, yoğuşuğu bir boyutta ele almayı mümkün kılar. Toplam parçacık sayısı N , atom kütlesi M ve yapay yükü Q ile ifade edilen yoğuşuk, z doğrultusunda uygulanan düzgün yapay bir manyetik alanın etkisinde incelenmiştir.

Bir boyutta sabit R yarıçaplı halka geometride tuzaklanan sistemin tek serbestlik

derecesi azimut açısı θ ile verilmektedir. Sistemin çok-parçacık Hamiltonyeni bozonik alan operatörleri $\hat{\psi}$ ve $\hat{\psi}^\dagger$ cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\hat{H} = \int R d\theta \hat{\psi}^\dagger(\theta) \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2M} \hat{\psi}(\theta) + \frac{g^{1D}}{2} \int R d\theta \hat{\psi}^\dagger(\theta) \hat{\psi}^\dagger(\theta) \hat{\psi}(\theta) \hat{\psi}(\theta) \quad (3.1)$$

Simetrik ayarda seçilmiş bir vektör potansiyel, $\mathbf{A} = \frac{Br}{2}|_{r=R}\hat{\theta}$, halka düzlemine dik z doğrultusunda düzgün bir manyetik alan $\mathbf{B} = B\hat{z}$ verir. Saçılma uzuluğunun a_s , hem halka arakesit yarıçapından hem de halka yarıçapından çok küçük olması $a_s \ll r_0, R$ varsayımı altında tek boyutta etkileşim enerjisi saçılma uzunluğu cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$g^{1D} = \frac{4\pi R^2 a_s}{M S} \quad (3.2)$$

Sistemin homojen oluşundan bozonik alan operatörleri $\hat{\psi}$ düzlem dalga tabanında ifade edilebilir. Burada momentum durumları k ve bu momentum durumlarının taşıdıkları açisal momentum $\hbar k$ ile tanımlanmaktadır. Sırasıyla, bozonik alan operatörü ve her-misyen eşleneği,

$$\hat{\psi}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_k e^{ik\theta} \hat{a}_k, \quad \hat{\psi}^\dagger(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_k \hat{a}_k^\dagger e^{-ik\theta} \quad (3.3)$$

yukarıdaki gibi tanımlanır. Dalga fonksiyonunun tek değerli olması koşulu altında, momentum durumları kesiklidir ve $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ gibi tam sayı değerler alacaktır. Çok parçacık Hamiltonyeni bozonik yaratma ve yoketme operatörleri cinsinden aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir.

$$\hat{H} = \sum_k \frac{\hbar^2}{2MR^2} (k - Q\Phi)^2 \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{g^{1D}}{2L} \sum_{k,k',q} \hat{a}_{k+q}^\dagger \hat{a}_{k'-q}^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{a}_k \quad (3.4)$$

Burada Φ , halkanın çevrelediği alanın içerisinden akan manyetik akı miktarıdır ve manyetik akı kuantası $\Phi_0 = h/e$ cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\Phi = \pi \frac{BR^2}{\Phi_0} \quad (3.5)$$

Yukarıda denklem (3.4) ile ifade edilen ikincil kuantizasyon Hamiltonyeni, $\hbar^2/2MR^2$ enerji biriminde yazıldığında,

$$\hat{H} = \sum_k (k - Q\Phi)^2 \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{g}{2L} \sum_{k,k',q} \hat{a}_{k+q}^\dagger \hat{a}_{k'-q}^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{a}_k \quad (3.6)$$

elde edilir. Bir boyutta etkileşim enerjisi g^{1D} , boyutsuz ifadesi g ile yeniden tanımlanmıştır.

$$g = \frac{4Ra_s}{S} \quad (3.7)$$

Bölüm 2.2'de anlatıldığı üzere Bogoliubov yaklaşıklığı altında, toplam parçacık sayısı N cinsinden denklem (3.6) Hamiltonyeni yeniden ifade edildiğinde aşağıdaki gibi kuadratik biçimde bulunur.

$$\hat{H}_B = E_0 + \sum_{q \neq 0} (\epsilon_q + U) \hat{a}_{k_0+q}^\dagger \hat{a}_{k_0+q} + \frac{U}{2} \sum_{q \neq 0} (\hat{a}_{k_0+q}^\dagger \hat{a}_{k_0-q}^\dagger + \hat{a}_{k_0+q} \hat{a}_{k_0-q}) \quad (3.8)$$

Burada k_0 , yoğuşma durumunun momentumunu ve q yoğuşma durumundan farklı diğer momentum durumlarını belirtmektedir. Yoğuşmanın $k_0 = 0$ değerli momentum durumuna yoğuştuğu varsayılmıştır. Toplam parçacık sayısı ile orantılı olarak etkileşim parametresi $U = gN$ ile ifade edilmiştir. Denklem (3.8) Hamiltonyeninde yer alan sabit terim E_0 , yoğuşmanın GP taban durum enerjisini belirtmektedir. GP taban durum enerjisi aşağıda tanımlanmaktadır.

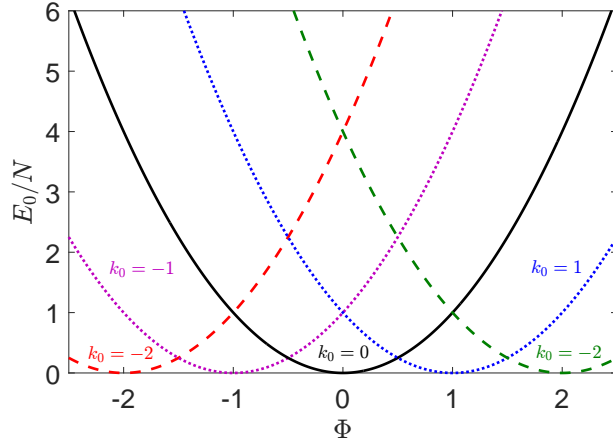
$$E_0 = (k_0 - Q\Phi)^2 N + \frac{1}{2}gN^2 \quad (3.9)$$

Küçük manyetik akı $\Phi = [-0.5, 0.5]$ değerlerinde $k_0 = 0$ momentum durumu enerjik olarak avantajlıdır. Manyetik akı büyüklük olarak $|\Phi| > |\pm 0.5|$ değerini aşınca artık bu momentum durumunun enerjik olarak avantajlı olmadığı Şekil 3.1'de gösterilmektedir. Şekil 3.1 farklı yoğuşma durumlarının GP taban durum enerjilerini manyetik alana göre göstermektedir.

Yoğuşma durumunun değiştiği bu manyetik akı değeri kritik manyetik akı değeri Φ_c olarak adlandırılır. Kritik manyetik akı değeri ± 0.5 aşıldıktan sonra enerjide yeni bir minimum oluşur ve yoğuşma bu yeni momentum durumuna çöker. Yeni minimum, manyetik alanın işaretine bağlı olarak $k_0 = 1$ veya $k_0 = -1$ momentum durumlarından birine ait yoğuşuktur. Her bir kritik manyetik akı değeri aşıldıkça enerjide farklı bir minimum oluşur. Sistem bu yeni momentum durumuna yoğuşacaktır. Bu davranış kendini manyetik akı arttıkça yinelemektedir. Denklem (3.8),

$$\epsilon_q = q^2 + 2q(k_0 - Q\Phi) \quad (3.10)$$

ifadesi q momentum durumuna, k_0 yoğuşma durumuna ve manyetik akı Φ 'ye bağlı bir niceliktir. Bu seviyede Hamiltonyen $\pm q$ momentum durumları için birlikte ifade



Şekil 3.1: Gross-Pitaevskii taban durum enerjisindeki değişim farklı yoğunlaşma durumları $k_0 = 0, \pm 1, \pm 2$ için manyetik akıya göre elde edilmiştir.

edilebilir.

$$\begin{aligned} \hat{H} = & E_0 + \sum_{q>0} \left((\epsilon_q + U) \hat{a}_{k_0+q}^\dagger \hat{a}_{k_0+q} + (\epsilon_{-q} + U) \hat{a}_{k_0-q}^\dagger \hat{a}_{k_0-q} \right) \\ & + \frac{U}{2} \sum_{q>0} \left(\hat{a}_{k_0+q}^\dagger \hat{a}_{k_0-q}^\dagger + \hat{a}_{k_0+q} \hat{a}_{k_0-q} + \hat{a}_{k_0-q}^\dagger \hat{a}_{k_0+q} + \hat{a}_{k_0-q} \hat{a}_{k_0+q} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Manyetik alana bağlanmamış bir parçacığın ϵ_q^0 enerjisi q ve $-q$ momentum durumları için birbirine denk iken $\epsilon_q^0 = \epsilon_{-q}^0 = q^2$, manyetik alanın varlığından dolayı pozitif momentum durumlarına karşılık gelen ϵ_q enerjisi ile negatif değerli momentum durumlarına karşılık gelen ϵ_{-q} enerjisi birbirlerine denk olmayacaktır.

$$\epsilon_q \neq \epsilon_{-q} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_q - \epsilon_{-q} = 4q(k_0 - Q\Phi), \quad \epsilon_q + \epsilon_{-q} = 2q^2 \quad (3.12)$$

Dolayısıyla denklem (3.11) Hamiltonyeni için negatif ve pozitif modların kinetik enerjiye olan katkıları dikkate alınmıştır.

Bu aşamada Hamiltonyen Bogoliubov dönüşümü altında köşegenleştirilebilir. Bu dönüşüm $\psi_q = T\phi_q$ üzerinden tanımlanmaktadır. Burada T dönüşümünü sağlayan matris, ψ_q bozonik parçacık operatörlerinden oluşan bir sütun vektörü ve ϕ_q bozonik parçacığımsı operatörlerinden oluşan bir sütun vektörüdür. Vektör operatörlerinin tanımları sırasıyla aşağıda verilmektedir.

$$\psi_q = \left(\hat{a}_{k_0+q}^\dagger, \hat{a}_{k_0-q}^\dagger, \hat{a}_{k_0+q}, \hat{a}_{k_0-q} \right)^\dagger \quad (3.13)$$

$$\phi_q = \left(\hat{\alpha}_{k_0+q}^\dagger, \hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger, \hat{\alpha}_{k_0+q}, \hat{\alpha}_{k_0-q} \right)^\dagger \quad (3.14)$$

Bozonik operatörleri $a_k^{(\dagger)}$, parçacığımsı operatörlerinin $\alpha_k^{(\dagger)}$ lineer bir kombinasyonu

olarak T dönüşüm matrisinin elemanlarıyla aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\hat{a}_{k_0+q} = u_q \hat{\alpha}_{k_0+q} - v_q^* \hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger \quad (3.15)$$

$$\hat{a}_{k_0-q}^\dagger = u_q^* \hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger - v_q \hat{\alpha}_{k_0+q} \quad (3.16)$$

Matris formatında $\psi_q = T\phi_q$ eşitliği,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{k_0+q} \\ \hat{a}_{k_0-q} \\ \hat{a}_{k_0+q}^\dagger \\ \hat{a}_{k_0-q}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_q & 0 & 0 & -v_q^* \\ 0 & u_q & -v_q^* & 0 \\ 0 & -v_q & u_q^* & 0 \\ -v_q & 0 & 0 & u_q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{k_0+q} \\ \hat{\alpha}_{k_0-q} \\ \hat{\alpha}_{k_0+q}^\dagger \\ \hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

şeklinde yazılabilir. Hamiltonyen bozonik parçacığımsı opertörleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \hat{H} = E_0^B + \frac{1}{2} \sum_{q>0} & \left[\left(\hat{\alpha}_{k_0+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_0+q} + \hat{\alpha}_{k_0+q} \hat{\alpha}_{k_0+q}^\dagger \right) (u_q^2 (\epsilon_q + U) + v_q^2 (\epsilon_{-q} + U) - 2U u_q v_q) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{q>0} \left[\left(\hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_0-q} + \hat{\alpha}_{k_0-q} \hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger \right) (u_q^2 (\epsilon_{-q} + U) + v_q^2 (\epsilon_q + U) - 2U u_q v_q) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{q>0} \left[\left(\hat{\alpha}_{k_0+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger + \hat{\alpha}_{k_0+q} \hat{\alpha}_{k_0-q} \right) (2U (u_q^2 + v_q^2) - 2u_q v_q (\epsilon_q + \epsilon_{-q} + 2U)) \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Burada $E_0^B = E_0 - \frac{1}{2} \sum_{q>0} (\epsilon_q + \epsilon_{-q} + 2U)$ olarak tanımlanmıştır. Yukarıda ifade edilen Hamiltonyende köşegen olmayan $\hat{\alpha}_{k_0+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger$ ile $\hat{\alpha}_{k_0+q} \hat{\alpha}_{k_0-q}$ terimlerin katsayısının sıfıra eşitlenmesiyle,

$$(u_q^2 + v_q^2) U - u_q v_q (\epsilon_q + \epsilon_{-q} + 2U) = 0 \quad (3.19)$$

Bogoliubov genlikleri, (u_q, v_q) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} (u_q^2, v_q^2) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon_+ + U}{\sqrt{(\epsilon_+ + U)^2 - U^2}} \pm 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{q^2 + U}{\sqrt{q^2 (q^2 + 2U)}} \pm 1 \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Burada genlikler iki durumun ortalama enerjisine $\epsilon_{\pm} = (\epsilon_q \pm \epsilon_{-q})/2$ göre tanımlanabilir. Denklem (3.18) ile ifade edilen Hamiltonyen, (u_q, v_q) Bogoliubov genliklerinin yerine yazılmasıyla köşegen biçimde elde edilir.

$$\hat{H} = E_{TD} + \sum_{q>0} \left(\tilde{\epsilon}_q \hat{\alpha}_{k_0+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_0+q} + \tilde{\epsilon}_{-q} \hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_0-q} \right) \quad (3.21)$$

Bogoliubov uyarılma enerjileri, $\tilde{\epsilon}_q$ ve $\tilde{\epsilon}_{-q}$ aşağıda verilmiştir.

$$\tilde{\epsilon}_q = \epsilon_- + \sqrt{(\epsilon_+ + U)^2 - U^2} \quad (3.22)$$

$$\tilde{\epsilon}_{-q} = \epsilon_- + \sqrt{(\epsilon_+ + U)^2 - U^2} \quad (3.23)$$

Etkileşimler vasıtasıyla birbirlerine bağlanan durumların enerjileri $\epsilon_q \neq \epsilon_{-q}$ farklı ise oluşacak olan sanki-parçacıkların enerjileri de $\tilde{\epsilon}_q, \tilde{\epsilon}_{-q}$ farklı olacaktır. Burada Hamiltonyen, yoğunlaşma sıfır momentum durumu hariç mümkün diğer tüm q momentum durumları üzerinden yeniden ifade edilebilir.

$$H = E_{TD} + \sum_{q \neq 0} \epsilon_q \alpha_{k_0+q}^\dagger \alpha_{k_0+q} \quad (3.24)$$

Bu Hamiltonyen, birbirleri ile etkileşmeyen bozonik parçacığımsı operatörler cinsinden köşegen biçimdeki Bogoliubov Hamiltonyenidir. Temel durum enerjisi E_{TD} toplam parçacık sayısı N başına aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

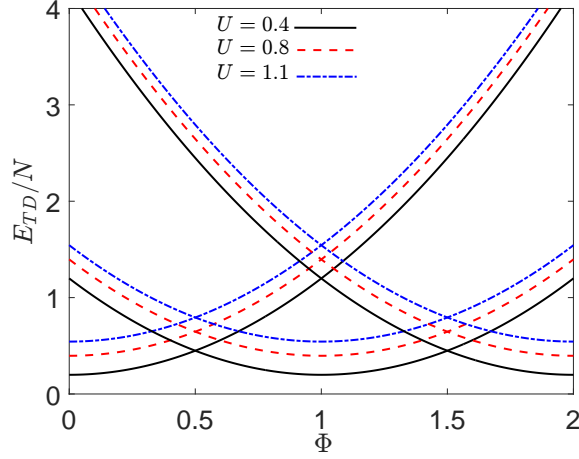
$$\frac{E_{TD}}{N} = \frac{E_0}{N} - \frac{1}{N} \sum_{q>0} \left[q^2 + U - \sqrt{q^2 (q^2 + 2U)} \right] \quad (3.25)$$

Temel durum enerjisindeki ilk terim GP taban durum enerjisini gösterirken son terim Bogoliubov yaklaşımından sonra temel duruma gelen katkıyı belirtmektedir. Toplam parçacık sayısı $N \gg 1$ olmak üzere son terimin katkısı GP taban durum enerjisine kıyasla çok küçük kalacaktır. Dolayısıyla kritik manyetik akı noktaları esasen GP taban durum enerjisinden gelecek olan katkıyla belirlenecektir. Şekil 3.3'de görüleceği üzere GP seviyesinde kritik manyetik akı noktalarının etkileşimle değişmediği elde edilmiştir.

Manyetik alan altında yüklü bir yoğunlaşmanın uyarılma enerjisi ϵ_q , aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\epsilon_q = 2q(k_0 - Q\Phi) + \sqrt{q^2 (q^2 + 2U)} \quad (3.26)$$

Manyetik alanın belli bir kritik değeri aşmasından sonra uyarılma enerjisinin sıfır olması veya negatif değere düşmesi yoğunlaşmanın enerjik olarak kararsız olacağına bir işaretidir. Bu kritik manyetik akı değerinden sonra yoğunlaşma yeni bir momentum durumuna çökecektir. Başlangıçta yüklü yoğunlaşmanın $k_0 = 0$ durumunda yoğunlaştığı dikkate alındığından yeni yoğunlaşma durumu $k_0 = 1$ değerli momentum durumu olmalıdır. Dolayısıyla denklem (3.26) ile ifade edilen uyarılma enerjisinin sıfıra eşit olduğu noktalar

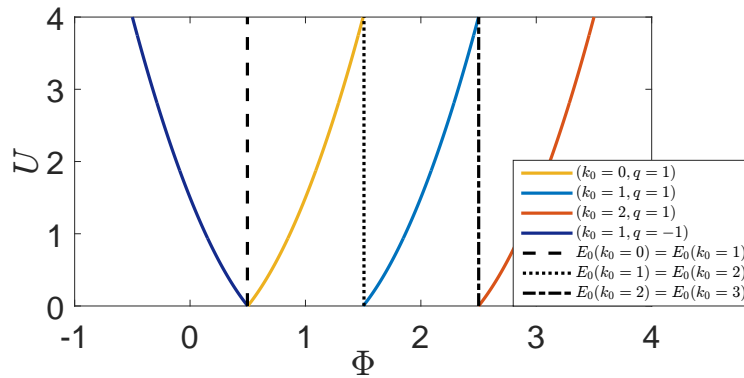


Şekil 3.2: Üç farklı yoğunluk durumu için $k_0 = 0, 1, 2$, temel durum enerjileri üç farklı etkileşim değerinde $U = 0.4, 0.8, 1.1$ hesaplanmıştır.

$q = \pm 1$ durumları için yoğunluğun enerji kararlılık sınırını belirleyecektir.

$$Q\Phi_c = k_0 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2U} \quad (3.27)$$

Yukarıda ifade edilen eşitlik, tanımlı bir yoğunluk durumunda ve belli bir etkileşim parametresi değerinde kritik manyetik akı noktasını belirtmektedir. Şekil 3.3 yoğunluğun manyetik alan - etkileşim parametresi, yani $\Phi - U$ düzleminde faz diyagramını gösterir. Bu diyagrama göre elde edilen kritik manyetik akı değerleri, GP seviyesinde etkileşimle değişmezken (Şekil 3.3'de kesikli çizgiler) Bogoliubov seviyesinde (Şekil 3.3'de kalın düz çizgiler) etkileşime bağlı olarak değişim göstermektedir.



Şekil 3.3: Yoğunluğun faz diyagramını etkileşim parametresi ve manyetik alan $U - \Phi$ düzleminde oluşturulmuştur. Kesikli çizgiler GP taban durum enerjisine göre düz kalın çizgiler ise Bogoliubov enerjisine göre hesaplanan yoğunluğun kararlılık sınırlarını göstermektedir.

3.1.1 Yoğuşuk dışı Parçacık Sayısı ve Açısal Momentum

Toplam parçacık sayısı N ve sistemin toplam kanonik açısal momentumunu L_z , bozonik parçacığımsı operatörleri cinsinden belirtmek için öncelikle $\hat{a}_{k_0+q}^\dagger \hat{a}_{k_0+q}$ teriminin beklenen değerini parçacığımsı operatörler cinsinden yazalım.

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_{k_0+q}^\dagger \hat{a}_{k_0+q} \rangle &= |u_q|^2 \langle \hat{\alpha}_{k_0+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_0+q} \rangle + |v_q|^2 \langle \hat{\alpha}_{k_0-q} \hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger \rangle \\ &- u_q^* v_q^* \langle \hat{\alpha}_{k_0+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger \rangle - v_q u_q \langle \hat{\alpha}_{k_0-q} \hat{\alpha}_{k_0+q} \rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

Yukarıda ifade edilen dört terim Bogoliubov taban durumuna etki etmektedir. Parçacığımsı sayısının korunumundan dolayı son iki terimin taban duruma etkileri sıfır olmalıdır, yani $\langle \hat{\alpha}_{k_0+q}^{(\dagger)} \hat{\alpha}_{k_0-q}^{(\dagger)} \rangle = 0$. Bozonik komütasyon ilişkisi kullanılarak $\hat{\alpha}_{k_0-q} \hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger$ terimi yeniden ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_{k_0+q}^\dagger \hat{a}_{k_0+q} \rangle &= |u_q|^2 \langle \hat{\alpha}_{k_0+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_0+q} \rangle + |v_q|^2 \langle \hat{\alpha}_{k_0-q} \hat{\alpha}_{k_0-q}^\dagger \rangle \\ &= |u_q|^2 \langle \hat{\alpha}_{k_0+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_0+q} \rangle + |v_q|^2 \left(1 + \langle \hat{\alpha}_{k_0-q} \hat{\alpha}_{k_0-q} \rangle \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Burada $\hat{\alpha}_{k_0\pm q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_0\pm q}$ terimleri Bose-Einstein dağılım fonksiyonunu tanımladığından $T = 0K$ sıcaklığında bu terimlerden gelecek olan katkılar sıfırdır. Dolayısıyla taban durumda parçacık operatörlerinin beklenen değeri, sadece Bogoliubov genliğinin v_q norm karesi olarak aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\langle \hat{a}_{k_0+q}^\dagger \hat{a}_{k_0+q} \rangle = |v_q|^2 \quad (3.30)$$

Toplam parçacık sayısı,

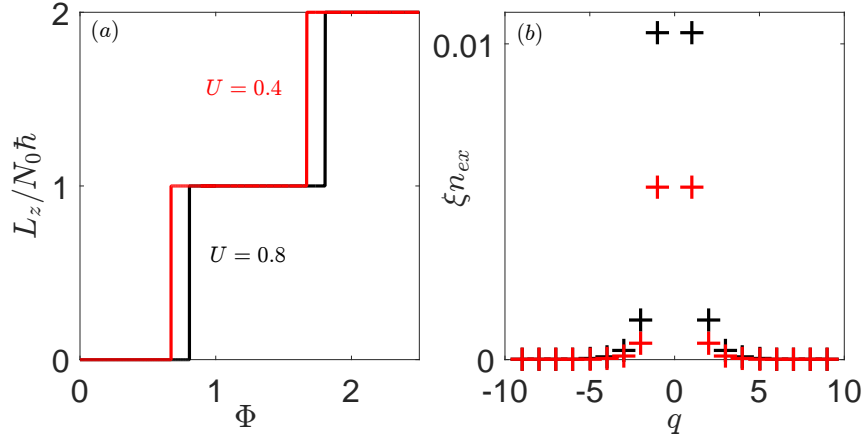
$$N = N_0 + N_e = N_0 + \sum_{q \neq 0} |v_q|^2 = N_0 + \sum_{q > 0} (|v_q|^2 + |v_{-q}|^2) \quad (3.31)$$

ve toplam yoğuşmuş parçacık sayısı N_0 başına toplam açısal momentum,

$$\frac{\langle L_z \rangle}{\hbar N_0} = k_0 + \frac{1}{N_0} \sum_{q \neq 0} q |v_q|^2 = k_0 + \frac{1}{N_0} \sum_{q > 0} ((k_0 + q) |v_q|^2 + (k_0 - q) |v_{-q}|^2) \quad (3.32)$$

ile ifade edilir. Yoğuşğun dışında açısal momentum, yoğuşuktan taşan parçacıkların dağılımıyla belirlenmektedir ve $|v_q|^2 = |v_{-q}|^2$ olduğundan hep sıfır verecektir.

Şekil 3.4 (a)'da manyetik akının bir fonksiyonu olarak toplam açısal momentum toplam yoğuşmuş parçacık sayısı başına iki farklı etkileşim değerinde hesaplanmıştır. Açısal momentumda belli bir kritik manyetik akı değerinden sonra bir sıçramanın



Şekil 3.4: İki farklı etkileşim değerinde $U = 0.4, 0.8$, (a) manyetik akıya göre toplam kanonik açısal momentum $L_z/(N_0\hbar)$, (b) momentum modlarına göre uyarılmış toplam yoğunlaşma dışı parçacık sayısının bağdaşım uzunluğu ξ başına dağılımı hesaplanmıştır.

gerçekleştiği elde edilmiştir. Bu sıçrama, belli bir q değeri için Bogoliubov uyarılma enerjisinin sıfırı kestiği $\varepsilon_q = 0$ kritik manyetik akı değerinde gerçekleşir ve yoğunlaşma dışı bir sonraki açısal momentum duruma çöker. Manyetik alanın şiddetine bağlı olarak yoğunlaşma dışı bir sonraki enerjetik kararsızlık noktası oluşuncaya kadar yoğunlaşmanın açısal momentum değeri sabit kalacaktır. Ayrıca etkileşimlerin büyüklüğüne bağlı olarak Şekil 3.4 (a)'da gösterildiği üzere açısal momentumda sıçramaların gerçekleştiği kritik manyetik akı değerlerinin farklı olduğu ve etkileşim şiddetinin artmasıyla birlikte ötelendiği hesaplanmıştır (Bkz: kırmızı ve siyah kalın çizgiler).

Şekil 3.4 (b)'de bağdaşım uzunluğu başına uyarılmış parçacık sayı yoğunluğunun q momentum durumları üzerine dağılımı gösterilmiştir. Etkileşimler vasıtasıyla yoğunlaşma dışına saçılan parçacıkların Bogoliubov yaklaşıklığı çerçevesinde toplam momentumlarını koruyacak şekilde davrandıkları dikkate alınmaktadır. Dolayısıyla yoğunlaşma dışına saçılan parçacıkların belli bir q değerinde zıt işaretli ikililer oluşturacak şekilde saçıldıkları düşünülmektedir. Denklem (3.20) ifadesinde belirtilen v_q Bogoliubov genliği, momentum çiftlerinin $(q, -q)$ ortalama enerjilerine bağlı olduğundan pozitif ve negatif durumların norm kareleri eşit büyüklükte $|v_q|^2 = |v_{-q}|^2$ elde edilmektedir. Böylece yoğunlaşma dışına taşan parçacıkların q momentum durumları üzerindeki dağılımı $q = 0$ etrafında simetrik ve sonuç olarak $L_z = N\hbar k_0$ olur.

3.2 Manyetik Alan Etkisinde İki Bileşenli Bose-Einstein Yoğuşuğu

Bu kısımda yapay manyetik alan altında zayıf ekileşen ideal bir boyutlu bir halka geometride tuzaklanmış iki bileşenli Bose-Einstein yoğuşuğunun özellikleri incelenmiştir. Bileşenlerin kütleleri, toplam parçacık sayıları ve yapay yükleri sırasıyla M_a ve M_b , N_a ve N_b , Q_a ve Q_b olarak tanımlanmıştır. Öncelikle bu sistemin Hamiltonyenini bozonik alan operatörleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edelim.

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int Rd\theta \hat{\psi}_a^\dagger(\theta) \frac{(\mathbf{p} - Q_a \mathbf{A})^2}{2M_a} \hat{\psi}_a(\theta) + \int Rd\theta \hat{\psi}_b^\dagger(\theta) \frac{(\mathbf{p} - Q_b \mathbf{A})^2}{2M_b} \hat{\psi}_b(\theta) \\
&+ \frac{g_a^{1D}}{2} \int Rd\theta \hat{\psi}_a^\dagger(\theta) \hat{\psi}_a^\dagger(\theta) \hat{\psi}_a(\theta) \hat{\psi}_a(\theta) \\
&+ \frac{g_b^{1D}}{2} \int Rd\theta \hat{\psi}_b^\dagger(\theta) \hat{\psi}_b^\dagger(\theta) \hat{\psi}_b(\theta) \hat{\psi}_b(\theta) \\
&+ \frac{g_{ab}^{1D}}{2} \int Rd\theta \hat{\psi}_a^\dagger(\theta) \hat{\psi}_b^\dagger(\theta) \hat{\psi}_b(\theta) \hat{\psi}_a(\theta)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Bileşenlerin kendi içlerindeki etkileşim enerjileri g_a^{1D} , g_b^{1D} ve karşılıklı etkileşim enerjisi g_{ab}^{1D} aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$g_a^{1D} = \frac{4\pi\hbar^2}{M_a} \frac{a_{s,a}}{S}, \quad g_b^{1D} = \frac{4\pi\hbar^2}{M_b} \frac{a_{s,b}}{S}, \quad g_{ab}^{1D} = \frac{4\pi\hbar^2}{\mu} \frac{a_{s,ab}}{S}, \tag{3.34}$$

Yukarıda ifade edilen $\mu = (M_a M_b)/(M_a + M_b)$, iki bileşenli yoğuşma sistemine ait indirgenmiş kütle olarak tanımlanır. Bileşenlere ait bozonik alan operatörleri düzlem dalga tabanında açılabilir. Bozonik alan operatörleri,

$$\hat{\psi}_a(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_k e^{ik\theta} \hat{a}_k, \quad \hat{\psi}_b(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_k e^{ik\theta} \hat{b}_k \tag{3.35}$$

ve hermisyen eşlenikleri,

$$\hat{\psi}_a^\dagger(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_k \hat{a}_k^\dagger e^{-ik\theta}, \quad \hat{\psi}_b^\dagger(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_k \hat{b}_k^\dagger e^{-ik\theta} \tag{3.36}$$

ile ifade edilir. Böylece momentum uzayında sistemin çok parçacık Hamiltonyeni aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \sum_k \left[\frac{\hbar^2}{2M_a R^2} (k - Q_a \Phi)^2 \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{\hbar^2}{2M_b R^2} (k - Q_b \Phi)^2 \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k,k',q} \left[g_a^{1D} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{k'-q} \hat{a}_{k+q} + g_b^{1D} \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_{k'-q} \hat{b}_{k+q} \right] \\
&+ g_{ab}^{1D} \sum_{k,k',q} \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_{k'-q} \hat{a}_{k+q}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Çok parçacık Hamiltonyenini uygun bir enerji biriminde, $\hbar^2/2M_a R^2$, ölçeklendirildiğinde

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_k \left[(k - Q_a \Phi)^2 \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + M_{ab} (k - Q_b \Phi)^2 \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k,k',q} \left[g_a \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_{k'-q} \hat{a}_{k+q} + g_b \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_{k'-q} \hat{b}_{k+q} \right] \\ &+ g_{ab} \sum_{k,k',q} \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_{k'}^\dagger \hat{b}_{k'-q} \hat{a}_{k+q}\end{aligned}\quad (3.38)$$

boyutsuz etkileşim parametreleri g_a , g_b ve g_{ab} aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$g_a = 4 \frac{R}{S} a_{s,a}, \quad g_b = 4 M_{ab} \frac{R}{S} a_{s,b}, \quad g_{ab} = 4 (1 + M_{ab}) \frac{R}{S} a_{s,ab}, \quad (3.39)$$

Burada $M_{ab} = M_a/M_b$ kütlelerin oranı ile verilir. Bogoliubov yaklaşıklığı altında, her bir bileşenin toplam parçacık sayısı N_a ve N_b , yoğuşma parçacık sayısı ve toplam uyarılmış yoğuşma dışı parçacıklarının toplamı olarak ifade edilebilir.

$$N_a = \langle \hat{a}_{k_a}^\dagger \hat{a}_{k_a} \rangle + \sum_{k \neq k_a} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = \bar{N}_a + \sum_{k \neq k_a} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (3.40)$$

$$N_b = \langle \hat{b}_{k_b}^\dagger \hat{b}_{k_b} \rangle + \sum_{k \neq k_b} \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k = \bar{N}_b + \sum_{k \neq k_b} \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \quad (3.41)$$

Yukarıda ifade edilen k_a ve k_b momentum durumları sırasıyla; a ve b bileşenlerine ait yoğuşma durumlarını belirtir. \bar{N}_a ve \bar{N}_b ise k_a ve k_b yoğuşma durumlarındaki toplam yoğuşmuş parçacık sayılarını gösterir. Çok parçacık Hamiltonyeni Bogoliubov yaklaşıklığı altında kuadratik biçimde elde edilir ve bu aşamada Hamiltonyeni matris formatında yazmak uygundur.

$$\hat{H} = E_{GP} + \frac{1}{2} \sum_{q>0} \left\{ \hat{\psi}_q^\dagger \begin{pmatrix} W & Z \\ Z & W \end{pmatrix} \hat{\psi}_q - \text{Tr}[W] \right\} \quad (3.42)$$

$$\hat{H} = E_{GP} + \frac{1}{2} \sum_{q>0} \left\{ \hat{\psi}_q^\dagger \mathcal{M} \hat{\psi}_q - \text{Tr}[W] \right\} \quad (3.43)$$

İki bileşenli yoğuşma sisteminin Gross-Pitaevskii taban durum enerjisi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}E_{GP} &= N_a (k_a - Q_a \Phi)^2 + M_{ab} N_b (k_b - Q_b \Phi)^2 \\ &+ \frac{1}{2} (U_a N_a + U_b N_b) + U_{ab} \sqrt{N_a N_b}\end{aligned}\quad (3.44)$$

Burada $U_a = g_a N_a$, $U_b = g_b N_b$ ve $U_{ab} = g_{ab} \sqrt{N_a N_b}$ ile verilir. Denklem (3.42) Hamiltonyeninin W ve Z matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$W = \begin{pmatrix} \epsilon_q^a + U_a & 0 & U_{ab} & 0 \\ 0 & \epsilon_{-q}^a + U_a & 0 & U_{ab} \\ U_{ab} & 0 & \epsilon_q^b + U_b & 0 \\ 0 & U_{ab} & 0 & \epsilon_{-q}^b + U_b \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & U_a & 0 & U_{ab} \\ U_a & 0 & U_{ab} & 0 \\ 0 & U_{ab} & 0 & U_b \\ U_{ab} & 0 & U_b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Burada W matrisinde köşegen üzerinde yer alan ϵ_q^a ve ϵ_q^b enerjileri,

$$\epsilon_q^a = q^2 + 2q(k_a - Q_a \Phi) \quad (3.47)$$

$$\epsilon_q^b = q^2 + 2q(k_b - Q_b \Phi) \quad (3.48)$$

ile verilir. Tanımları aşağıda verilen bozonik parçacık operatörlerinden oluşan sütun vektörü ψ_q , ve parçacığımsı operatörlerinden oluşan sütun vektörü ϕ_q bir T Bogoliubov dönüşümü matrisiyle birbirleriyle $\psi_q = T\phi_q$ ile ilişkilendirilebilir.

$$\psi_q = \left(\hat{a}_{k_a+q}^\dagger, \hat{a}_{k_a-q}^\dagger, \hat{b}_{k_b+q}^\dagger, \hat{b}_{k_b-q}^\dagger, \hat{\alpha}_{k_a+q}, \hat{\alpha}_{k_a-q}, \hat{\beta}_{k_b+q}, \hat{\beta}_{k_b-q} \right)^\dagger \quad (3.49)$$

$$\phi_q = \left(\hat{\alpha}_{k_a+q}^\dagger, \hat{\alpha}_{k_a-q}^\dagger, \hat{\beta}_{k_b+q}^\dagger, \hat{\beta}_{k_b-q}^\dagger, \hat{\alpha}_{k_a+q}, \hat{\alpha}_{k_a-q}, \hat{\beta}_{k_b+q}, \hat{\beta}_{k_b-q} \right)^\dagger \quad (3.50)$$

Bozonik parçacık operatörleri (\hat{a}, \hat{a}^\dagger) ve (\hat{b}, \hat{b}^\dagger) ile temsil edilirken bu operatörlere karşılık, ($\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger$) ve ($\hat{\beta}, \hat{\beta}^\dagger$) operatörleri bozonik parçacığımsı operatörleri temsil eder ve aralarında bozonik komütasyon ilişkisi geçerlidir. Bogoliubov dönüşümü altında bozonik parçacık operatörleri, bozonik parçacığımsı operatörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\hat{a}_{k_a+q} = u_{aa}(q)\hat{\alpha}_{k_a+q} - v_{aa}^*(q)\hat{\alpha}_{k_a-q}^\dagger + u_{ab}(q)\hat{\beta}_{k_b+q} - v_{ab}^*(q)\hat{\beta}_{k_b-q}^\dagger \quad (3.51)$$

$$\hat{a}_{k_a-q}^\dagger = u_{aa}^*(q)\hat{\alpha}_{k_a-q}^\dagger - v_{aa}(q)\hat{\alpha}_{k_a+q} + u_{ab}^*(q)\hat{\beta}_{k_b-q}^\dagger - v_{ab}(q)\hat{\beta}_{k_b+q} \quad (3.52)$$

$$\hat{b}_{k_b+q} = u_{ba}(q)\hat{\alpha}_{k_a+q} - v_{ba}^*(q)\hat{\alpha}_{k_a-q}^\dagger + u_{bb}(q)\hat{\beta}_{k_b+q} - v_{bb}^*(q)\hat{\beta}_{k_b-q}^\dagger \quad (3.53)$$

$$\hat{b}_{k_b-q}^\dagger = u_{ba}^*(q)\hat{\alpha}_{k_a-q}^\dagger - v_{ba}(q)\hat{\alpha}_{k_a+q} + u_{bb}^*(q)\hat{\beta}_{k_b-q}^\dagger - v_{bb}(q)\hat{\beta}_{k_b+q} \quad (3.54)$$

Elemanları Bogoliubov genlikleri ($u_{ii}(q), v_{ii}(q)$) ile tanımlanan U ve V matrisleri 4×4 matrisler olarak ifade edilmiştir. Dönüşüm matrisi T ise U ve V matrisleri ile verilir.

Dönüşüm matrisinin biçimi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$T = \begin{pmatrix} U & V \\ V^* & U^* \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Burada U ve V matrislerinin tanımı sırasıyla aşağıda belirtilmiştir.

$$U = \begin{pmatrix} u_{aa}(q) & 0 & u_{ab}(q) & 0 \\ 0 & u_{aa}(-q) & 0 & u_{ab}(-q) \\ u_{ba}(q) & 0 & u_{bb}(q) & 0 \\ 0 & u_{ba}(-q) & 0 & u_{bb}(-q) \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & v_{aa}^*(q) & 0 & v_{ab}^*(q) \\ -v_{aa}^*(-q) & 0 & -v_{ab}^*(-q) & 0 \\ 0 & -v_{ba}^*(q) & 0 & -v_{bb}^*(q) \\ -v_{ba}^*(-q) & 0 & -v_{bb}^*(-q) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Bogoliubov dönüşümü altında ($\psi_q = T\phi_q$) denklem (3.43) Hamiltonyeni aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\hat{H} = E_{GP} + \frac{1}{2} \sum_{q>0} \{ \phi_q^\dagger T^\dagger \mathcal{M} T \phi_q - \text{Tr}[W] \} \quad (3.58)$$

Burada $T^\dagger = \eta T^{-1} \eta$ eşitliği kullanılarak çok parçacık Hamiltonyeni,

$$\hat{H} = E_{GP} + \frac{1}{2} \sum_{q>0} \{ \phi_q^\dagger \eta T^{-1} \eta \mathcal{M} T \phi_q - \text{Tr}[W] \} \quad (3.59)$$

biçiminde yazılabilir. Burada belirtmek gerekir ki,

$$T^{-1} \eta \mathcal{M} T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

köşegen matristir ve

$$T^\dagger \eta T = \eta \quad (3.61)$$

koşulu bozonik parçacığımsı operatörlerinin ($\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger$) ve ($\hat{\beta}, \hat{\beta}^\dagger$) kendi aralarındaki komütasyon ilişkisinin korunmasını garanti etmektedir. Denklem (3.59) ile ifade edilen Bogoliubov Hamiltonyeninin enerji özdeğerleri nümerik olarak elde edilmiştir ve denklem (3.60) koşulunda λ_i ile ifade edilen özdeğerler Bogoliubov enerji özdeğerlerini göstermektedir. Buradaki η matrisinin elemanları, bozonik komütasyon ilişkisi,

$\eta_{ij} = [\psi_{q,i}, \psi_{q,j}^\dagger]$, aracılığıyla tanımlanır ve köşegen bir biçime sahiptir.

$$\eta = \begin{pmatrix} I_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & -I_{4 \times 4} \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Bogoliubov dönüşümü altında köşegenleştirilen denklem (3.59) Hamiltonyeninin öz-değerlerine tekabül eden Bogoliubov uyarılma enerjileri bir karakteristik denklem ile belirlenir.

$$\det(\eta\mathcal{M} - \lambda I) = 0 \quad (3.63)$$

Sonuç olarak, Bogoliubov Hamiltonyeni,

$$H_B = E_B + \sum_{q \neq 0} \left(\epsilon_q^\alpha \hat{\alpha}_{k_a+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_a+q} + \epsilon_q^\beta \hat{\beta}_{k_b+q}^\dagger \hat{\beta}_{k_b+q} \right). \quad (3.64)$$

köşegen biçimde yukarıdaki gibi elde edilir. Bogoliubov taban durum enerjisi,

$$E_B = E_{GP} - \sum_{q \neq 0} \left(\epsilon_q^a + U_a + \epsilon_q^b + U_b - \epsilon_q^\alpha - \epsilon_q^\beta \right) \quad (3.65)$$

ile ifade edilir. Bogoliubov enerji spektrumunu $\epsilon_q^{\alpha,\beta}$, simetrik etkileşimler altında $U_a = U_b = U$,

$$\epsilon_q^{\alpha,\beta} = A_+ + \sqrt{B \pm 2\sqrt{C}} \quad (3.66)$$

yapısındadır ve burada,

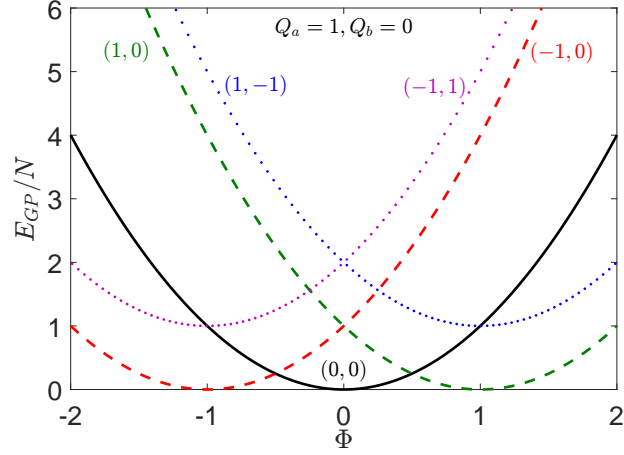
$$A_\pm = q [(k_a - Q_a \Phi) \pm (k_b - Q_b \Phi)] \quad (3.67)$$

$$B = q^4 + 2Uq^2 + A_-^2 \quad (3.68)$$

$$C = U_{ab}^2 q^4 + q^2 (2U + q^2) A_-^2. \quad (3.69)$$

olarak tanımlanmaktadır. Bogoliubov enerji spektrumunu üzerinden sistemin enerjik ve dinamik kararlılıkları incelenmiştir. Bu inceleme bir sonraki bölümde detaylı olarak sunulacaktır.

Şekil 3.5'de biri yüklü $Q_a = 1$ diğeri yüksüz $Q_b = 0$ olan bir yoğunluk karışımının parçacık sayısı N başına düşen GP taban durum enerjisindeki değişim manyetik akının bir fonksiyonu olarak gösterilmektedir. Farklı yoğunluk momentum durumları (k_a, k_b) için GP taban durum enerjilerinin karşılaştırılması etkileşimsiz durum için



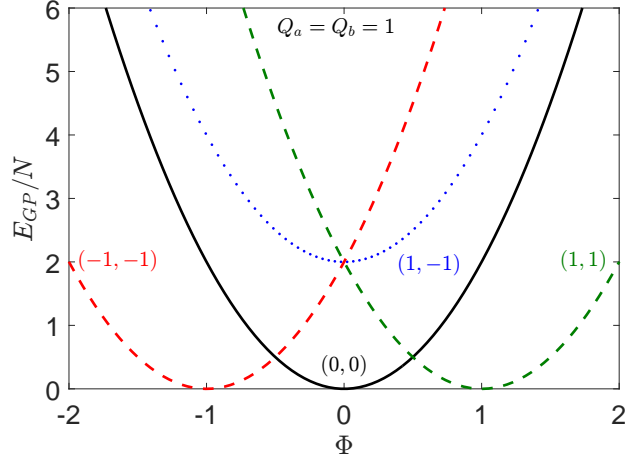
Şekil 3.5: Gross-Pitaevskii taban durum enerjisi manyetik akının bir fonksiyonu olarak parçacık sayısı N başına farklı yüklü bir yoğunluk karışımı için etkileşimsiz durumda hesaplanmıştır. Bileşenlerden biri yüklü $Q_a \neq 0$, diğzerinin ise yüksüz olduğu $Q_b = 0$ bir yoğunluk karışımı dikkate alınmıştır.

hesaplanmıştır. Homojen bir sistemde ortalama alan altında etkileşimliler sadece bir kayma verecektir. Farklı yüklü yoğunluk için dikkate alınan yoğunluk durumları şunlardır; $(k_a, k_b) = (0, 0), (1, 0), (-1, 0), (1, -1), (-1, 1)$. Burada $k_a = 1$ değerli yoğunluk durumu girdap ve $k_a = -1$ değerli yoğunluk durumu ise antigirdap olarak tanımlanmaktadır. Karışımın girdap ($k_a = 1, k_b = 0$) ve antigirdap ($k_a = -1, k_b = 0$) çiftlerinin enerjileri, girdap-antigirdap ($k_a = \pm 1, k_b = \mp 1$) çiftleri ile kıyaslandığında daha düşük enerjiye sahip oldukları elde edilmiştir (Şekil 3.5). Taban durum enerjilerinin minimumlarına göre aşağıdaki gibi bir ilişki tanımlamak mümkündür.

$$E_{GP}^{min}(k_a = \mp 1, k_b = \pm 1) > E_{GP}^{min}(k_a = 1, k_b = 0) = E_{GP}^{min}(k_a = -1, k_b = 0) \quad (3.70)$$

Farklı yüklü yoğunluğun girdap-antigirdap çiftleri daha yüksek enerjili yoğunluk çiftlerine olduklarından yarı kararlı durumlara karşılık gelirler. Girdap ve antigirdap yoğunluk çiftleri ise ortalama alan çerçevesinde kararlı durumları temsil ederler.

Şekil 3.6'de eşit yüklü $Q_a = Q_b$ bir yoğunluk karışımının parçacık sayısı N başına düşen GP taban durum enerjisindeki değişim manyetik akının bir fonksiyonu olarak gösterilmektedir. Eşit yüklü karışım için dikkate alınan yoğunluk durumları şunlardır; $(k_a, k_b) = (0, 0), (1, 1), (-1, -1), (1, -1)$. Girdap-antigirdap ($k_a = 1, k_b = -1$) çiftinin GP taban durum enerjisi, girdap ve anti-girdap çiftleri ile kıyaslandığında daha yüksek enerjiye sahip olduğu hesaplanmıştır. Taban durum enerjilerinin minimumla-



Şekil 3.6: Gross-Pitaevskii taban durum enerjisi manyetik akının bir fonksiyonu olarak parçacık sayısı N başına eşit yüklü $Q_a = Q_b$ bir yoğuşuk karışımı için etkileşimsiz durumda hesaplanmıştır.

rına göre aşağıdaki gibi bir ilişki tanımlanabilir.

$$E_{GP}^{min}(k_a = 1, k_b = 1) = E_{GP}^{min}(k_a = -1, k_b = -1) < E_{GP}^{min}(k_a = 1, k_b = -1) \quad (3.71)$$

Böylece eşit yüklü karışımın kararlı yoğuşuk çiftlerinin girdap $(1, 1)$ ve antigirdap $(-1, -1)$ çiftlerine yoğuşabileceği görülmektedir.

3.2.1 Enerjetik ve Dinamik Kararlılıkların İncelenmesi

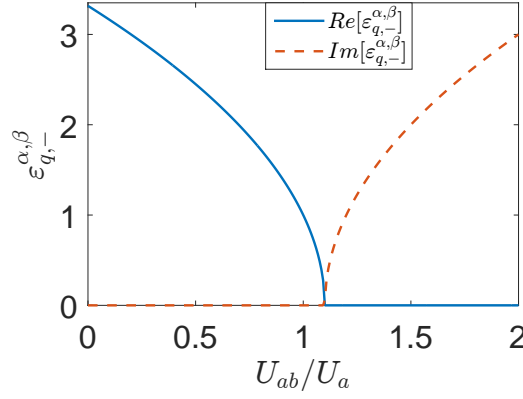
Bu kısımda karışımın Bogoliubov enerji spektrumu öncelikle manyetik alan yokken ve sonrasında manyetik alan etkisi altında elde edilmiştir ve spektrum üzerinden sistemin enerjetik ve dinamik kararlılık sergilediği parametre uzayı incelenmiştir.

İlk önce manyetik alan yokken $\Phi = 0$, diğer bir ifadeyle her iki yoğuşuğunda yüksüz $Q_a = Q_b = 0$ olması halinde Bogoliubov enerji spektrumu belirlenmiştir. Her iki yoğuşuğun eşit kütleli $M_a = M_b = M$ olduğu varsayımı altında Bogoliubov spektrumu,

$$\varepsilon_{q,\pm}^{\alpha,\beta} = \sqrt{q^4 + (U_a + U_b)q^2 \pm q^2 \sqrt{4U_{ab}^2 + (U_a - U_b)^2}}. \quad (3.72)$$

olarak elde edilir. Pozitif etkileşimler altında $\varepsilon_{q,+}^{\alpha,\beta}$ her zaman pozitif reel değerler alırken $\varepsilon_{q,-}^{\alpha,\beta}$ ise etkileşim parametrelerinin büyüklüğüne bağlı olarak sadece reel veya sadece sanal özdeğerlerin oluşabileceği bir aralık verecektir.

Dolayısıyla Bogoliubov enerji spektrumu üzerinden yoğuşuğun enerjetik ve dinamik kararlılık veya kararsızlık sergileyeceği bölgeler belirlenebilir. Enerjetik kararsızlık, enerji spektrumun sıfırı kestiği noktalar, yani $\varepsilon_q^{\alpha,\beta} = 0$ üzerinden tanımlanmaktadır.

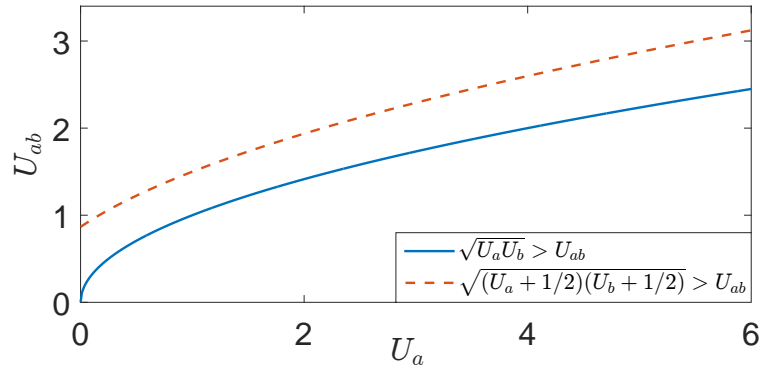


Şekil 3.7: Bogoliubov enerji spektrumu $\varepsilon_{q,-}^{\alpha,\beta}$, simetrik etkileşimler altında etkileşim parametresinin U_{ab}/U_a bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Burada spektrum etkileşim parametresinin büyüklüğüne bağlı olarak ya sadece reel değerlidir ya da sadece yalın sanal değerlidir. Mavi kalın çizgi reel kısmı, turuncu kesikli çizgi ise sanal kısmı göstermektedir. Reel kısmın sonlandığı etkileşim değerinden sonra sanal değerler başlamaktadır.

Spektrumun karmaşık değerler alması ise yoğunluğun dinamik olarak kararsız olduğuna işaret edecektir. Pozitif etkileşimler altında Bogoliubov spektruma ait $\varepsilon_{q,+}^{\alpha,\beta}$ enerjik olarak her zaman kararlı olacaktır.

$$U_a, U_b, U_{ab} > 0, \Rightarrow \varepsilon_{q,+}^{\alpha,\beta} > 0 \quad (3.73)$$

Spektruma ait $\varepsilon_{q,-}^{\alpha,\beta}$ üzerinden ise sistemin dinamik olarak kararlı kalacağı bölge belirlenebilir. Dolayısıyla $\varepsilon_{q,-}^{\alpha,\beta} > 0$ pozitif reel değerli olduğu bölge sistemin dinamik olarak kararlı olduğu bölgedir ve bu aynı zamanda sistemin enerjik olarak da kararlı olduğu bölgeye karşılık gelmektedir. Diğer taraftan spektrumun karmaşık değerleri alabildiği bölge ise sistemin dinamik olarak kararsız olduğu bölgeyi belirtecektir.



Şekil 3.8: Homojen bir sistem için geçerli dinamik kararlılık koşulu ile birlikte manyetik alan yokken yüksüz yoğunluğunun dinamik kararlılık koşulu etkileşim değerinin U_a bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir.

Dinamik kararlılık koşulu Bogolibov spektrumunda $\varepsilon_{q,-}^{\alpha,\beta} > 0$, pozitif değerli olduğu aralık üzerinden aşağıdaki gibi belirlenir.

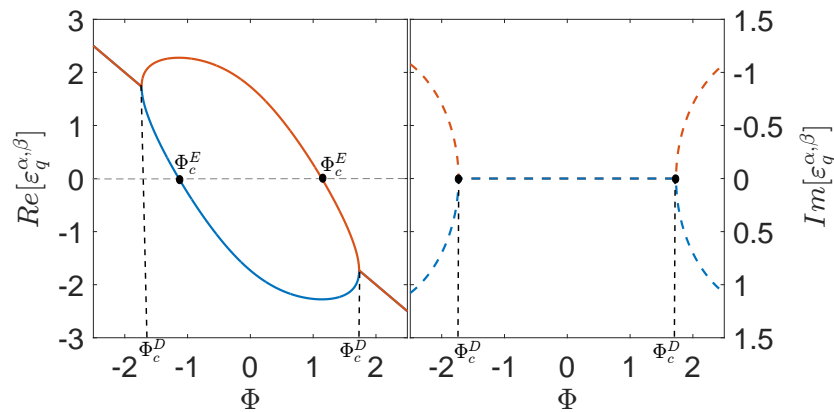
$$q^4 + q^2(U_a + U_b) > q^2 \sqrt{4U_{ab}^2 + (U_a - U_b)^2} \quad (3.74)$$

Bu ifadeden yola çıkarak manyetik alan yokken sistemin en genel dinamik kararlılık koşulu aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\left(U_a + \frac{1}{2}q^2\right) \left(U_b + \frac{1}{2}q^2\right) > U_{ab}^2 \quad (3.75)$$

Homojen bir sistem için geçerli olan dinamik kararlılık koşulu, $U_a U_b > U_{ab}^2$ burada biraz modifiye olmuştur. Ancak halka yarıçapının, bağdaşım uzunluğundan çok büyük olması durumunda ($\xi = R/\sqrt{U}$), sistemi homojen olarak dikkate almak mümkündür ve denklem (3.75) ile ifade edilen dinamik kararlılık koşulu homojen bir sistem için geçerli olan koşula indirgenir.

İkinci aşamada ise yapay manyetik alan etkisi altında yüklü karışımın Bogoliubov enerji spektrumu elde edilmiştir. Her iki yoğunluğun eşit kütleli $M_a = M_b = M$ ve yoğunlukların kendi içlerindeki etkileşimlerinin eşit büyüklükte $U_a = U_b = U$, karşılıklı etkileşimleri ise farklı büyüklükte $U_{ab} \neq U$ olduğu varsayımı altında Bogoliubov enerji spektrumu belirlenmiştir. Bu spektrum denklem (3.66) ile ifade edilmektedir. Manyetik alan etkisi altında önceden belirlenmiş olan Bogoliubov enerji spektrumunun davranışı, enerjetik ve dinamik kararlılık sergilediği parametre uzayı bu kısımda gösterilecektir.



Şekil 3.9: Farklı yüklü bir karışım için Bogoliubov enerji spektrumu manyetik akının bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Enerjetik ve dinamik kararsızlıkların başladığı kritik manyetik akı noktaları Φ_c^E ve Φ_c^D ile gösterilmiştir.

Pozitif etkileşim altında $U > 0$, denklem (3.68) ve (3.69) ile ifade edilen B ve C tanımları tüm etkileşim değerleri, momentum durumları (k_a, k_b) ve yapay yükler

(Q_a, Q_b) için pozitif değerlidir. Karışımın enerjetik ve dinamik kararlılık koşulları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir.

$$A_+ + \sqrt{B - 2\sqrt{C}} > 0 \quad (3.76)$$

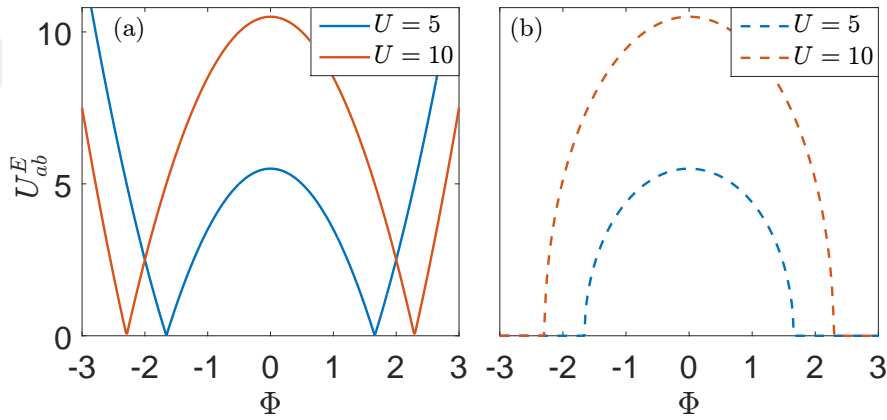
$$B > 2\sqrt{C} \quad (3.77)$$

Yukarıda ifade edilen bu iki koşul ile yoğunlukların karşılıklı etkileşim parametresi U_{ab} arasında doğrudan bir ilişki kurulabilir. Enerjetik ve dinamik kararlılıklar ile işaretlenen U_{ab}^E ve U_{ab}^D iki yeni etkileşim parametresi tanımlanmıştır.

$$U_{ab}^E = \pm \frac{1}{2} \sqrt{[A_+^2 + A_-^2 - (1 + 2U)]^2 + 4A_+^2 A_-^2} \quad (3.78)$$

$$U_{ab}^D = \pm \frac{1}{2} (1 + 2U - A_-) \quad (3.79)$$

Etkileşim parametreleri U_{ab}^E ve U_{ab}^D , manyetik alana, yoğunlukların yapay yüküne ve momentum durumlarına bağlıdır.

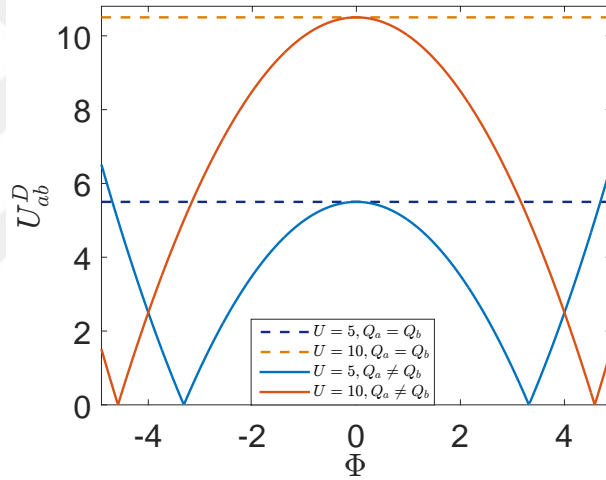


Şekil 3.10: Manyetik akının bir fonksiyonu olarak U_{ab}^E eğrisi (a) eşit yüklü $Q_a = Q_b$ ve (b) farklı yüklü $Q_a \neq Q_b$ iki karışım için elde edilmiştir. İki farklı $U = 5$ ve $U = 10$ etkileşim değeri dikkate alınarak enerjetik kararlılık eğrileri oluşturulmuştur. Burada yoğunlaşma durumu $(0, 0)$ çifti ile verilmiştir.

Şekil 3.9'da farklı yüklü karışımın Bogoliubov enerji spektrumu manyetik akının bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Spektrumun sıfırı kestiği noktalar $\varepsilon_q^{\alpha, \beta} = 0$, enerjetik kararsızlığın başladığı kritik manyetik akı Φ_c^E noktalarını gösterirken spektrumda karmaşık sayıların oluşmaya başladığı $\text{Im}[\varepsilon_q^{\alpha, \beta}] \neq 0$ kritik manyetik akı noktaları Φ_c^D ise dinamik kararsızlığın başladığı noktaları göstermektedir. Burada yoğunlaşma durumu $(0, 0)$ çifti ile verilmiştir.

Şekil 3.10'da eşit yüklü ve farklı yüklü iki karışımın enerjetik kararlılık eğrileri manyetik alana göre gösterilmektedir. Eğrilerin altında kalan bölgeler karışımın enerjik olarak kararlı olduğu bölgelere karşılık gelirken eğrilerin üzerinde kalan bölgeler ise karışımın enerjik olarak kararsız olduğu bölgelere karşılık gelir.

Şekil 3.11'de eşit yüklü ve farklı yüklü iki karışımın dinamik kararlılık eğrileri manyetik alana göre gösterilmektedir. Farklı yüklü karışımının dinamik kararlılık eğrisinin manyetik alana kuvvetlice bağlı olduğu elde edilmişken eşit yüklü karışımın dinamik kararlılık eğrisinin manyetik alana göre değişmediği elde edilmiştir. Eğrilerin altında kalan bölgeler her iki yüklü karışım için de yoğunluğun dinamik olarak kararlı olduğu bölgelere karşılık gelmektedir. Ancak eşit yüklü karışım için manyetik alandan bağımsız olarak sadece belli bir etkileşim değerinin aşılmasıyla birlikte yoğunluğun dinamik olarak kararsız olduğu bölgeye geçiş yaptığı görülmektedir.



Şekil 3.11: Manyetik akının bir fonksiyonu olarak U_{ab}^D eğrisi eşit yüklü $Q_a = Q_b$ ve farklı yüklü $Q_a \neq Q_b$ iki karışım için elde edilmiştir. İki farklı $U = 5$ ve $U = 10$ etkileşim değeri dikkate alınarak dinamik kararlılık eğrileri oluşturulmuştur. Kalın çizgiler farklı yüklü ($Q_a = 1, Q_b = 0$), kesikli çizgiler ise eşit yüklü ($Q_a = Q_b = 1$), yoğunluk karışımlarını göstermektedir. Burada yoğunlaşma durumu $(0, 0)$ çifti ile verilmiştir.

Hem enerjetik hem de dinamik kararlılık eğrileri oluşturulurken iki farklı etkileşim değeri $U = 5$ ve $U = 10$ dikkate alınmıştır. Yüksek etkileşim değerinde kararlılık eğrisinin altında kalan kararlı bölgenin daha geniş bir alanı kapladığı görülmektedir. Dolayısıyla yüksek etkileşim değerlerine gidilmesi karışımın enerjetik veya dinamik kararsızlığını daha yüksek manyetik akı değerlerine kaydırmıştır.

3.2.2 Açısal Momentum Aktarımı

Bu bölümde manyetik alan altında iki bileşenli yoğunluk sisteminin açısal momentum özellikleri incelenmiştir. Açısal momentum L_z , her bir yoğunluk için z eksenine doğrultusunda aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\frac{L_z^a}{\hbar} = \sum_k k \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle = k_a \bar{N}_a + \sum_{q \neq 0} (k_a + q) \langle \hat{a}_{k_a+q}^\dagger \hat{a}_{k_a+q} \rangle \quad (3.80)$$

$$\frac{L_z^b}{\hbar} = \sum_k k \langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \rangle = k_b \bar{N}_b + \sum_{q \neq 0} (k_b + q) \langle \hat{b}_{k_b+q}^\dagger \hat{b}_{k_b+q} \rangle \quad (3.81)$$

Açısal momentum iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısım, her bir bileşene ait yoğunluktan gelen katkıdır, \bar{N}_a ve \bar{N}_b yoğunlukların toplam parçacık sayısını ifade eder ve yukarıdaki ifadelerde belirtilen $k_a \bar{N}_a$ ve $k_b \bar{N}_b$ açısal momentuma yoğunluktan gelen katkıyı göstermektedir. İkinci kısım ise uyarılmış parçacıkların açısal momentuma olan katkısını belirtir ve bu kısım Bogoliubov genlikleri ile ifade edilebilir. Bunun için Bogoliubov yaklaşıklığı altında bosonik parçacık operatörleri bosonik parçacığımsı operatörler cinsinden yeniden düzenlenir. Yukarıdaki ifadelerde yer alan bosonik parçacık operatörlerinin beklenen değerleri $\langle \hat{a}_{k_a+q}^\dagger \hat{a}_{k_a+q} \rangle$ ve $\langle \hat{b}_{k_b+q}^\dagger \hat{b}_{k_b+q} \rangle$, Bogoliubov genlikleri cinsinden aşağıda sırasıyla verilmiştir.

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_{k_a+q}^\dagger \hat{a}_{k_a+q} \rangle &= |u_{aa}(q)|^2 \langle \hat{\alpha}_{k_a+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_a+q} \rangle + |v_{aa}(q)|^2 \langle \hat{\alpha}_{k_a-q} \hat{\alpha}_{k_a-q}^\dagger \rangle \\ &+ |u_{ab}(q)|^2 \langle \hat{\beta}_{k_b+q}^\dagger \hat{\beta}_{k_b+q} \rangle + |v_{ab}(q)|^2 \langle \hat{\beta}_{k_b-q} \hat{\beta}_{k_b-q}^\dagger \rangle \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{b}_{k_b+q}^\dagger \hat{b}_{k_b+q} \rangle &= |u_{ba}(q)|^2 \langle \hat{\alpha}_{k_a+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_a+q} \rangle + |v_{ba}(q)|^2 \langle \hat{\alpha}_{k_a-q} \hat{\alpha}_{k_a-q}^\dagger \rangle \\ &+ |u_{bb}(q)|^2 \langle \hat{\beta}_{k_b+q}^\dagger \hat{\beta}_{k_b+q} \rangle + |v_{bb}(q)|^2 \langle \hat{\beta}_{k_b-q} \hat{\beta}_{k_b-q}^\dagger \rangle \end{aligned} \quad (3.83)$$

Yukarıdaki eşitliklerde $\hat{\alpha}_{k_a \pm q}^{(\dagger)}$ ve $\hat{\beta}_{k_b \pm q}^{(\dagger)}$ terimlerine ait beklenen değerler sıfırdır $\langle \hat{\alpha}_{k_a \pm q}^{(\dagger)} \hat{\alpha}_{k_a \pm q} \rangle = 0$, $\langle \hat{\beta}_{k_b \pm q}^{(\dagger)} \hat{\beta}_{k_b \pm q} \rangle = 0$. Çünkü Bogoliubov taban durumuna etki etmektedirler ve Bogoliubov Hamiltonyeni parçacığımsı sayısını koruyacaktır. Bu sebeple yukarıdaki ifadelerde belirtilmemiştir. Bozonik komütasyon ilişkileri,

$$\hat{\beta}_{k_b \pm q} \hat{\beta}_{k_b \pm q}^\dagger = 1 + \hat{\beta}_{k_b \pm q}^\dagger \hat{\beta}_{k_b \pm q} \quad (3.84)$$

$$\hat{\alpha}_{k_a \pm q} \hat{\alpha}_{k_a \pm q}^\dagger = 1 + \hat{\alpha}_{k_a \pm q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_a \pm q} \quad (3.85)$$

kullanıldığında beklenen değer ifadeleri yeniden düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_{k_a+q}^\dagger \hat{a}_{k_a+q} \rangle &= |u_{aa}(q)|^2 \langle \hat{\alpha}_{k_a+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_a+q} \rangle + |v_{aa}(q)|^2 \left(1 + \langle \hat{\alpha}_{k_a-q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_a-q} \rangle \right) \\ &+ |u_{ab}(q)|^2 \langle \hat{\beta}_{k_b+q}^\dagger \hat{\beta}_{k_b+q} \rangle + |v_{ab}(q)|^2 \left(1 + \langle \hat{\beta}_{k_b-q}^\dagger \hat{\beta}_{k_b-q} \rangle \right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{b}_{k_b+q}^\dagger \hat{b}_{k_b+q} \rangle &= |u_{ba}(q)|^2 \langle \hat{\alpha}_{k_a+q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_a+q} \rangle + |v_{ba}(q)|^2 \left(1 + \langle \hat{\alpha}_{k_a-q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_a-q} \rangle \right) \\ &+ |u_{bb}(q)|^2 \langle \hat{\beta}_{k_b+q}^\dagger \hat{\beta}_{k_b+q} \rangle + |v_{bb}(q)|^2 \left(1 + \langle \hat{\beta}_{k_b-q}^\dagger \hat{\beta}_{k_b-q} \rangle \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

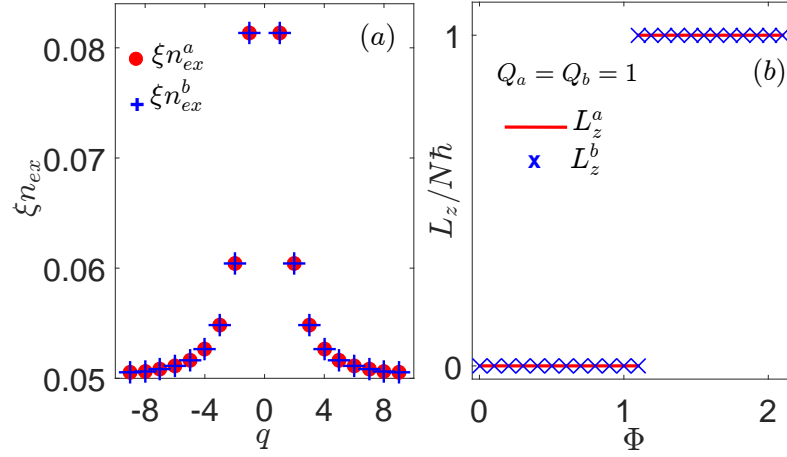
Sıfır sıcaklıkta, $\langle \hat{\alpha}_{k_a \pm q}^\dagger \hat{\alpha}_{k_a \pm q} \rangle = 0$ ve $\langle \hat{\beta}_{k_b \pm q}^\dagger \hat{\beta}_{k_b \pm q} \rangle = 0$ terimlerinden gelen katkıların da sıfır olmasıyla birlikte uyarılmış parçacıklardan açısız momentuma gelecek olan net katkı sadece Bogolibov genliklerinin norm karesi $|v_{ij}(q)|^2$ ile ifade edilir .

$$\frac{L_z^a}{\hbar} = k_a \bar{N}_a + \sum_{q>0} (k_a + q) (|v_{aa}(q)|^2 + |v_{aa}(-q)|^2 + |v_{ab}(q)|^2 + |v_{ab}(-q)|^2) \quad (3.88)$$

$$\frac{L_z^b}{\hbar} = k_b \bar{N}_b + \sum_{q>0} (k_b + q) (|v_{ba}(q)|^2 + |v_{ba}(-q)|^2 + |v_{bb}(q)|^2 + |v_{bb}(-q)|^2) \quad (3.89)$$

Şekil 3.12 ve Şekil 3.13 eşit yüklü ve farklı yüklü yoğunluk karışımlarının açısız momentum özelliklerini göstermektedir. Manyetik alana göre, eşit yüklü ($Q_a = Q_b = 1$) ve farklı yüklü ($Q_a = 1, Q_b = 0$) yoğunluk karışımlarının parçacık başına düşen açısız momentumları hesaplanmıştır ve bileşenlere ait toplam parçacık sayılarının eşit olduğu $N_a = N_b = N$ kabul edilmiştir.

Öncelikle eşit yüklü yoğunluk karışımını inceleyelim (Şekil 3.12). Tek bileşenli yoğunlukta uyarılmış parçacıkların q momentum durumları üzerindeki dağılımının $q = 0$ durumu etrafında simetrik olduğu Şekil 3.4 (b)'de açıkça gösterilmiştir. İki bileşenli ve eşit yüklü yoğunluk karışımında da davranışın benzer olduğu görülmektedir; uyarılmış parçacıkların q momentum durumları üzerine dağılımları simetriktir. Çarpışmalar sebebiyle yoğunluk durumunu terk edip üst enerji durumlarına uyarılan parçacıklar, büyüklükleri aynı ancak işaretleri farklı ($q, -q$) olan momentum çiftleri şeklinde uyarılacaktır. Her bir bileşenin kendi içindeki yoğunluk durumundan uyarılmış enerji seviyelerine çiftler şeklinde uyarılan parçacıklar aynı enerji değerine sahiptir. Uyarılan parçacıkların, toplam açısız momentum değişimine katkıları ise sıfırdır. Dolayısıyla kritik manyetik akı değerine kadar her bir yoğunluğun açısız momentumu sabittir ve yoğunluk durumunun açısız momentum değerine eşittir.

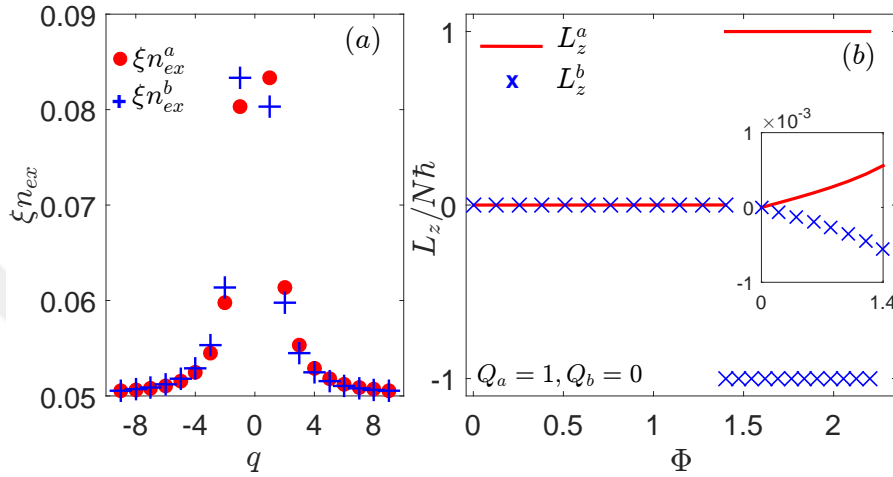


Şekil 3.12: Eşit yüklü bir yoğuşuk karışımı gösterilmektedir. Yoğuşmaların kendi içlerindeki etkileşimleri eşit büyüklükte $U_a = U_b = U = 10$ ve karşılıklı etkileşimleri ise $U_{ab} = 8$ farklı büyüklüktedir. (a) Bağdaşım uzunluğu başına uyarılmış parçacıkların dağılımı q momentum durumlarına göre elde edilmiştir. Uyarılmış parçacıkların q modları etrafındaki dağılımı simetrikdir. (b) Manyetik alanın bir fonksiyonu olarak toplam parçacık sayısı başına toplam açısız momentum $L_z/N\hbar$ elde edilmiştir. Kritik manyetik akı değerinden sonra sistem yeni momentum çiftinde ($k_a = 1, k_b = 1$) yoğuşacaktır. Kritik manyetik akı değerinden önce ise sistemin toplam açısız momentumu sıfırdır.

Farklı yüklü yoğuşuk karışımında uyarılmış parçacıkların q momentum durumları üzerindeki dağılımı yoğuşuk durumu etrafında simetrik değildir. Eşit yüklü yoğuşuk karışımında ortaya çıkan simetrik durum yoğuşuklardan birinin yüklü $Q_a = 1$ değerinin yüksüz $Q_b = 0$ olması halinde, yüklerindeki dengesizlik ve enerjilerinin eşit olmamasından $\epsilon_q^a \neq \epsilon_q^b$ dolayı bozulur. Yüklü bileşende bir parçacık q momentum durumuna uyarıldığında yüksüz bileşende aynı büyüklükte ancak zıt işaretli $-q$ momentum durumuna bir parçacık uyarılır ($q, -q$). Şekil 3.13(a)'da bu davranış açıkça gösterilmektedir. Uyarılmış parçacıkların dağılımdaki bu asimetri bileşenlerin açısız momentum davranışlarını da etkilemektedir. Açısız momentum $L_z^{a,b}$, manyetik alanın bir fonksiyonu olarak Şekil 3.13(b)'de yer alan küçük şekilde gösterilmektedir. Eşit yüklü yoğuşma karışımından farklı olarak, bileşenlerden birinin yüklü diğerinin yüksüz olduğu yoğuşuk karışımında, bileşenlerin açısız momentumu manyetik alana bağlıdır; büyüklük olarak eşit ancak işaretleri farklı olacak şekilde her bir bileşen sıfırdan farklı sonlu bir açısız momentuma sahiptir.

Burada ilginç olan nokta ise başlangıçta manyetik alan ile doğrudan bağlanmayan bileşenin manyetik alan ile ilişkili olarak negatif değerli, sonlu bir açısız momentuma sahip olmasıdır. Bunun sebebi, etkileşimler aracılığıyla manyetik alan ile doğrudan

bağlanan yüklü bileşenin açısal momentumunu yüksüz bileşene aktarmasıdır. Bu aktarım, açısal momentum korunumu prensibi altında başlangıçtaki yoğunlaşma durumunun değerine eşit olacak şekilde gerçekleşecektir, yani bileşenlerin toplam açısal momentumu sıfırdır. Böylece, yüklü bileşen uygulanan manyetik alan ile aynı yönde bir rotasyon davranışı gösterirken aynı zamanda yüksüz bileşenin zıt yönde ivlenerek rotasyonuna neden olmuştur. Bir ölçekte bu uyarılmış parçacıkların davranışındaki asimetriyi de açıklamaktadır.



Şekil 3.13: Farklı yüklü bir yoğunlaşma karışımı gösterilmektedir. Yoğuşmaların kendi içlerindeki etkileşimleri eşit büyüklükte $U_a = U_b = U = 10$ ve karşılıklı etkileşimleri ise $U_{ab} = 8$ farklı büyüklüktedir. (a) Bağdaşım uzunluğu başına uyarılmış parçacıkların dağılımı q momentum durumlarına göre elde edilmiştir. Uyarılmış parçacıkların q modları etrafındaki dağılımı simetrik değildir. (b) Manyetik alanın bir fonksiyonu olarak toplam parçacık sayısı başına toplam açısal momentum $L_z/N\hbar$ elde edilmiştir. Kritik manyetik akı değerinden sonra sistem yeni momentum çiftinde ($k_a = 1, k_b = -1$) yoğunlaşacaktır. Kritik manyetik akı değerinden önce ise sistem kritikle yaklaştıkça artan, sıfırdan farklı ve sonlu bir açısal momentuma sahiptir (Bkz: ek grafik).

Neticede, yüklü bileşenden yüksüz bileşene bir açısal momentum aktarımı hesaplanmıştır ve bu aktarım, halka çevresinde bileşenlerin birbirlerine göre zıt doğrultularda ivlenmesine neden olmuştur. Böylece manyetik alanı görmeyen yüksüz bileşenin, manyetik alan ile bağlanması ve yüklü bileşen tarafından sürüklenmesi sağlanmıştır. Bu sürüklenme olayının sadece bileşenlerin ayrık durumda bulunması halinde gerçekleşebilecek bir olay olmadığını aynı zamanda karışık durumda bulunan bileşenler için de gerçekleşebileceği gösterilmiştir.

Şekil 3.12 ve Şekil 3.13'te belli bir manyetik akı değerinden sonra açısal momentumda bir sıçrama gerçekleştiği görülmektedir. Bu manyetik akı değeri, Bogoliubov enerji spektrumunda negatif özdeğerlerin oluşmaya başlaması ile ilintilidir ve sistem

bu değerden sonra enerjetik olarak kararlı olmayacaktır. Bogoliubov spektrumunun sıfırı kestiği manyetik akı değeri kritik manyetik akı değerini belirleyecektir. Sistem kritik manyetik akı değerinden sonra enerji açısından kararlı olduğu yeni bir momentum çiftinde yoğunlaşacaktır. Yoğuşuk karışımının hangi momentum durum çiftinde yoğunlaşacağını faz diyagramları tarafından belirlenmektedir. Bundan sonraki bölümde sistemin faz diyagramları ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bogoliubov Yaklaşımının Geçerliliğin Kontrol Edilmesi

Bu kısımda Bogoliubov yaklaşımının geçerli olduğu limiti kontrol etmek amacıyla uyarılmış parçacıkların sayısı hesaplanmıştır ve bu sayının toplam parçacık sayısına kıyasla çok küçük kaldığı kontrol edilmiştir. Uyarılmış parçacıkların sayı yoğunluğu, $\xi = R/\sqrt{U}$, bağdaşım uzunluğu cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$n_{ex}^i = \frac{N_e^i}{L} = \frac{1}{2\pi R} \sum_{q \neq 0} [|v_{ja}(q)|^2 + |v_{jb}(q)|^2] = \frac{1}{2\pi\sqrt{U}} \frac{N_e^i}{\xi} \quad (3.90)$$

Eşit ve farklı yüklü karışımlar ele alındığında Şekil 3.12 (a) ve Şekil 3.13 (a)'da bağdaşım uzunluğu başına uyarılmış parçacık sayı yoğunluğu $\xi n_{ex} \simeq 0.1$ ise $U = 10$ etkileşim değeri için $N_e \simeq 2$ olarak elde edilmektedir. Saçılma uzunluğu $a_s = 10\text{nm}$ olarak dikkate alındığında ($U = gN$), $N = 10^3$ parçacık sayısı elde edilmiştir ve toplam parçacık sayısı başına uyarılmış parçacıkların sayısı, $N_e/N \simeq 2 \times 10^{-3}$ olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla çalıştığımız etkileşim değerinde $\xi n_{ex} \ll 1$ koşulu dikkate alındığında Bogoliubov yaklaşımının geçerliliği teyit edilmiştir.

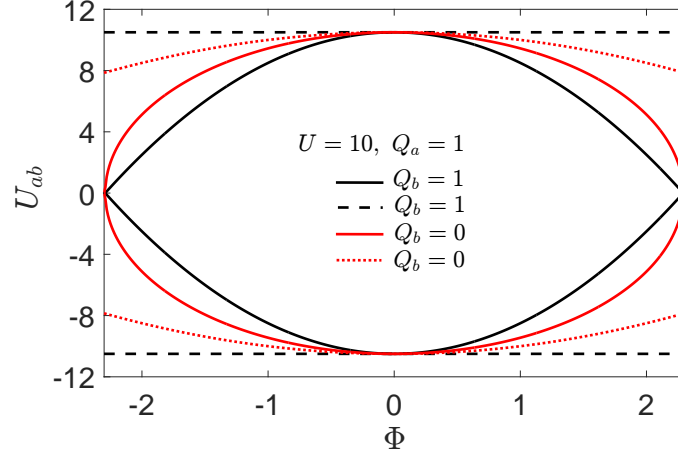
Deneysel parametreler [85], [91], [96] dikkate alındığında, halka yarıçapı $R = 12 - 25\mu\text{m}$, arakesit yarıçapı $r \simeq 5\mu\text{m}$, $U = 10$ etkileşim değeri ve 10^3 parçacık sayısı için saçılma uzunluğu $a_s = 10\text{nm}$ olarak elde edilmiştir.

3.2.3 Faz Diyagramı

Faz diyagramı, Bose-Einstein yoğunluğunun hem enerjetik hem de dinamik kararlılık açısından incelenmesine olanak sağlayan, sistemin enerjetik ve dinamik kararlılık eğrilerini belirleyen bir parametre uzayıdır. Bu bölümde manyetik alan - etkileşim parametresi düzleminde $\Phi - U_{ab}$ sistemin faz diyagramı oluşturulmuştur.

Eşit yüklü ve farklı yüklü yoğunlaşma karışımlarının faz diyagramı Şekil 3.14'de gösterilmektedir. Hem etkileşimin hem de manyetik alanın negatif ve pozitif değerlerine göre $U_{ab} < 0, U_{ab} > 0$ ve $\Phi < 0, \Phi > 0$ enerjetik ve dinamik kararlılık sınırları,

eşit ve farklı yüklü yoğunluk karışımları için elde edilmiştir. Karışımların başlangıçta ($k_a = 0, k_b = 0$) değerli momentum durumlarına yoğunlaştığı varsayılmıştır.

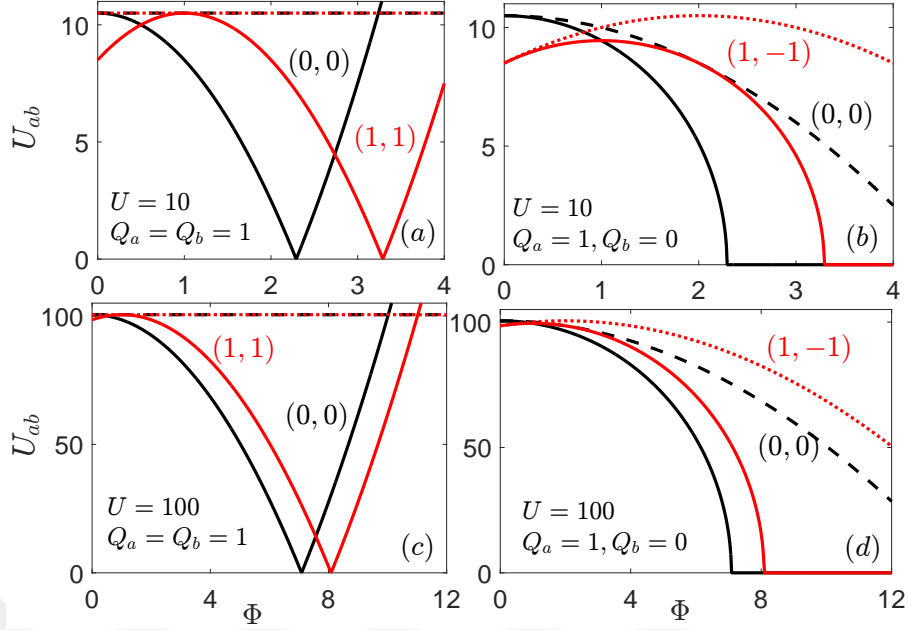


Şekil 3.14: Farklı yüklü ve eşit yüklü yoğunluk karışımlarının faz diyagramı birlikte gösterilmiştir. Kalın çizgiler enerjetik kararlılık sınırlarını U_{ab}^E , çizgili çizgiler ise dinamik kararlılık sınırlarını U_{ab}^D belirtir. Enerjetik kararlılık sınırları Bogoliubov enerji spektrumunun sıfırları ile belirlenirken dinamik kararlılık sınırları ise enerji spektrumunda karmaşık sayıların oluştuğu noktalar ile belirlenmektedir.

Öncelikle enerjetik kararlılık sınırlarını inceleyelim. Manyetik alan uygulanmaya başlandığı andan itibaren sistemin karşılaşacağı ilk sınır, enerjetik kararlılık sınırıdır. Bu sınırın altında kalan geniş bölge sistemin enerjetik olarak kararlı olduğu bölgedir ve sınırın üzerinde sistem enerjetik olarak kararsızdır. Enerjetik kararlılık sınırı dikkate alındığında etkileşim parametresi ve manyetik alan arasında ters ilişki olduğu görülmektedir. Sistem enerjetik olarak yüksek etkileşim ve küçük manyetik alan değerinde veya düşük etkileşim ve yüksek manyetik alan değerinde kararlı olacaktır.

Dinamik kararlılık sınırlarının ise enerjetik kararlılık sınırlarından daha sonra oluştuğu elde edilmiştir. Karışım, enerjetik kararlılık sınırını aştıktan sonra enerjetik olarak kararsız ancak dinamik olarak kararlı olduğu bir bölgeye geçiş yapmaktadır. Bu yarı kararlı bölge dinamik kararlılık sınırı ile sınırlandırılmıştır. Dinamik kararlılık sınırının da aşılması ile birlikte sistem artık dinamik olarak kararsızdır ve bu Bogoliubov enerji spektrumunda sanal sayıların oluşması anlamına gelmektedir. Eşit yüklü yoğunluk karışımının dinamik kararlılık sınırı manyetik alandan bağımsızdır ve sadece etkileşim parametresine bağlıdır $U_{ab} > U$. Farklı yüklü yoğunluk karışımı ise manyetik alana açıkça bağlıdır. Yükler arasındaki dengesizlik sistemin davranışını belirgin derecede değiştirmektedir. Eşit yüklü yoğunluk karışımında bileşenler manyetik alanı eşit büyüklükte hissederken, farklı yüklü yoğunluk karışımında ise yükün büyüklüğüne bağlı

olarak manyetik alan bileşen üzerinde etki edecektir.



Şekil 3.15: Eşit yüklü ve farklı yüklü yoğunluk karışımlarının farklı yoğunlaşma durumları (k_a, k_b) için enerjetik ve dinamik kararlılık sınırları manyetik alan - etkileşim parametresi $\Phi - U_{ab}$ düzleminde gösterilmektedir. Kalın çizgiler U_{ab}^E sınırlarını, çizgili çizgiler U_{ab}^D sınırlarını belirtir. Sol tarafta yer alan sütun eşit yüklü yoğunlaşma karışımına ait faz diyagramlarını $U = 10$ (üst satır) ve $U = 100$ (alt satır) etkileşim değerlerinde belirten sağ tarafta yer alan sütun ise farklı yüklü yoğunlaşma karışımına ait faz diyagramlarını $U = 10$ (üst satır) ve $U = 100$ (alt satır) etkileşim değerlerinde belirtmektedir.

Manyetik alan etkisi altında iki bileşenli yoğunluk karışımının açısal momentumu, belli bir kritik manyetik akı değerini aştıktan sonra sıçrama davranışı göstermektedir (Bkz: Şekil 3.12 ve Şekil 3.13). Bu davranışın sebebi sistemin artık enerjetik olarak kararlı olmadığı bir parametre uzayını işgal etmesidir. Neticede karışım başlangıçtaki momentum çiftlerinde (k_a^{eski}, k_b^{eski}) artık enerjetik olarak kararlı değildir ve sistem enerjetik olarak kararlı olduğu yeni bir momentum çiftine yoğunlaşmalıdır (k_a^{yeni}, k_b^{yeni}) . Eşit ve farklı yüklü karışım çiftleri için, yoğunluklar başlangıçta $(k_a = 0, k_b = 0)$ momentum durumlarına yoğunlaşmıştır. Kritik manyetik akı değerinden sonra ise sistemin enerjetik olarak kararlı olduğu yeni momentum durumları Bogoliubov spektrumu, yani U_{ab}^E eğrileri üzerinden belirlenebilir. Şekil 3.15'de U_{ab}^E ve U_{ab}^D sınırları eşit yüklü ve farklı yüklü karışımlar için iki farklı etkileşim değerinde $U = 10$ ve $U = 100$ gösterilmektedir. İlk enerjetik kararlılık sınırın aşılmasından sonra sistemin enerjetik olarak kararlı olduğu yeni yoğunlaşma durumları, eşit yüklü karışım için $(k_a = 1, k_b = 1)$, farklı yüklü karışım için $(k_a = 1, k_b = -1)$ momentum durumları olarak faz diyagramı üze-

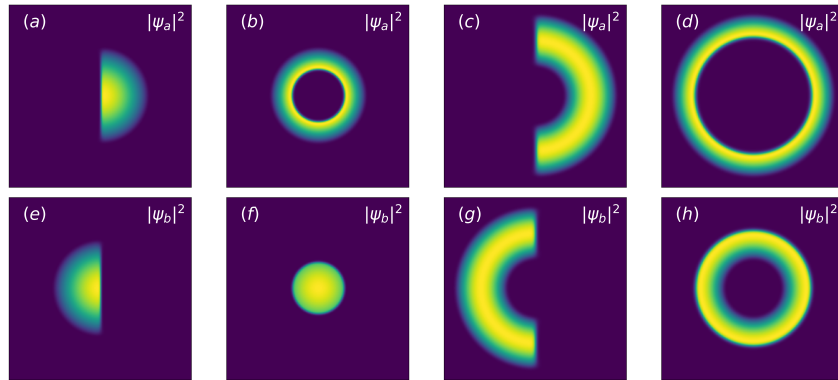
rinde hesaplanmıştır. Dolayısıyla eşit yüklü karışım için girdap çözümleri ve farklı yüklü karışım için girdap ile antigirdap çözümleri yeni yoğunlaşma durumlarına karşılık gelmektedir. Ayrıca yüksek etkileşim değeri için sistemin davranışının niteliksel olarak değişmediği sadece kritik manyetik akı değerinin, yani enerjetik kararlılık sınırının ötelendiği gösterilmiştir.

Karışım çiftlerinin enerjetik ve dinamik kararsızlıklarının incelenmesi bir diğer taraftan sisteme girdap endükte etme koşullarının belirlenmesinde yardımcı olmaktadır. Dolayısıyla farklı yüklü karışım ele alındığında hem enerjetik hem de dinamik olarak yüklü bileşenden yüksüz bileşene girdap endüksiyonunun gerçekleşebileceği ve bileşenlerin halka etrafında zıt doğrultularda dönmesine sebep olabileceği elde edilmiştir. Bir boyutta bir halka potansiyeli ele alındığından girdap endüksiyonu bileşenler arası etkileşimin işaretinden bağımsız olarak gerçekleşecektir, yani sistem üzerinde niteliksel olarak çekici ve itici etkileşimlerin davranışı aynı olacaktır (Bkz: Şekil 3.14).

4 Yüklü İki Bileşenli Üstün Akışkanlar Karışımında Faz Ayrışmaları

İki bileşenli karışımların yoğunluk dağılımları etkileşim enerjilerinin şiddetine ve aralarındaki ilişkiye bağlı olarak farklı durumlar ortaya çıkarabilir. Bu durumlar itici etkileşimlere özgü olarak örtüşük ve ayrışık faz durumlarıdır. Örtüşük faz durumu, bileşen içi etkileşimlerinin geometrik ortalamasının bileşenler arası etkileşimden büyük olduğu limit durumuna karşılık gelir ve bileşenler işgal ettikleri fiziksel uzayda karışık olarak bulunabilirler. Ayrışık faz durumu ise bileşenler arası etkileşimin, bileşen içi etkileşimlerin geometrik ortalamasından büyük olduğu limit durumuna karşılık gelirken bu limitte sadece tek bir bileşen tarafından işgal edilen uzaysal bölgeler oluşmaktadır, yani bileşenler örtüşmeyen uzaysal bölgelere ayrışırlar.

Yüklü iki bileşenli Bose gazı karışımında ayrışık faz durumları açısallık ve radyal olmak üzere iki farklı konfigürasyon altında gösterilebilir. Bu çalışmada ele alınan disk ve Corbino geometrileri için Şekil 4.1'de radyal ve açısallık konfigürasyonların yoğunluk dağılımları gösterilmiştir. Radyal konfigürasyon için bileşenlerden biri merkeze doğru disk veya halka şeklinde toplanırken diğer bileşen merkeze toplanan bileşeni bir halka biçiminde çevrelemektedir. Açısallık konfigürasyonunda ise bileşenler iki yarım disk veya iki yarım halka şeklinde birbirlerinden ayrışırlar.



Şekil 4.1: Disk ve Corbino geometrilerinde radyal ve açısallık olmak üzere ayrışık faz konfigürasyonları gösterilmiştir.

Bu çalışmada, düzgün bir manyetik alan altında yüklü iki bileşenli karışımın ayrışık faz durumları ve rotasyonel özellikleri ortalama alan yaklaşımı çerçevesinde Gross-Pitaevskii (GP) yaklaşımı ve Thomas-Fermi (TF) yaklaşımı dikkate alınarak incelenmiştir. Etkileşimlerin şiddetine ve rotasyon parametresinin büyüklüğüne bağlı olarak sistemin enerjetik olarak avantajlı olduğu taban durum konfigürasyonu belirlenirken GP ve TF enerjileri karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmanın tutarlı olabilmesi ve TF yaklaşımı altında doğru konfigürasyonun seçilebilmesi için arayüzey enerjisi yerel yoğunluk yaklaşımı çerçevesinde hesaplanmıştır ve TF yaklaşımına eklenerek karışımın doğru taban durumu belirlenmiştir.

Etkileşimlerin bir fonksiyonu olarak ayrışık faz durumları incelendiğinde konfigürasyonlar arası geçişin bileşenler içi etkileşim simetrisinin kırılmasıyla gerçekleşebileceği gösterilmiştir. Tuzağın geometrisi ise ancak asimetik bir etkileşimin var olduğu durumda faz geçişleri için etkili bir faktör haline gelmektedir. Ayrıca sistemin etkileşim parametreleri düzleminde faz diyagramı oluşturularak ayrışık durumların enerjetik açıdan avantajlı olduğu bölgeler belirlenmiştir.

Ayrışık faz durumunda bileşenlerin yoğunluk dağılımlarındaki farklılık aynı zamanda karışımın rotasyonel özelliklerini de etkileyecektir. Açılal ayrışma durumunda üstün bir akışkan özelliği olan dolaşım kuantizasyon koşulu kırılmaktadır ve böylece bileşenlerin dönmeye göre açılal momentumu sürekli olarak elde edilmektedir. Buna karşın radyal konfigürasyonda dolaşım kuantizasyon koşulu kırılmadığından bileşenlerin açılal momentum değerleri kesiklidir.

4.1 Yapay Manyetik Alan Altında Bose-Einstein Yoğuşuğu

Manyetik alan etkisinde yüklü iki bileşenli Bose-Einstein yoğuşuğu ortalama alan yaklaşıklığı çerçevesinde Gross-Piteavskii (GP) denklemi ile tasvir edilebilir.

$$i\hbar \frac{\partial \psi_a}{\partial t} = \left[\frac{1}{2M_a} (\mathbf{p} - Q_a \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + V_a(\mathbf{r}) + g_a^{2D} |\psi_a|^2 + g_{ab}^{2D} |\psi_b|^2 \right] \psi_a \quad (4.1)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_b}{\partial t} = \left[\frac{1}{2M_b} (\mathbf{p} - Q_b \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + V_b(\mathbf{r}) + g_b^{2D} |\psi_b|^2 + g_{ab}^{2D} |\psi_a|^2 \right] \psi_b \quad (4.2)$$

Bileşenlerin yapay yükleri Q_a , Q_b , kütleleri M_a , M_b ile gösterilmektedir. Bileşenlerin yoğuşmuş parçacık sayılarının eşit olduğu $N_a = N_b = N$ varsayılacaktır. Dış tuzak

potansiyeli aşağıda ifade edildiği gibi,

$$V_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M_j [\omega_\perp^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 + \omega_z^2 z^2], \quad j = a, b \quad (4.3)$$

z doğrultusundaki tuzak frekansı ω_z ve radyal doğrultudaki tuzak frekansı $\omega_\perp = \omega_x = \omega_y$ olmak üzere \mathbf{r}_0 parametresi ile belirtilir. Burada z doğrultusundaki tuzak frekansının hem radyal doğrultudaki tuzak frekansından $\omega_z \gg \omega_\perp$ hem de termal enerjiden çok daha büyük olduğu $\omega_z \gg k_B T$ varsayımı altında karışımın eksen doğrultusunda sıkıca tuzaklandığı varsayılmaktadır. Sistem iki boyutta, aşağıdaki efektif tuzak potansiyeli ile ele alınacaktır.

$$V_{\perp,j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M_j \omega_\perp^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2, \quad j = a, b \quad (4.4)$$

Burada $\mathbf{r}_0 = 0$ değeri bir disk geometriyi ve sonlu $\mathbf{r}_0 \neq 0$ ise Corbino geometrisini temsil etmektedir.

Ek B bölümünde üç boyutlu bir sistemden etkin olarak iki boyutlu bir sisteme geçiş anlatılmıştır. Dolayısıyla iki boyutta bileşenlerin kendi içlerindeki etkileşim enerjileri,

$$g_a^{2D} = \sqrt{8\pi} \frac{\hbar^2}{M_a l_z} a_{s,a}, \quad g_b^{2D} = \sqrt{8\pi} \frac{\hbar^2}{\sqrt{M_a M_b} l_z} a_{s,b} \quad (4.5)$$

ve karşılıklı etkileşim enerjisi,

$$g_{ab}^{2D} = \sqrt{2\pi} \hbar^2 \left(\frac{M_a + M_b}{M_a M_b} \right) \frac{a_{s,ab}}{l_z} \quad (4.6)$$

üç boyuttaki saçılma uzunlukları, $a_{s,a}$, $a_{s,b}$, $a_{s,ab}$; ve $l_z = \sqrt{\hbar/M\omega_z}$ karakteristik harmonik salıncı uzunluğu ile tanımlanmaktadır. Kütlelerin eşit olduğu $M_a = M_b = M$ varsayımı altında iki boyutta etkileşim enerjileri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$g_a^{2D} = \sqrt{8\pi} \frac{\hbar^2}{M l_z} a_{s,a}, \quad g_b^{2D} = \sqrt{8\pi} \frac{\hbar^2}{M l_z} a_{s,b}, \quad g_{ab}^{2D} = \sqrt{8\pi} \frac{\hbar^2}{M l_z} a_{s,ab} \quad (4.7)$$

Eşit kütleli karışımın toplam enerjisi,

$$\begin{aligned} E[\psi_a, \psi_a^*, \psi_b, \psi_b^*] &= \int d^2\mathbf{r} \frac{1}{2M} (\mathbf{p} - Q_a \mathbf{A}(\mathbf{r})) \psi_a^* \cdot (\mathbf{p} - Q_a \mathbf{A}(\mathbf{r})) \psi_a \\ &+ \int d^2\mathbf{r} \frac{1}{2M} (\mathbf{p} - Q_b \mathbf{A}(\mathbf{r})) \psi_b^* \cdot (\mathbf{p} - Q_b \mathbf{A}(\mathbf{r})) \psi_b \\ &+ \int d^2\mathbf{r} \left[\left(V_\perp(\mathbf{r}) + \frac{g_a^{2D}}{2} |\psi_a|^2 \right) |\psi_a|^2 + \left(V_\perp(\mathbf{r}) + \frac{g_b^{2D}}{2} |\psi_b|^2 \right) |\psi_b|^2 \right] \\ &+ g_{ab}^{2D} \int d^2\mathbf{r} |\psi_a|^2 |\psi_b|^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

yukarıdaki gibi ifade edilebilir. Bileşen kütlelerinin eşit olduğu varsayıldığından sistem radyal isotropik $V_{\perp,a}(\mathbf{r}) = V_{\perp,b}(\mathbf{r}) = V_{\perp}(\mathbf{r})$ bir tuzak potansiyeli etkisinde olacaktır. Karışım z doğrultusu boyunca düzgün bir yapay manyetik alan $\mathbf{B} = B\hat{z}$ altındadır. Dolayısıyla z doğrultusunda düzgün manyetik alanı verecek olan vektör potansiyeli simetrik ayarda aşağıdaki gibi seçildiğinde,

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{r}}{2} \quad (4.9)$$

ve iki boyutta polar koordinatlarda Laplace operatörünün ifadesi kullanılarak,

$$\nabla_{\perp}^2 \equiv \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta}^2 \quad (4.10)$$

denklem (4.1) ve (4.2) ile ifade edilen GP denklem çifti aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$i\hbar\frac{\partial\psi_a}{\partial t} = \left[\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla_{\perp}^2 + i\hbar\omega_a\partial_{\theta} + \frac{1}{2}M\omega_a^2r^2 + \frac{1}{2}M\omega_{\perp}^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 + g_a^{2D}|\psi_a|^2 + g_{ab}^{2D}|\psi_b|^2 \right] \psi_a \quad (4.11)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_b}{\partial t} = \left[\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla_{\perp}^2 + i\hbar\omega_b\partial_{\theta} + \frac{1}{2}M\omega_b^2r^2 + \frac{1}{2}M\omega_{\perp}^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 + g_b^{2D}|\psi_b|^2 + g_{ab}^{2D}|\psi_a|^2 \right] \psi_b \quad (4.12)$$

Yukarıda verilen ψ_a ve ψ_b yoğunlaşma dalga fonksiyonları, radyal uzunluk r , azimut açısı θ ve zaman t 'ye bağlıdır $\psi_j = \psi_j(r, \theta, t)$. Burada ω_j siklotron frekansının yarısı olarak tanımlanmaktadır.

$$\omega_j = \frac{Q_j B}{2M} \quad (4.13)$$

Bu ω_j frekansı, bileşenlerin yapay yükleri ve manyetik alanın şiddeti ile doğru ve kütle ile ters orantılı olan bir niceliktir.

Bu seviyede GP denklemlerini boyutsuz hale getirelim. Enerji, zaman, uzunluk ve dalga fonksiyonu aşağıda belirtilen büyüklükler ile ölçeklendirilmiştir.

$$E = \hbar\omega_{\perp}\tilde{E}, \quad t = \frac{\tilde{t}}{\omega_{\perp}}, \quad r = l_{\perp}\tilde{r}, \quad \psi_j = \frac{\sqrt{N}}{l_{\perp}}\tilde{\psi}_j \quad (4.14)$$

Burada l_{\perp} radyal doğrultuda karakteristik harmonik salınıcı uzunluğunu $l_{\perp} = \sqrt{\hbar/M\omega_{\perp}}$ göstermektedir. Denklem (4.11) ve (4.12) ile verilen GP denklem çifti, ölçekli nicelikler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$i\frac{\partial\psi_a}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}\nabla_{\perp}^2 - \Omega_a L_z + \frac{1}{2}\Omega_a^2 r^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 + U_a|\psi_a|^2 + U_{ab}|\psi_b|^2 \right] \psi_a \quad (4.15)$$

$$i\frac{\partial\psi_b}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}\nabla_{\perp}^2 - \Omega_b L_z + \frac{1}{2}\Omega_b^2 r^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 + U_b|\psi_b|^2 + U_{ab}|\psi_a|^2 \right] \psi_b \quad (4.16)$$

Burada L_z , z doğrultusundaki ölçeklenmiş açısız momentum operatörünü temsil eder $L_z = -i\partial_{\theta}$. Bileşenlerin yük bilgileri boyutsuz Ω_j niceliğine aktarılmıştır ve tanımı aşağıda verilmektedir.

$$\Omega_j = \frac{Q_j B}{2M\omega_{\perp}} \quad (4.17)$$

Yüklü iki bileşenli Bose gazında Ω_j parametresi rotasyona karşılık gelen parametre olarak isimlendirilir. Bu enerji biriminde etkileşim enerjileri sırasıyla aşağıda verilmektedir.

$$U_a = \sqrt{8\pi} N \frac{a_{s,a}}{a_z}, \quad U_b = \sqrt{8\pi} N \frac{a_{s,b}}{a_z}, \quad U_{ab} = \sqrt{8\pi} N \frac{a_{s,ab}}{a_z} \quad (4.18)$$

Bileşenlerin kimyasal potansiyelleri μ_a ve μ_b ile gösterildiğinde zamana bağlı GP denklem çiftinin durağan çözümleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\psi_a(r, \theta, t) = \psi_a(r, \theta) e^{-i\mu_a t} \quad (4.19)$$

$$\psi_b(r, \theta, t) = \psi_b(r, \theta) e^{-i\mu_b t} \quad (4.20)$$

Yukarıdaki çözümler denklem (4.15) ve (4.16) ile ifade edilen zamana bağlı GP denklem çiftinde yerine yazıldığında aşağıdaki gibi zamandan bağımsız GP denklem çifti elde edilir.

$$\mu_a \psi_a = \left(-\frac{1}{2}\nabla_{\perp}^2 - \Omega_a L_z + \frac{1}{2}\Omega_a^2 r^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 + U_a|\psi_a|^2 + U_{ab}|\psi_b|^2 \right) \psi_a \quad (4.21)$$

$$\mu_b \psi_b = \left(-\frac{1}{2}\nabla_{\perp}^2 - \Omega_b L_z + \frac{1}{2}\Omega_b^2 r^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 + U_b|\psi_b|^2 + U_{ab}|\psi_a|^2 \right) \psi_b \quad (4.22)$$

Sanal Zaman Ötelemesi

Gross-Pitaveskii denkleminin taban durumunun belirlenmesi için kullanılacak metodlardan biri, sanal zaman ötelemesi metodudur. Hamiltonyen operatörü \hat{H} ile tanımlanan bir sistemi dikkate aldığımızda sanal zamanda $t = -i\tau$ için bu sistemin zamanda öteleyici operatörü, $e^{-\hat{H}\tau}$ ile ifade edilmektedir. Bu şekilde sönümlü üssel bir fonksiyon ile tanımlanan sanal zaman evrimi operatörü, yüksek enerjili durumlar için daha çok sönümlenecektir. Taban durum için referans enerjisi ≥ 0 olarak kabul edilmiştir.

Fonksiyonun tamamen sıfıra giderek sönümlenmemesi için her bir sonlu, küçük sanal zaman aralıklarında dalga fonksiyonu yeniden normalize edilmelidir.

Bu yöntem için taban durumu bileşeni sıfırdan farklı bir başlangıç çözümüne ihtiyaç vardır. Dalga fonksiyonu, \hat{H} Hamiltonyeninin, E_i enerjili ϕ_i öz durumlarının bir süperpozisyonu olarak yazıldığında,

$$\psi(x, 0) = \sum_i a_i \phi_i(x) \quad (4.23)$$

aşağıdaki gibi

$$\psi(x, \tau) = e^{-\tau \hat{H}/\hbar} \psi(x, 0) = \sum_i a_i \phi_i(x) e^{-\tau E_i/\hbar} \quad (4.24)$$

ifade edilebilir. Taban durumun enerjisi E_0 , diğer durumların enerjilerinden her zaman daha küçüktür $E_0 < E_i$, ($i > 0$). Bu süreçte taban durumu yavaş sönümlenirken yüksek enerjili durumlar hızlı sönümleneceklerdir ve böylece dalga fonksiyonu en düşük enerjili taban durumuna evrilecektir.

Bu çalışmada, denklem (4.15) ve (4.16) ile verilen GP denklemleri, sanal zaman ötelemesi metodu ile nümerik çözülmüştür. Başlangıç noktası olarak Thomas-Fermi yaklaşımı çerçevesinde belirlenecek olan ayrışık bileşen yoğunlukları (denklem (4.46) - (4.47)) dikkate alınmıştır.

4.2 Thomas Fermi Yaklaşımı

Bu kısımda atomik Bose gazı karışımının özellikleri TF yaklaşımı çerçevesinde incelenmiştir. TF yaklaşımı, tek bileşenli bir yoğunluk dikkate alındığında yüksek parçacık sayısı limitinde, $Na_s/l_\perp \gg 1$ geçerlidir. Bu durumda kinetik enerji terimi, etkileşim ve potansiyel enerji terimlerine kıyasla ihmal edilebilmektedir. Ayrıca yukarıda ifade edilen koşul Bose gazı karışımının bileşenlerine ayrı ayrı olarak uygulandığında TF yaklaşımı geçerliliğini koruyacaktır. Bu yaklaşımın önemli bir avantajı, diferansiyel GP denklemlerini cebirsel denklemlere indirgeyerek çözümü kolaylaştırmasıdır.

TF yaklaşımı altında karışımın üstün akışkan rotasyonel özelliklerini bir ölçüde inceleyebilmek için aşağıdaki gibi bir çözüm önerisi dikkate alınmıştır.

$$\psi_a(r, \theta) = \phi_a(r) e^{i l_a \theta} \quad (4.25)$$

$$\psi_b(r, \theta) = \phi_b(r) e^{i l_b \theta} \quad (4.26)$$

Bu çözümler denklem (4.21) ve (4.22) ile verilen zamandan bağımsız GP denklem çiftinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \mu_a \phi_a(r) &= \left[-\frac{1}{2} \nabla_r^2 + \frac{l_a^2}{2r^2} - \Omega_a l_a + \frac{1}{2} \Omega_a^2 r^2 + \frac{1}{2} (r - r_0)^2 \right] \phi_a(r) \\ &+ U_a |\phi_a(r)|^2 \phi_a(r) + U_{ab} |\phi_b(r)|^2 \phi_a(r) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \mu_b \phi_b(r) &= \left[-\frac{1}{2} \nabla_r^2 + \frac{l_b^2}{2r^2} - \Omega_b l_b + \frac{1}{2} \Omega_b^2 r^2 + \frac{1}{2} (r - r_0)^2 \right] \phi_b(r) \\ &+ U_b |\phi_b(r)|^2 \phi_b(r) + U_{ab} |\phi_a(r)|^2 \phi_b(r) \end{aligned} \quad (4.28)$$

denklem kümesi elde edilir. Burada $\nabla_r^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r$ sadece radyal türevleri içermektedir. Bu seviyede Thomas-Fermi yaklaşımı uygulandığında kinetik enerji teriminin radyal türevleri içeren kısmı tamamen ihmal edilmektedir. TF yaklaşımı altında yukarıda ifade edilen denklem çifti aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$U_a |\phi_a|^2 + U_{ab} |\phi_b|^2 = \mu_a - \frac{1}{2} \Omega_a^2 r^2 - \frac{1}{2} (r - r_0)^2 + \Omega_a l_a - \frac{l_a^2}{2r^2} \quad (4.29)$$

$$U_b |\phi_b|^2 + U_{ab} |\phi_a|^2 = \mu_b - \frac{1}{2} \Omega_b^2 r^2 - \frac{1}{2} (r - r_0)^2 + \Omega_b l_b - \frac{l_b^2}{2r^2} \quad (4.30)$$

Bileşenlerin yoğunluklarını ifade edebilmek için yukarıdaki denklem seti matris biçiminde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} n_a(r) \\ n_b(r) \end{pmatrix} = \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} U_b & -U_{ab} \\ -U_{ab} & U_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(r) \\ B(r) \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Burada $\det U = U_a U_b - U_{ab}^2$, $n_a(r) = |\phi_a(r)|^2$ ve $n_b(r) = |\phi_b(r)|^2$. Denklemde kullanılan diğer nicelikler aşağıda tanımlanmıştır.

$$A(r) \equiv \tilde{\mu}_a - \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_a^2 r^2 + r r_0 - \frac{l_a^2}{2r^2} \quad (4.32)$$

$$B(r) \equiv \tilde{\mu}_b - \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_b^2 r^2 + r r_0 - \frac{l_b^2}{2r^2} \quad (4.33)$$

$$\tilde{\mu}_a = \mu_a + \Omega_a l_a - \frac{1}{2} r_0^2, \quad \tilde{\Omega}_a^2 = 1 + \Omega_a^2 \quad (4.34)$$

$$\tilde{\mu}_b = \mu_b + \Omega_b l_b - \frac{1}{2} r_0^2, \quad \tilde{\Omega}_b^2 = 1 + \Omega_b^2 \quad (4.35)$$

Bileşenler için TF yoğunluk ifadeleri ise aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} n_a(r) &= \frac{U_b}{\det U} (A(r) - \lambda_a B(r)) \\ &= \frac{U_b}{\det U} \left(\Delta \tilde{\mu}_a - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\Omega}_a^2 r^2 + r r_0 (1 - \lambda_a) - \frac{\Delta l_a}{2r^2} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}
n_b(r) &= \frac{U_a}{\det U} (B(r) - \lambda_b A(r)) \\
&= \frac{U_a}{\det U} \left(\Delta \tilde{\mu}_b - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\Omega}_b r^2 + r r_0 (1 - \lambda_b) - \frac{\Delta l_b}{2r^2} \right) \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Burada $\Delta \tilde{\mu}_j$, Δl_j ve $\Delta \tilde{\Omega}_j$ tanımları $j = a, b$ bileşenleri için sırasıyla aşağıda verilmektedir.

$$\Delta \tilde{\mu}_a = \tilde{\mu}_a - \lambda_a \tilde{\mu}_b, \quad \Delta l_a = l_a^2 - \lambda_a l_b^2, \quad \Delta \tilde{\Omega}_a = \tilde{\Omega}_a^2 - \lambda_a \tilde{\Omega}_b^2 \quad (4.38)$$

$$\Delta \tilde{\mu}_b = \tilde{\mu}_b - \lambda_b \tilde{\mu}_a, \quad \Delta l_b = l_b^2 - \lambda_b l_a^2, \quad \Delta \tilde{\Omega}_b = \tilde{\Omega}_b^2 - \lambda_b \tilde{\Omega}_a^2 \quad (4.39)$$

Etkileşim enerjileri oranı, a ve b bileşenleri için $\lambda_a = U_{ab}/U_b$, $\lambda_b = U_{ab}/U_a$ ile ifade edilmektedir. Bileşenlerin TF yarıçapları R_j^{TF} , denklem (4.36) ve (4.37) ile verilen TF yoğunluklarınının sıfıra eşit olduğu noktalar üzerinden belirlenir.

$$n_a(R_a^{TF}) = 0, \quad n_b(R_b^{TF}) = 0 \quad (4.40)$$

Bu denklemlerin çözümleri ise dördüncü mertebeden denklemler vermektedir.

$$\Delta \tilde{\Omega}_j r^4 - 2r_0 (1 - \lambda_j) r^3 - 2\Delta \tilde{\mu}_j r^2 + \Delta l_j = 0 \quad (4.41)$$

Yukarıda ifade edilen denklemler nümerik olarak kolayca çözülebilir ve denklemlerin kökleri her iki bileşen için TF yarıçaplarını belirler. Bileşenlerin toplam parçacık sayıları N_a ve N_b , TF parçacık yoğunluklarının tüm uzay üzerinden integrali ile tanımlanmaktadır.

$$N_a = \int_{R_a^{TF,<}}^{R_a^{TF,>}} d^2 \mathbf{r} n_a(r), \quad N_b = \int_{R_b^{TF,<}}^{R_b^{TF,>}} d^2 \mathbf{r} n_b(r) \quad (4.42)$$

Polar koordinatlarda hacim elemanı, $d^2 \mathbf{r} = r dr d\theta$ ile verilir. Burada $x = r^2$ dönüşümü uygulandığında a ve b bileşenleri için toplam parçacık sayısı aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
\frac{\det U}{\pi U_b} N_a &= \Delta \tilde{\mu}_a (x_a^> - x_a^<) - \frac{1}{4} \Delta \tilde{\Omega}_a \left((x_a^>)^2 - (x_a^<)^2 \right) \\
&\quad - \frac{\Delta l_a}{2} \ln \frac{x_a^>}{x_a^<} + \frac{2}{3} r_0 (1 - \lambda_a) \left((x_a^>)^{3/2} - (x_a^<)^{3/2} \right) \quad (4.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\det U}{\pi U_a} N_b &= \Delta \tilde{\mu}_b (x_b^> - x_b^<) - \frac{1}{4} \Delta \tilde{\Omega}_b \left((x_b^>)^2 - (x_b^<)^2 \right) \\
&\quad - \frac{\Delta l_b}{2} \ln \frac{x_b^>}{x_b^<} + \frac{2}{3} r_0 (1 - \lambda_b) \left((x_b^>)^{3/2} - (x_b^<)^{3/2} \right) \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Thomas-Fermi yarıçapları $j = a, b$ bileşenleri için,

$$\left(R_j^{TF,<} \right)^2 = x_j^<, \quad \left(R_j^{TF,>} \right)^2 = x_j^> \quad (4.45)$$

ile tanımlanmaktadır.

Faz Ayrışması Durumunda Thomas-Fermi Yoğunlukları

Karışım faz ayrışmasına sürüklendiğinde $U_a U_b < U_{ab}^2$, bileşenlerden birinin işgal ettiği fiziksel uzayda diğer bileşenin yoğunluğu sıfıra gitmektedir. Başka bir ifadeyle, uzayda belli bölge sadece tek bir bileşen tarafından işgal edilebilir. Dolayısıyla hiç örtüşmeyen iki yoğunluk limiti dikkate alındığında denklem (4.36) ve (4.37) ile verilen çiftlenimli Thomas-Fermi yoğunlukları birbirlerinden ayrışır ve sadeleştirilmiş yoğunluk ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$n_a(r) = \frac{1}{U_a} \left(\tilde{\mu}_a - \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_a^2 r^2 + r r_0 - \frac{l_a^2}{2r^2} \right) \quad (4.46)$$

$$n_b(r) = \frac{1}{U_b} \left(\tilde{\mu}_b - \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_b^2 r^2 + r r_0 - \frac{l_b^2}{2r^2} \right) \quad (4.47)$$

Böylece örtüşmeyen faz limitinde Thomas-Fermi yoğunlukları, tek bileşenli yoğunluk yoğunluk ifadesine indirgenmiştir. Bu durumda toplam parçacık sayıları N_a ve N_b , $x = r^2$ dönüşümü altında aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{U_a N_a}{\pi} &= \tilde{\mu}_a (x_a^> - x_a^<) - \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_a^2 \left((x_a^>)^2 - (x_a^<)^2 \right) \\ &- \frac{l_a^2}{2} \ln \frac{x_a^>}{x_a^<} + \frac{2}{3} r_0 \left((x_a^>)^{3/2} - (x_a^<)^{3/2} \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{U_b N_b}{\pi} &= \tilde{\mu}_b (x_b^> - x_b^<) - \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_b^2 \left((x_b^>)^2 - (x_b^<)^2 \right) \\ &- \frac{l_b^2}{2} \ln \frac{x_b^>}{x_b^<} + \frac{2}{3} r_0 \left((x_b^>)^{3/2} - (x_b^<)^{3/2} \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Karışımın Thomas-Fermi Enerjisi

Bu kısımda karışımın toplam TF enerjisi tanımlanmıştır. Toplam TF enerjisi E_{TF} dört parçadan oluşmaktadır; kinetik enerji E_K , potansiyel enerji E_{pot} ve bileşenlerin kendi içlerindeki etkileşim enerjileri E_{etk}^{aa} , E_{etk}^{bb} ile karşılıklı etkileşim enerjisi E_{etk}^{ab} . Toplam Thomas-Fermi enerjisi,

$$E_{TF} = E_K + E_{pot} + E_{etk}^{jj} + E_{etk}^{ab} \quad (4.50)$$

yukarıda ifade edildiği üzere bu dört parçanın toplamı ile ifade edilmektedir. Aşağıda sırasıyla bu dört enerjinin tanımı verilmektedir.

$$E_K^j = \theta \int dx \left(\frac{1}{2} \Omega_j^2 x + \frac{l_j^2}{2x} - \Omega_j l_j \right) n_j(x) \quad (4.51)$$

$$E_{pot} = \frac{\theta}{2} \int dx (\sqrt{x} - r_0)^2 n_j(x) \quad (4.52)$$

$$E_{etk}^{jj} = \frac{\theta}{2} U_j \int dx n_j^2(x) \quad (4.53)$$

$$E_{etk}^{ab} = U_{ab} \theta \int dx n_a(x) n_b(x) \quad (4.54)$$

TF yoğunlukları sadece x değişkenine ($x = r^2$) bağlı olduğundan açı üzerinden alınan integral doğrudan $\int d\theta = 2\theta$ ile verilmektedir. Yukarıda ifade edilen integraller x değişkeninin belli mertebeleri üzerinden tanımlanmıştır ve bu mertebeler α ile gösterilmiştir. İntegral I_α tanımı aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$I_\alpha = \int_{x_j^<}^{x_j^>} x^\alpha dx = \begin{cases} \alpha = -1, & \ln(x_j^>/x_j^<) \\ \alpha \neq -1, & \frac{(x_j^>)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(x_j^<)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{cases} \quad (4.55)$$

Dolayısıyla enerji ifadeleri I_α integrali cinsinden ifade edilmiştir ve ayrıntılı ifadeler Ek [C](#) kısmında yer almaktadır.

4.3 Arayüzey Enerjisi

Ayrışık faz limitinde bileşenler arasında bir arayüzey bölgesi oluşmaktadır. Bu aşamaya kadarki olan kısımda hem denklem [\(4.46\)](#) ve [\(4.47\)](#) ile tanımladığımız ayrışık TF yoğunlukları belirlenirken hem de yukarıda karışımın toplam TF enerjisi ifade edilirken bu arayüzey bölgesinin yoğunluk profili ve toplam enerjiye olan katkısı dikkate alınmamıştır. Sistem faz ayrışması durumuna sürüklendiğinde, tuzak geometrisinin biçimine ve etkileşim enerjilerinin şiddetine bağlı olarak açısız veya radyal olarak bir ayrışma uğrayabilir. Bu limit altında sistemin hangi taban durumunun enerji açısından avantajlı olacağını belirlebilmesi ve GP yaklaşımı ile karşılaştırılabilmesi için başlangıçta ihmal ettiğimiz arayüzey enerjisinin burada dikkate alınması gerekmektedir.

Bu bölümde ayrışma faz durumunda bulunan atomik Bose gazı karışımının arayüzey enerjisi iki yöntem ile hesaplanmıştır. Yöntemlerden biri Eddy Timmermans tarafından geliştirilmiştir [\[108\]](#), ikincisi ise kendi geliştirdiğimiz bir modeldir.

Arayüzey bölgesi, bileşen yoğunluklarının birbirleriyle örtüştükleri ve sıfırdan sonlu yoğunluk değerlerine eriştikleri bir bölge olarak tanımlanabilir. Bu bölgede arayüzey enerjisi, kinetik enerji ve bileşenlerin karşılıklı etkileşim enerjisinden gelecek olan katkıların toplamından oluşacaktır. Arayüzey enerjisinin belirlenmesinde önemli olan geometrik faktör ise arayüzey uzunluğu l_b ile tanımlanmaktadır. Bu uzunluğun büyüklüğüne bağlı olarak bileşenlerin arayüzey bölgesinde ne şiddette örtüştükleri kontrol edilebilir. Dolayısıyla arayüzey uzunluğunu örtüşme uzunluğu olarak da isimlendirebiliriz. Örtüşme uzunluğu yeterince büyük ise bileşenler birbirleriyle daha çok örtüşeceklerdir ve böylece arayüzeyde etkileşim enerjisinin değeri artacaktır, bu uzunluk yeterince dar ise bu durumda kinetik enerjinin değeri artacaktır. Çünkü bileşen yoğunluklarının arayüzeydeki değişimi dar bir bölgede daha hızlı olacaktır. Toplam arayüzey enerjisinin katkısı yukarıda denklem (4.50) ile verilen toplam Thomas-Fermi enerjisine eklenecektir. Aşağıdaki modellerde, arayüzey kinetik enerjisi $E_{kin}(l_b)$, arayüzey etkileşim enerjisi $E_{etk}^{ab}(l_b)$ ve toplam arayüzey enerjisi $E_s(l_b)$ ile gösterilmektedir. Arayüzeyin katkısıyla birlikte toplam Thomas-Fermi enerjisi,

$$E_{top}^{TF} = E_{TF} + E_s(l_b) = E_{TF} + E_{kin}(l_b) + E_{etk}^{ab}(l_b) \quad (4.56)$$

yukarıdaki gibi ifade edilecektir. Bu temelde yukarıda ifade ettiğimiz iki modeli dikkate alarak ayrışık fazın iki konfigürasyonu olan açısız ve radyal faz ayrışmaları için arayüzey enerjisi yerel yoğunluk yaklaşımı ile hesaplanacaktır.

4.3.1 Timmermans'ın Modeli

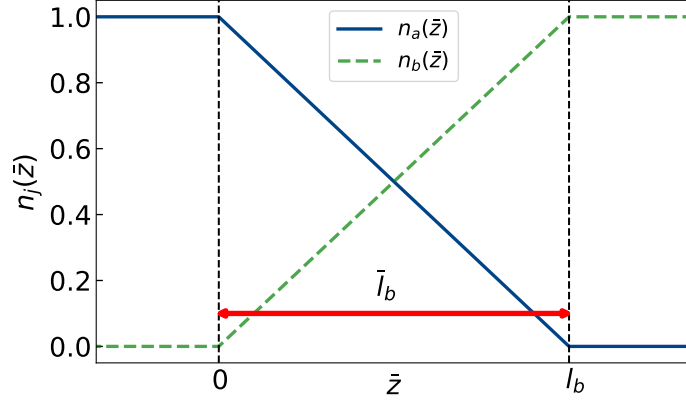
Timmermans'ın modelinde xy düzlemi ile ayrışmış sonsuz bir sistem için ayrışık bileşenlerin yoğunlukları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$n_a(z) = \begin{cases} z = 0, & n_a \\ z = l_b, & 0 \end{cases} \quad n_b(z) = \begin{cases} z = 0, & 0 \\ z = l_b, & n_b \end{cases} \quad (4.57)$$

Burada ayrışık faz limitinde, $z < 0$ bölgesinin a bileşeni tarafından işgal edildiği ve $z \geq l_b$ bölgesinin ise b bileşeni tarafından işgal edildiği varsayılmıştır.

$$n_a(z) \simeq \frac{n_a}{l_b} (l_b - z), \quad n_b(z) \simeq \frac{n_b}{l_b} z \quad (4.58)$$

Şekil 4.2'de Timmermans modelinin arayüzey bölgesinde ayrışık bileşen yoğunluklarının değişimleri gösterilmektedir. Toplam arayüzey kinetik enerjisi $E_{kin}(l_b)$, kabaca



Şekil 4.2: Timmermans modeli ayrışık bileşen yoğunluklarının l_b arayüzey genişliğindeki örtüşmeleri üzerine kurulmuştur. Bu modele göre bir bileşenin yoğunluğu bu bölgede çizgisel olarak artıp yığın yoğunluğuna ulaşırken diğer bileşen aynı eğimle çizgisel olarak sıfırlanır.

aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$E_{kin}^{top}(l_b) \simeq \frac{\hbar^2}{2Ml_b} A (n_a + n_b) \quad (4.59)$$

Arayüzey etkileşim enerjisi $E_{etk}^{ab}(l_b)$, denklem (4.58) ile tanımlanan ayrışık bileşen yoğunlukları tarafından belirlenir.

$$\begin{aligned} E_{etk}^{ab}(l_b) &\simeq (U_{ab} - \sqrt{U_a U_b}) A \int_0^{l_b} n_a(z) n_b(z) dz \\ &= (U_{ab} - \sqrt{U_a U_b}) A \int_0^{l_b} (z l_b - z^2) dz \\ &= (U_{ab} - \sqrt{U_a U_b}) \frac{A}{6} n_a n_b l_b \end{aligned} \quad (4.60)$$

Arayüzey kinetik enerjisi, arayüzey uzunluğu ile ters orantılı iken arayüzey etkileşim enerjisi onunla doğru orantılıdır. Toplam arayüzey enerjisinin arayüzey uzunluğuna göre minimizasyonu $\partial E_s(l_b)/\partial l_b = 0$ ideal arayüzey uzunluğunu verir.

$$\bar{l}_b = 2\xi_a \sqrt{3} \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{U_a/U_b})}{(U_{ab}/\sqrt{U_a U_b} - 1)}} \quad (4.61)$$

Yukarıda ifade edildiği üzere arayüzey bölgesinin genişliği ve dolayısıyla bileşenlerin ne ölçüde örtüştikleri etkileşim enerjilerinin büyüklüğüne bağlı olarak değişecektir. Burada $\xi_a^2 = \hbar^2/(4Mn_a U_a)$, a bileşeninin bağdaşım uzunluğunu göstermektedir. Timmermans arayüzey enerjisi, $E_s(l_b) = A\sigma$, yüzey alanı A ve σ arayüzey enerji yoğunluğunun çarpımı ile tanımlanmaktadır, arayüzey enerji yoğunluğu ise basınç P_a , bağdaşım

uzunluğu ξ_a ve boyutsuz bir parametre olan Σ_a nicelikleri cinsinden aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\sigma(r) = \xi_a P_a(r) \Sigma_a \quad (4.62)$$

Burada Σ_a parametresi,

$$\Sigma_a = 4 \frac{\sqrt{\left(1 + \sqrt{U_a/U_b}\right) \left(\frac{U_{ab}}{\sqrt{U_a U_b}} - 1\right)}}{\sqrt{3}} \quad (4.63)$$

yukarıdaki gibi tanımlanmaktadır.

4.3.2 Tanjant Hiperbolik Modeli

Timmermans'ın modelinde arayüzey bölgesindeki ayrışık bileşen yoğunlukları çizgisel olarak değişmektedir. Şekil 4.2'de görülen kinetik enerji için sorunlu olan bu davranış, tanjant hiperbolik fonksiyonunun davranışı ile sürekli bir fonksiyon olarak tasvir edilebilir. Aşağıda ifade edilen sınır koşulları,

$$\psi_{a,b}(z) = \begin{cases} \psi_a(z = -\infty), & 0 \\ \psi_b(z = -\infty), & 1 \end{cases} \quad \psi_{a,b}(z) = \begin{cases} \psi_a(z = \infty), & 1 \\ \psi_b(z = \infty), & 0 \end{cases} \quad (4.64)$$

dikkate alındığında bileşenleri temsil eden dalga fonksiyonları aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.

$$\psi_a(z) = \frac{\psi_{a0}}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{z-d}{l_b}\right) \right], \quad \psi_b(z) = \frac{\psi_{b0}}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{z+d}{l_b}\right) \right] \quad (4.65)$$

Arayüzey boyunca d parametresi, bileşenlerin birbirleriyle ne kadar örtüştüğünü gösteren bir parametredir ve bu parametre bileşen basınçlarının dengeye geldiği noktalar üzerinden belirlenecektir. Böylece arayüzey etkileşim enerjisi ve toplam arayüzey kinetik enerjisi yukarıda tanımlanan dalga fonksiyonları kullanılarak ifade edilebilir.

Arayüzey etkileşim enerjisi,

$$\begin{aligned} E_{etk}^{ab}(l_b) &= (U_{ab} - \sqrt{U_a U_b}) A \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_a(z)|^2 |\psi_b(z)|^2 dz \\ &= (U_{ab} - \sqrt{U_a U_b}) \frac{A}{16} n_{a0} n_{b0} l_b \int_{-\infty}^{\infty} [1 + \tanh(\bar{z} - \bar{d})]^2 [1 - \tanh(\bar{z} + \bar{d})]^2 d\bar{z} \\ &= (U_{ab} - \sqrt{U_a U_b}) A n_{a0} n_{b0} l_b I_{etk}^{ab} \end{aligned} \quad (4.66)$$

ve toplam arayüzey kinetik enerjisi $E_{kin}^{top}(l_b) = E_{kin}^a(l_b) + E_{kin}^b(l_b)$ elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
E_{kin}^a(l_b) &= A \frac{\hbar^2}{2M} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi_a(z)|^2 dz \\
&= A \frac{\hbar^2}{2M l_b} \frac{n_{a0}}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{z}}{\cosh^4(\bar{z} - \bar{d})} \\
&= A \frac{\hbar^2}{2M l_b} \frac{n_{a0}}{4} I_{kin}^a
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
E_{kin}^b(l_b) &= A \frac{\hbar^2}{2M} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi_b(z)|^2 dz \\
&= A \frac{\hbar^2}{2M l_b} \frac{n_{b0}}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{z}}{\cosh^4(\bar{z} + \bar{d})} \\
&= A \frac{\hbar^2}{2M l_b} \frac{n_{b0}}{4} I_{kin}^b
\end{aligned} \tag{4.68}$$

bileşenlerin kinetik enerjisini ayrı ayrı göstermektedir. Bileşen yoğunlukları, $n_{a0} = |\psi_{a0}|^2$ ve $n_{b0} = |\psi_{b0}|^2$ ile $\bar{z} = z/l_b$ ve $\bar{d} = d/l_b$ ile tanımlanmaktadır. Böylece toplam kinetik enerji,

$$E_{kin}^{top}(l_b) = A \frac{\hbar^2}{2M l_b} \frac{1}{4} (n_{a0} I_{kin}^a + n_{b0} I_{kin}^b) \tag{4.69}$$

olarak elde edilir. Timmermans'ın modelinde olduğu gibi arayüzey kinetik enerjisi arayüzey uzunluğu ile ters orantılı iken etkileşim enerjisi doğru orantılıdır. Toplam arayüzey enerjisinin arayüzey uzunluğuna göre minimizasyonu $\partial E_s(l_b)/\partial l_b = 0$ ideal arayüzey uzunluğunu verecektir.

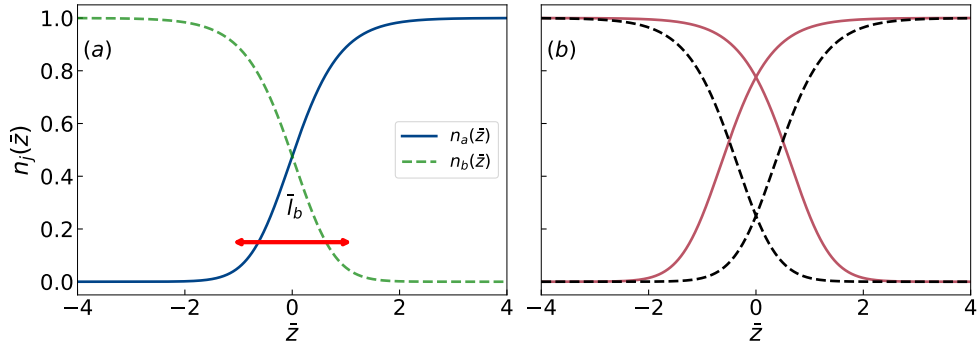
$$\bar{l}_b = 2\xi_a \sqrt{\frac{I_{kin}^a + \sqrt{\gamma_0} I_{kin}^b}{(U_{ab}/\sqrt{U_a U_b} - 1) I_{etk}^{ab}}} \tag{4.70}$$

İdeal arayüzey uzunluğu belirlenirken bileşenlerin yoğunlukları arasındaki şu ilişki $n_{a0} = n_{b0} \sqrt{U_b/U_a}$ dikkate alınmıştır. Burada d parametresi basınçların dengeye geldiği noktada belirlenecektir. Dolayısıyla denklem (4.65) ile verilen ayrışık bileşen çözümleri dikkate alındığında basınç eşitliği ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} U_a n_{a0}^2 &= \frac{1}{2} \left[U_a |\psi_a(z)|^4 + U_b |\psi_b(z)|^4 + 2U_{ab} |\psi_a(z)|^2 |\psi_b(z)|^2 \right] \\
16U_a n_{a0}^2 &= U_a n_{a0}^2 (1 + \tanh(-\bar{d}))^4 + U_b n_{b0}^2 (1 - \tanh(\bar{d}))^4 \\
&\quad + 2U_{ab} n_{a0} n_{b0} (1 + \tanh(-\bar{d}))^2 (1 - \tanh(\bar{d}))^2
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Dengeli bileşen içi etkileşimler için,

$$U_a = \gamma_0 U, \quad U_b = U, \quad U_{ab} = \gamma U \tag{4.72}$$



Şekil 4.3: Tanjant hiperbolik modeline göre arayüzey bölgesinde ayrışık bileşen yoğunluklarının davranışı gösterilmiştir. \bar{d} parametresinin şiddetine bağlı olarak bileşenler birbirleriyle çok veya az örtüşebilir. (a) $\bar{d} = -0.4$, ve (b) kırmızı kalın çizgi ($\bar{d} = -1$), daha çok örtüşen iki bileşeni temsil ederken siyah kesikli çizgi ($\bar{d} = 0$), daha az örtüşen iki bileşeni temsil eder.

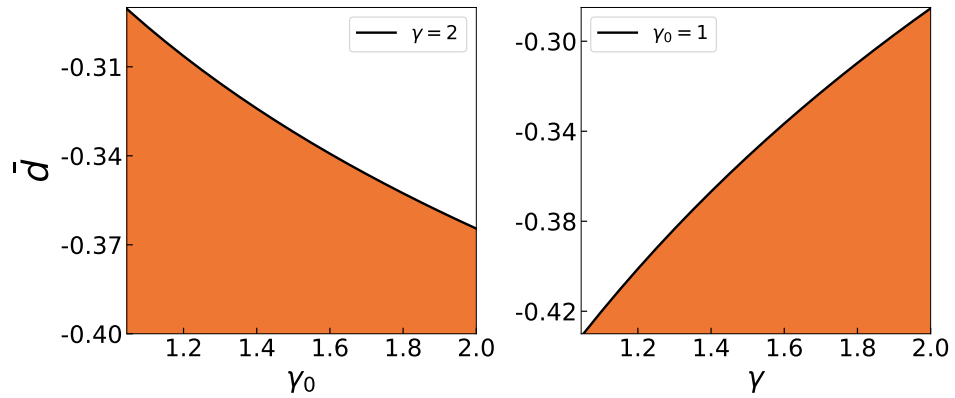
ve bileşen yoğunlukları arasındaki ilişki $n_{a0} = n_{b0} \sqrt{U_b/U_a}$ dikkate alındığında basınç denklemi,

$$16 = (1 + \tanh(-\bar{d}))^4 + (1 - \tanh(\bar{d}))^4 + 2 \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right) (1 + \tanh(-\bar{d}))^2 (1 - \tanh(\bar{d}))^2 \quad (4.73)$$

elde edilir. Burada $\tanh(-x) = -\tanh(x)$ bağıntısı kullanıldığında basınç eşitliği ifadesi daha yalın bir biçim kazanır.

$$\frac{8}{1 + \gamma/\gamma_0} = (1 - \tanh(\bar{d}))^4 \quad (4.74)$$

Etkileşim parametrelerinin büyüklüğüne bağlı olarak \bar{d} parametresinin nasıl değiştiği Şekil 4.4'de gösterilmektedir.



Şekil 4.4: \bar{d} parametresinin değişimi (a) bileşenlerin iç etkileşim oranına $\gamma_0 = U_a/U_b$ ve (b) bileşenler arası etkileşim oranına $\gamma = U_{ab}/U_a$ göre hesaplanmıştır. Parametre \bar{d} , γ_0 ile mutlak değer artarken γ ile mutlak değer azalan bir davranış sergilemektedir.

Bileşenler \bar{d} parametresinin büyüklüğüne bağlı olarak birbirleriyle çok veya az örtüşebilirler. Bu parametrenin değerce negatifleşmesi bileşenlerin kuvvetli örtüşmelerine karşılık gelirken sıfıra doğru yaklaşması ($\bar{d} \rightarrow 0$) ise bileşenler arasındaki örtüşmeyi zayıflatacaktır. Şekil 4.3 (b) çok ve az örtüşmeleri birlikte gösterirken Şekil 4.3 (a) ise bu iki örtüşme bölgesinin arasında kalan bölgeyi göstermektedir. Denklem (4.74) ile verilen eşitlik dikkate alındığında \bar{d} parametresinin aldığı değer aralığının bileşenlerin çok ve az örtüşükleri bölgelerinin arasında bir bölgede kaldığı elde edilmiştir. Örneğin, etkileşimler oranı $\gamma_0 = 1$ ve $\gamma = 1.5$ değerleri için $\bar{d} = -0.35$ olarak hesaplanmaktadır.

4.3.3 Bir Tuzak Potansiyeli Altında Arayüzey Enerjisi

Bu kısımda disk ve Corbino geometrili tuzak potansiyelleri etkisinde açıs ve radyal faz ayrışmasına uğrayan iki bileşenli Bose gazı karışımının arayüzey enerji ifadesi hesaplanmıştır. Faz ayrışması durumunda bileşenler arasındaki arayüzey genişliği; açıs ve radyal faz ayrışması için l_b^θ ve radyal faz ayrışması için l_b^R ile ifade edilmiştir. Açıs ve radyal faz ayrışmasında arayüzey uzunluğu, arayüzey sınırında bileşen yoğunluklarının sıfırdan farklı olduğu yüzey alanı boyunca tanımlanmıştır. Radyal faz ayrışmasında ise arayüzey alanı, halkanın çevre uzunluğu ile verilmektedir.

$$l_b^\theta = 2(R_{TF}^> - R_{TF}^<), \quad l_b^R = 2\pi R_{TF} \quad (4.75)$$

Yerel yoğunluk yaklaşımı altında toplam arayüzey enerjisi, arayüzey enerji yoğunluğunun $\sigma(r)$ arayüzey sınırları üzerinden integrali ile tanımlanmaktadır. Açıs ve radyal faz ayrışmalarında arayüzey enerjileri,

$$E_s^{AFA}(l_b) = \int_{l_b^\theta} \sigma(r) dr, \quad E_s^{RFA}(l_b) = l_b^R \sigma(l_b) = 2\pi R_{TF} \sigma(l_b) \quad (4.76)$$

olarak tanımlanmaktadır. Arayüzey kinetik enerjileri ise aşağıda verilmektedir.

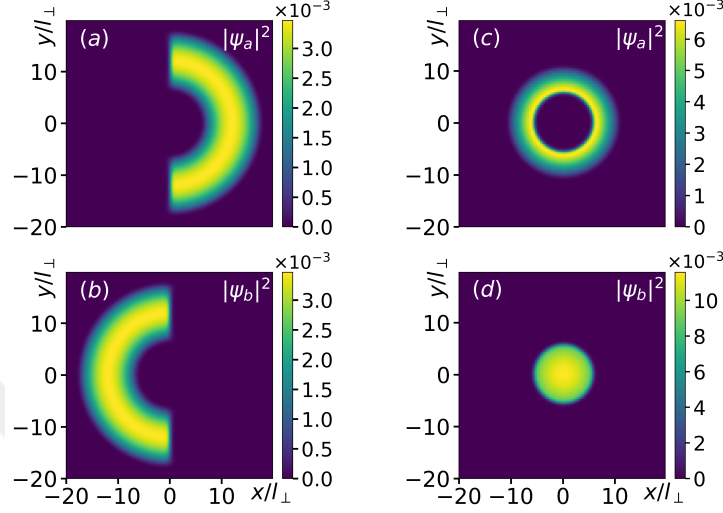
$$E_k^{AFA}(l_b) = \int_{l_b^\theta} \frac{n_{TF}(r)}{l_b} dr, \quad E_k^{RFA}(l_b) = l_b^R \frac{n_{TF}}{l_b} = 2\pi R_{TF} \frac{n_{TF}}{l_b} \quad (4.77)$$

Burada $n_{TF}(r)$ ayırışık fazda Thomas-Fermi yoğunluklarını göstermektedir.

4.4 Açıs ve Radyal Faz Ayrışmaları

Bu kısımda açıs ve radyal faz ayrışmalarının bileşen yoğunluk dağılımları gösterilecektir. Şekil 4.5 (a) - (b)'de açıs ve radyal faz ayrışımı konfigürasyonu Corbino $r_0 = 12$ ge-

ometrisinde ve Şekil 4.5 (c) - (d)'de radyal faz ayrışımı konfigürasyonu disk geometride gösterilmiştir. Açısal faz ayrışımı konfigürasyonunda bileşenler iki yarım halka biçimde ayrışırken radyal faz ayrışımı konfigürasyonunda bileşenlerden biri merkeze toplanır ve diğer bileşen onu bir kabuk biçimde çevrelemektedir.



Şekil 4.5: (a)-(b) Corbino geometrisi $r_0 = 12$ için açısal faz ayrışımı konfigürasyonunun yoğunluk dağılımı $U_a = U_b = 5000$, $U_{ab} = 1.2U_b$ etkileşim enerjilerinde gösterilmiştir. (c)-(d) Disk geometride radyal faz ayrışımı konfigürasyonunun yoğunluk dağılımı $U_b = 5000$, $U_a = 1.2U_b$, $U_{ab} = 1.2U_b$ etkileşim enerjilerinde gösterilmiştir.

Bu seviyede GP simülasyonuna başlangıç çözümü olarak verilen dalga fonksiyonu, iki ayrışık faz konfigürasyonu için tanımlanabilir. Faz ayrışımı durumunda denklem (4.46) ve (4.47) ile verilen TF yoğunlukları dikkate alındığında açısal faz ayrışması konfigürasyonunun çözümleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\phi_a^{GP}(r) = n_a^{TF}(r)e^{il_a\theta}H(\theta_a - |\theta|) \quad (4.78)$$

$$\phi_b^{GP}(r) = n_b^{TF}(r)e^{il_b\theta}H(\theta_b - |\pi - \theta|) \quad (4.79)$$

Burada $n_j^{TF}(r)$ Thomas-Fermi yoğunluklarını, l_j bileşenlerin açısal momentum değerini ve $H(\theta)$ ise birim basamak fonksiyonunu belirtmektedir. Radyal faz ayrışımı konfigürasyonunda a bileşenine ait TF yarıçapları $R_{TF}^{a,>}$, $R_{TF}^{a,<}$ ve b bileşenine ait TF yarıçapları $R_{TF}^{b,>}$, $R_{TF}^{b,<}$ olmak üzere arayüzey sınırı,

$$R_{TF}^{b,>} = R_{TF}^{a,<} \quad (4.80)$$

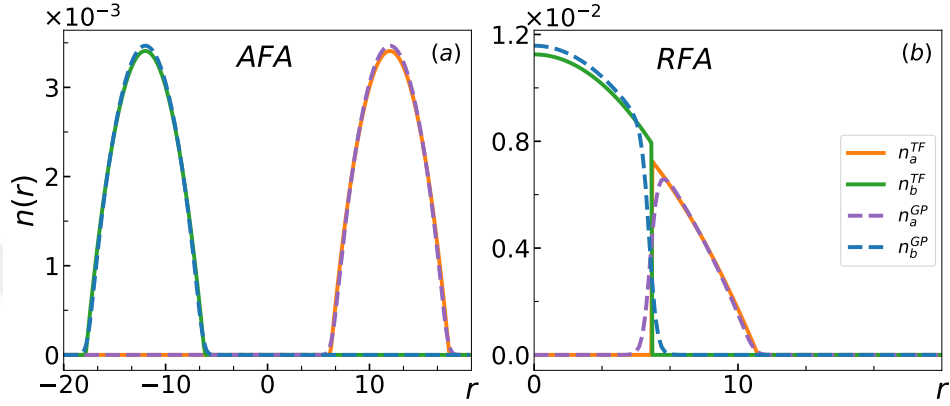
olarak belirlenir ve radyal faz ayrışması konfigürasyonunun çözümleri aşağıdaki gibi

tanımlanabilir.

$$\phi_a^{GP}(r) = n_a^{TF}(r)e^{il_a\theta} \quad (4.81)$$

$$\phi_b^{GP}(r) = n_b^{TF}(r)e^{il_b\theta} \quad (4.82)$$

Şekil 4.5’de yoğunluk dağılımları gösterilen bileşenlerin GP ve TF yoğunluklarını gösteren bir kesit Şekil 4.6’de gösterilmiştir. Burada GP ve TF yoğunluklarının yakın sonuçlar verdikleri görülmektedir.



Şekil 4.6: (a) Corbino $r_0 = 12$ (b) disk $r_0 = 0$ geometrilerinde Thomas-Fermi ve Gross-Pitaevskii çözümlerinin değişimi r konumuna göre gösterilmiştir. Sistem Corbino geometrisinde açısal konfigürasyonda, disk geometrisinde ise radyal konfigürasyonda bulunmaktadır.

4.5 Etkileşimlerin Fonksiyonu olarak Ayrışma Durumları

Bu kısımda iki bileşenli Bose gazının ayrışma konfigürasyonları etkileşimlerin simetrik ve asimetric olduğu iki farklı durum altında incelenmiştir. Bu seviyede iki etkileşim oranı tanımlanabilir. Bunlar, bileşenlerin iç etkileşim oranı $\gamma_0 = U_a/U_b$ ile bileşenler arası etkileşim oranıdır $\gamma = U_{ab}/U_b$. Bu durumda etkileşimler aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$U_a = \gamma_0 U, \quad U_b = U, \quad U_{ab} = \gamma U \quad (4.83)$$

Simetrik veya dengeli etkileşim durumu için iç etkileşim oranının değeri bire eşittir, $\gamma_0 = 1$, ve asimetric veya dengesiz etkileşim durumu için iç etkileşim oranının değeri birden farklıdır, $\gamma_0 \neq 1$. Burada iki bileşenli Bose gazı karışımının faz ayrışması kriteri, etkileşim oranları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$U_{ab} > \sqrt{U_a U_b} \Rightarrow \gamma > \sqrt{\gamma_0} \quad (4.84)$$

	(Ω_a, Ω_b)	E_{kin}	E_{pot}	E_{etk}	E_{etk}^{ab}	E_{top}
AFA(GP)	(0.01,0.01)	0.216	36.967	37.570	0.869	75.622
RFA(GP)	(0.01,0.01)	0.330	37.034	36.983	1.504	75.651
AFA(TF)	(0.01,0.01)	0.196	37.611	37.614	0.193	75.614
RFA(TF)	(0.01,0.01)	0.333	37.702	37.523	0.330	75.889
AFA(GP)	(0.01,0)	0.216	36.967	37.570	0.869	75.621
RFA(GP)	(0.01,0)	0.329	37.050	36.982	1.504	75.850
AFA(TF)	(0.01,0)	0.195	37.612	37.613	0.192	75.613
RFA(TF)	(0.01,0)	0.332	37.702	37.523	0.330	75.888

Tablo 4.1: Eşit yüklü ve farklı yüklü Bose gazı karışımlarının toplam GP ve toplam TF enerjileri disk geometrisi için hesaplanmıştır.

Deneysel parametreler ile uyumlu olarak etkileşim enerjisinin büyüklüğünü belirleyen niceliklerin değerleri; toplam parçacık sayısı $N = (1 - 3.5) \times 10^5$ ve saçılma uzunluğu $a_s = 5.3 \text{ nm}$ olmak üzere aşağıda verilmiştir [131].

$$\omega_{\perp} = 2\pi \times 30.832 \text{ Hz} \quad \omega_z = 2\pi \times 85.90 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega_{\perp} < \omega_z \quad (4.85)$$

Bu değerler dikkate alındığında etkileşim enerjisinin büyüklüğü $U_a \approx U_b \approx 3000 - 5000$ olarak hesaplanmıştır.

4.5.1 Simetrik Etkileşim Durumu

Burada simetrik etkileşimler altında yüklü karışımın ayrık faz konfigürasyonları incelenmiştir. Etkileşim değerleri; aşağıda gibi seçilmiştir.

$$U = 5000, \quad \gamma_0 = 1, \gamma = 1.2, \quad \Rightarrow \quad U_a = U_b = \gamma_0 U, \quad U_{ab} = \gamma U = 6000 \quad (4.86)$$

Bileşenlerin yük bilgisi rotasyon parametresi Ω_j tarafından taşınmaktadır. Dolayısıyla eşit yüklü bir karışım için $\Omega_a = \Omega_b$ ve farklı yüklü bir karışım için $\Omega_a \neq \Omega_b$ olarak dikkate alınmaktadır.

Tablo 4.1, 4.2 ve 4.3'de eşit yüklü ve farklı yüklü karışımların disk, Corbino $r_0 = 8$ ve Corbino $r_0 = 12$ geometrileri altında toplam TF enerjileri ile toplam GP enerjileri hesaplanmıştır. Arayüzey enerjisinden gelen katkı ile birlikte hesaplanan TF enerjisi GP enerjisi ile karşılaştırıldığında sonuçlar tutarlılık göstermektedir. Toplam TF ve GP enerjileri ile birlikte tablolarda her bir enerji teriminden gelen katkılar ayrı ayrı E_{kin} , E_{pot} , E_{etk} , E_{etk}^{ab} olarak gösterilmiştir. Tablolarda görüldüğü üzere hem GP düzeyinde

	(Ω_a, Ω_b)	E_{kin}	E_{pot}	E_{etk}	E_{etk}^{ab}	E_{top}
AFA(GP)	(0.01,0.01)	0.102	8.718	17.869	0.267	26.955
RFA(GP)	(0.01,0.01)	0.225	8.858	17.158	0.962	27.202
AFA(TF)	(0.01,0.01)	0.065	8.923	17.865	0.061	26.920
RFA(TF)	(0.01,0.01)	0.215	8.946	17.848	0.212	27.221
AFA(GP)	(0.01,0)	0.101	8.720	17.867	0.267	26.954
RFA(GP)	(0.01,0)	0.222	8.857	17.159	0.962	27.199
AFA(TF)	(0.01,0)	0.063	8.930	17.864	0.061	26.917
RFA(TF)	(0.01,0)	0.213	8.946	17.848	0.212	27.219

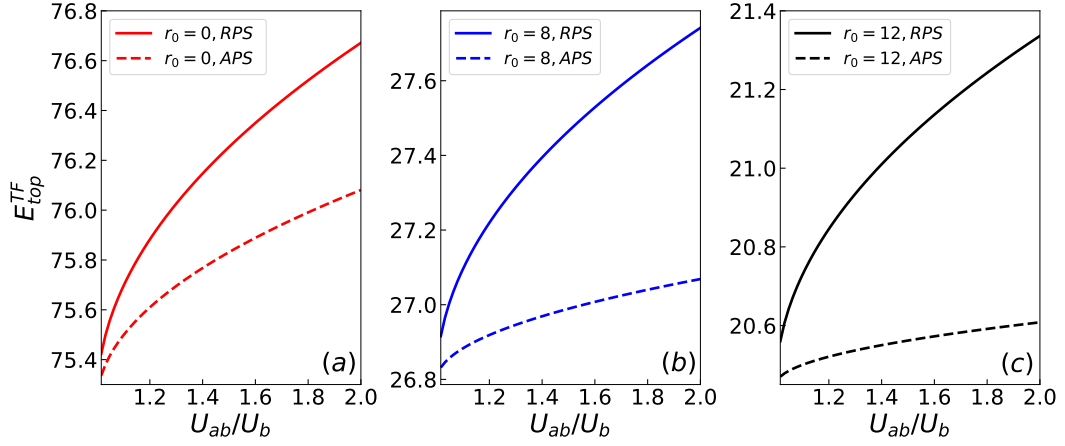
Tablo 4.2: Eşit yüklü ve farklı yüklü Bose gazı karışımlarının toplam GP ve toplam TF enerjileri Corbino $r_0 = 8$ geometrisi için hesaplanmıştır.

	(Ω_a, Ω_b)	E_{kin}	E_{pot}	E_{etk}	E_{etk}^{ab}	E_{top}
AFA(GP)	(0.01,0.01)	0.091	6.668	13.664	0.155	20.578
RFA(GP)	(0.01,0.01)	0.224	6.814	12.894	0.914	20.845
AFA(TF)	(0.01,0.01)	0.037	6.815	13.633	0.035	20.521
RFA(TF)	(0.01,0.01)	0.201	6.809	13.639	0.200	20.848
AFA(GP)	(0.01,0)	0.091	6.668	13.664	0.155	20.578
RFA(GP)	(0.01,0)	0.224	6.814	12.894	0.914	20.845
AFA(TF)	(0.01,0)	0.037	6.815	13.632	0.035	20.519
RFA(TF)	(0.01,0)	0.200	6.809	13.638	0.200	20.848

Tablo 4.3: Eşit yüklü ve farklı yüklü Bose gazı karışımlarının toplam GP ve toplam TF enerjileri Corbino $r_0 = 12$ geometrisi için hesaplanmıştır.

hem de TF düzeyinde bu parametreler için açısız faz ayrışması durumu radyal faz ayrışımı durumundan daha düşük enerjili olarak elde edilmiştir. Aynı zamanda açısız faz ayrışması durumu, hem eşit yüklü hem de farklı yüklü karışımlar için enerji açısından avantajlı olan durum olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla hem yüklerin denkleğinden hem de tuzak potansiyelinin geometrisinden etkilenmeden simetrik etkileşimler altında sistem her zaman açısız faz ayrışması durumunu taban durumu olarak seçmektedir.

Şekil 4.7 de eşit yüklü karışımın toplam Thomas-Fermi enerjisindeki değişim bileşenler arası etkileşim oranına göre hesaplanmıştır. Radyal ve açısız faz durumları arasındaki enerji farklarının bileşenler arası etkileşim oranının artmasıyla birlikte arttığı ve her zaman açısız durumun daha düşük enerjili olduğu elde edilmiştir. Dolayısıyla



Şekil 4.7: Simetrik etkileşim altında, bileşenler arası etkileşim oranının $\gamma = U_{ab}/U_b$ değişimine göre, sistemin toplam TF enerjisini hesaplanmıştır. (a) Disk $r_0 = 0$, Corbino geometrileri (b) $r_0 = 8$ ve (c) $r_0 = 12$ gösterilmiştir.

simetrik etkileşimler altında ve her üç tuzak geometrisi için açısız faz ayrışımı konfigürasyonu her zaman enerjetik olarak avantajlı olan faz ayrışımı konfigürasyonudur. Açısız faz ayrışımı konfigürasyonuna kıyasla radyal faz ayrışımı konfigürasyonunda TF enerjisine eklenen arayüzey enerjisi daha büyük olarak elde edilmiştir. Çünkü radyal konfigürasyonda bileşenlerin arayüzey sınırı daha geniştir. Dolayısıyla bileşenler arası etkileşimlerin artmasıyla birlikte radyal konfigürasyon için daha büyük bir arayüzey enerjisi hesaplanmaktadır. Karışımın radyal faz ayrışımı konfigürasyonunu taban durum olarak seçebileceği bir durum, bileşenler arası etkileşim simetrisinin kırılmasıyla mümkün olabilir.

4.5.2 Asimetrik Etkileşim Durumu

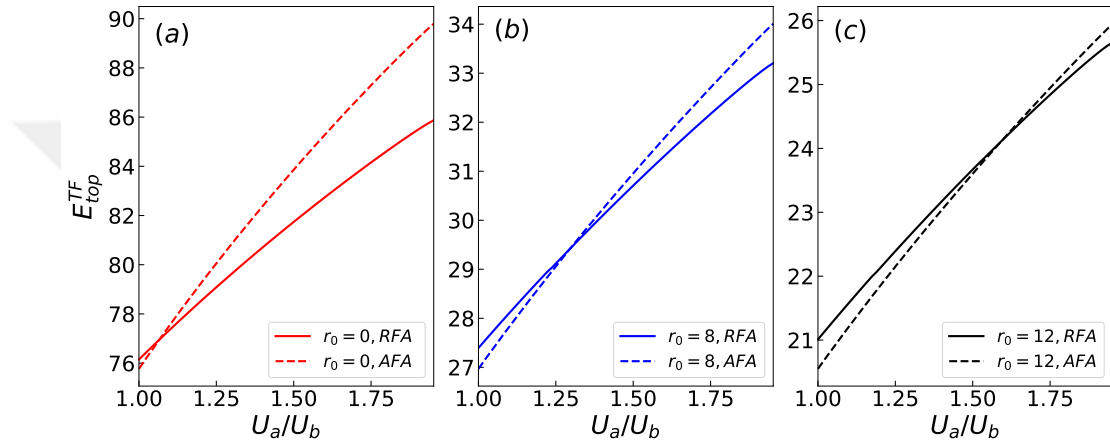
Burada asimetrik etkileşimler altında yüklü karışımların ayrık faz konfigürasyonları incelenmiştir. Bileşenler arası etkileşim simetrisinin kırılması birkaç farklı şekilde mümkün olabilir. Etkileşimler $\gamma > \sqrt{\gamma_0}$ koşulunu sağlamak üzere bileşenlerin iç etkileşim oranı $\gamma_0 \neq 1$ olacak şekilde ayarlanabilir. Böylece sabit bir γ etkileşim oranı için karışımın enerjisi bileşenlerin iç etkileşim oranına göre hesaplanabilir veya sabit bir $\gamma_0 \neq 1$ etkileşim oranı için karışımın enerjisi bileşenler arası etkileşim oranının değişimi altında hesaplanabilir. Disk ve Corbino geometrileri için bileşenler arası etkileşim büyüklüklerine bağlı olarak karışımın toplam TF enerjisi elde edilmiştir.

Şekil 4.8'da asimetrik etkileşimler altında disk ve Corbino geometrileri için yüklü karışımın ayrık faz konfigürasyonlarının enerjileri bileşenler arası etkileşim oranı $\gamma =$

U_{ab}/U_b sabit iken bileşenlerin iç etkileşim oranına bağlı olarak hesaplanmıştır. Etkileşim değerleri aşağıda verilmektedir.

$$U = 5000, \quad \gamma = 1.4, \quad \Rightarrow \quad U_a \neq U_b, \quad U_{ab} = 7000 \quad (4.87)$$

Burada her üç tuzak geometrisi için açısız faz ayrışımı konfigürasyonundan radyal faz ayrışımı konfigürasyonuna bir geçiş olduğu elde edilmiştir. Bu geçiş, disk geometrisi için simetrisinin kırıldığı küçük etkileşim değerlerinde gerçekleşirken Corbino geometrilerinde ise daha yüksek etkileşim değerlerinde gerçekleşmektedir.

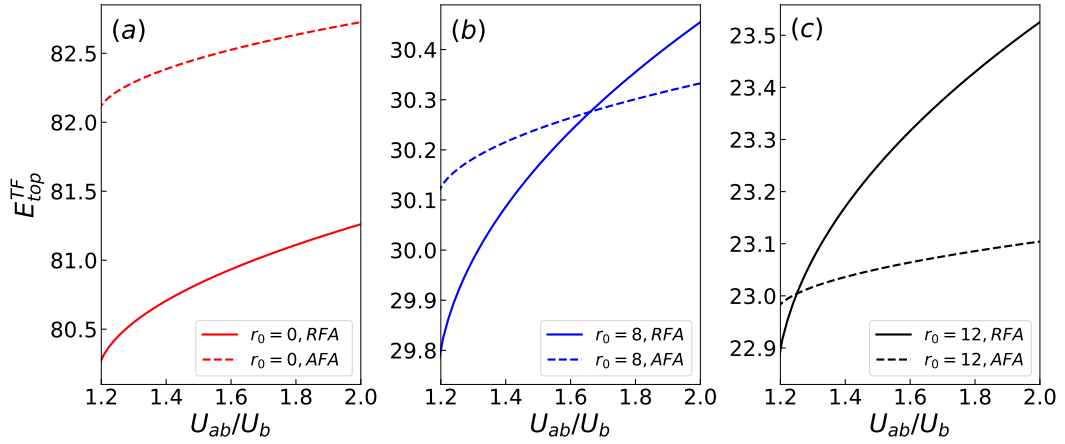


Şekil 4.8: Disk ve Corbino geometrilerinde bileşenler arası etkileşim sabit iken karışımın toplam TF enerjisindeki değişim bileşenlerin iç etkileşimlerine göre hesaplanmıştır. (a) Disk $r_0 = 0$, (b) Corbino $r_0 = 8$, (c) Corbino $r_0 = 12$ için sonuçları gösterir.

Şekil 4.9 da asimetrik etkileşimler altında disk ve Corbino geometrileri için yüklü karışımın faz ayrışım konfigürasyonlarının enerjileri bileşenlerin iç etkileşim oranı $\gamma_0 = U_a/U_b$ sabit iken bileşenler arası etkileşim oranına bağlı olarak hesaplanmıştır. Etkileşim değerleri aşağıda verilmektedir.

$$U = 5000, \quad \gamma_0 = 1.4, \quad \Rightarrow \quad U_a = 7000, \quad U_b = U \quad \Rightarrow \quad U_a > U_b \quad (4.88)$$

Burada disk geometrisinde radyal faz ayrışımı konfigürasyonunun enerjetik olarak avantajlı olduğu elde edilmiştir. Corbino geometrilerinde ise radyal faz ayrışımı konfigürasyonundan açısız faz ayrışımı konfigürasyonuna bir geçiş gözlenmiştir. Bu geçiş Corbino $r_0 = 12$ geometrisi için bileşenler arası etkileşimlerin küçük olduğu bir değerde gerçekleşirken Corbino $r_0 = 8$ geometrisi için daha yüksek bir etkileşim değerinde gözlemlenmiştir. Dolayısıyla bileşenlerin etkileşim büyüklüklerine bağlı olarak radyal faz ayrışımı konfigürasyonunun avantajlı olduğu bir durum belirlenebilir.



Şekil 4.9: Disk ve Corbino geometrilerinde bileşenlerin iç etkileşimi sabit iken karışımın toplam TF enerjisindeki değişim bileşenler arası etkileşimlere göre hesaplanmıştır. (a) Disk $r_0 = 0$, (b) Corbino $r_0 = 8$, (c) Corbino $r_0 = 12$ için sonuçları gösterir.

Yukarıda asimetrik etkileşimler altında gözlemlenen geçişler esnasında, daha düşük etkileşimli olan bileşen disk veya halka biçiminde tuzağın merkezine doğru toplanırken yüksek etkileşimli diğer bileşen ise merkeze toplanan bileşeni kabuk şeklinde çevrelemektedir. Bu konfigürasyonlar, toplam enerjiyi azaltma eğiliminde olacaktır. Dolayısıyla daha düşük etkileşimli merkeze toplanan bileşen yoğunluğunu artırma davranışı gösterirken onu çevreleyen yüksek etkileşimli diğer bileşen ise yoğunluğunu azaltmaya dolayısıyla etkileşimleri azaltmaya doğru gidecektir. Bu duruma bir örnek olarak Şekil 4.6 (b) gösterilebilir. Şekil 4.6 (b)'de disk geometrisinde $U = 5000$, $\gamma_0 = 1.2$, $\gamma = 1.2$ etkileşim değerleri için radyal faz ayrışımı konfigürasyonunda bulunan yüklü karışımın bileşen yoğunluk dağılımları verilmektedir. Yüksek etkileşimli bileşenin dışarda daha düşük yoğunluk dağılımına gittiği ve düşük etkileşimli bileşenin ise içerde daha yüksek yoğunluk dağılımı oluşturduğu elde edilmiştir.

4.5.3 Faz Diyagramı

Bu bölümde, iki bileşenli atomik Bose gazı karışımının faz diyagramı etkileşimler düzleminde oluşturulmuştur. Faz diyagramı, parametre uzayında sistemin hangi faz ayrışımı konfigürasyonunun enerjetik olarak avantajlı olduğunu gösterir.

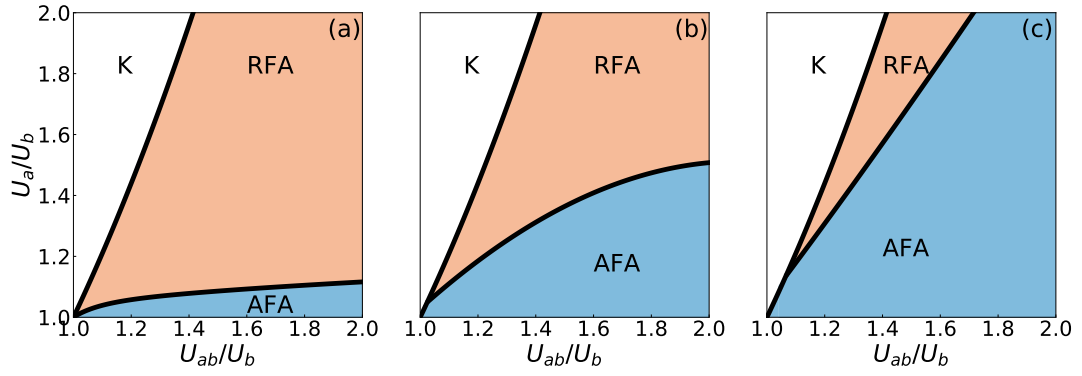
Şekil 4.10'de sistemin faz diyagramı bileşenler içi etkileşim oranı ve bileşenler arası etkileşim oranı $U_{ab}/U_a - U_a/U_b$ düzleminde gösterilmektedir. Bu faz diyagramı Timmermans'ın modeli ele alınarak oluşturulmuş olan bir faz diyagramıdır. Siyah kalın çizgiler açısız ve radyal faz ayrışım konfigürasyonlarının sınırlarını belirtmektedir.

Bu sınırlar, toplam TF enerjileri kıyaslanarak oluşturulmuştur. İki bileşenli Bose gazı karışımının örtüşük faza göre enerjetik olarak avantajlı olduğu iki faz ayrışması konfigürasyonu, yani radyal faz ayrışması RFA ve açısız faz ayrışması AFA turuncu ve mavi bölgeler ile gösterilmiştir. K ile gösterilen bölge ise sistemin örtüşük faz durumunu temsil etmektedir. Örtüşük faz durumunun sınırı analitik olarak $U_{ab} \leq \sqrt{U_a U_b}$ koşulundan hesaplanmıştır.

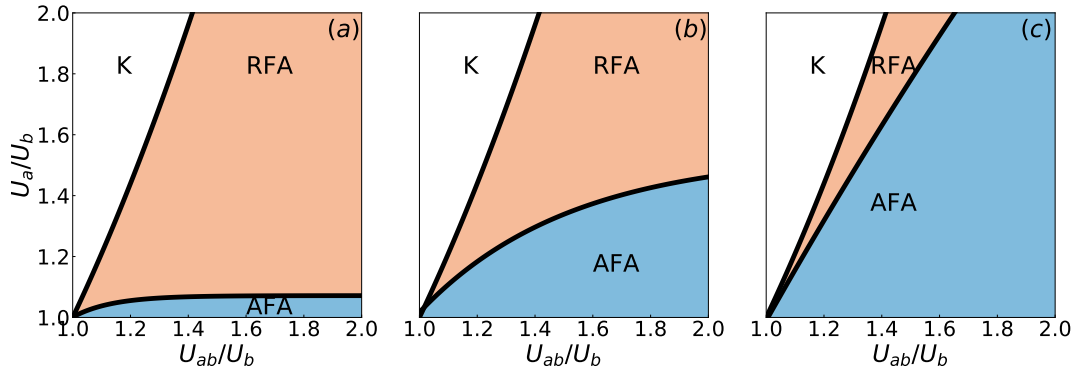
Disk geometrisinde RFA konfigürasyonunun enerjetik olarak avantajlı olduğu bölgenin yeterince geniş bir bölge olduğu elde edilirken AFA konfigürasyonunun enerjetik olarak avantajlı olduğu bölge ise dar bir bölge olarak hesaplanmıştır. Disk geometriye kıyasla Corbino geometrilerinde RFA bölgesinin genişliği giderek daralırken AFA bölgesinin genişliğinin giderek arttığı elde edilmiştir. İç yarıçap değeri büyük olan $r_0 = 12$ Corbino geometrisinde RFA konfigürasyonunun en dar olduğu bölge hesaplanırken AFA konfigürasyonunun en geniş olduğu bölge elde edilmiştir. Dolayısıyla hangi konfigürasyonun enerjetik olarak avantajlı olduğunu hem tuzağın şekli hem de iç etkileşimlerin oranı belirlemektedir.

Disk geometrisinde sistem çoğunlukla RFA konfigürasyonu taban durumu olarak seçme eğilimindedir. Corbino geometrilerinde ise bu durum AFA konfigürasyonu olarak seçilebilecektir. Özellikle Corbino $r_0 = 12$ geometrisinde sistem parametre uzayında geniş bir bölgede AFA konfigürasyonu taban durumu olarak seçme eğilimi gösterecektir. Burada önemli bir diğer kriter olan arayüzey enerjisinin bileşenler arası etkileşim oranının artmasıyla birlikte AFA ve RFA konfigürasyonları arasındaki enerji farkının arttığını göstermiştik (Bkz: Şekil 4.7). Aynı zamanda asimetric etkileşimler altında sistemin AFA durumundan RFA durumuna veya RFA durumundan AFA durumuna geçiş yapabileceğini de göstermiştik (Bkz: Şekil 4.8 ve 4.9). Bu geçişlerin elde edilmesindeki en önemli nicelik arayüzey enerjisidir. Bir konfigürasyon için TF enerjisi hesaplandıktan sonra bu değere eklenen arayüzey enerjisi bu sonuçları elde etmemizde önemli bir etkidir. Dolayısıyla arayüzey katkısı olmadan bu geçişlerin gerçekleşemeyeceğini söyleyebiliriz.

Şekil 4.11 da etkileşim enerjileri düzleminde sistemin faz diyagramı oluşturulurken TF enerjisine eklenen arayüzey enerjisi tanjant hiperbolik modeline göre hesaplanmıştır. Siyah kalın çizgiler yine AFA ve RFA konfigürasyonlarının sınırlarını göstermektedir. Timmermans'ın modeline benzer şekilde RFA konfigürasyonunun enerjetik



Şekil 4.10: Arayüzey enerjisinin Timmermans'ın modeline göre hesaplandığı faz diyagramı gösterilmektedir. İki bileşenli yüklü Bose gazı karışımının faz diyagramı etkileşim parametreleri düzleminde $\gamma - \gamma_0$ disk ve Corbino geometrileri için oluşturulmuştur. (a) Disk $r_0 = 0$, (b) Corbino $r_0 = 8$, (c) Corbino $r_0 = 12$ geometrilerini gösterir. Turuncu bölge radyal faz ayrışmasının, mavi bölge, açısız faz ayrışmasının enerjetik olarak avantajlı olduğu bölgeleri göstermektedir.



Şekil 4.11: Arayüzey enerjisinin tanjant hiperbolik modele göre hesaplandığı faz diyagramı gösterilmektedir. İki bileşenli yüklü Bose gazı karışımının faz diyagramı etkileşim parametreleri düzleminde $\gamma - \gamma_0$ disk ve Corbino geometrileri için oluşturulmuştur. (a) Disk $r_0 = 0$, (b) Corbino $r_0 = 8$, (c) Corbino $r_0 = 12$ geometrilerini gösterir. Turuncu bölge radyal faz ayrışmasının, mavi bölge, açısız faz ayrışmasının enerjetik olarak avantajlı olduğu bölgeleri göstermektedir.

olarak avantajlı olduğu en geniş bölge disk geometride elde edilirken AFA konfigürasyonun enerjetik olarak avantajlı olduğu en geniş bölge ise Corbino $r_0 = 12$ geometrisinde hesaplanmıştır. Burada bileşenler arası etkileşim oranı veya bileşenlerin iç etkileşim oranına bağlı olarak AFA durumundan RFA durumuna veya RFA durumundan AFA durumuna geçiş olabileceği faz diyagramı üzerinde görülebilmektedir. Timmermans'ın modeline göre bazı farklılıklar ise şunlardır; disk geometrisinde AFA konfigürasyonu ile Corbino $r_0 = 12$ geometrisinde RFA konfigürasyonunun enerjetik olarak avantajlı olduğu bölgelerin Timmermans'ın modeline kıyasla daha dar oldukları elde edilmiştir.

Bu iki model arasında GP sonuçları ile daha yakın tutarlılık gösteren model Timmermans'ın modelidir. Sınır üzerinde GP simülasyonunun RFA veya AFA konfigürasyonundan birini taban durumu olarak seçtiği etkileşim değerleri için Timmermans'ın modeli tutarlı olarak aynı konfigürasyonu belirlerken bu değerlerin bazıları için tanjant hiperbolik model aynı konfigürasyonu seçememiştir. Örnek olarak Corbino $r_0 = 12$ geometrisinde AFA - RFA sınırındaki bir etkileşim değeri için her iki modele göre hesaplanan toplam TF enerjileri o noktadaki toplam GP enerjisi ile karşılaştırmalı olarak aşağıda Tablo 4.4 ile verilmektedir. Bu değer AFA-RFA sınırı oluşturulurken iki modelin farklı konfigürasyonları taban durum olarak belirlediği etkileşim değerlerinden birine karşılık gelmektedir.

Corbino $r_0 = 12$	E_{top}	E_s
GP (AFA)	23.625	-
GP (RFA)	23.599	-
TF (AFA-Timmermans)	23.869	0.050
TF (RFA-Timmermans)	23.855	0.254
TF (AFA-hiperbolik)	23.871	0.052
TF (RFA-hiperbolik)	23.872	0.271

Tablo 4.4: Etkileşim değerleri $U = 5000$, $\gamma = 1.35$, $\gamma = 1.55$ için Timmermans'ın modeli ve hiperbolik modele göre hesaplanan toplam TF enerjileri ile toplam GP enerjisi AFA ve RFA durumları için elde edilmiştir.

Yukarıdaki tabloda $U_a = 7750$, $U_b = 5000$ ve $U_{ab} = 6750$ etkileşim değerleri için GP simülasyonu sonucunda sistemin taban durumu RFA konfigürasyonu olarak belirlenmiştir. Bu etkileşim değerlerinde Timmermans'ın modeli GP ile uyumlu bir sonuç verirken hiperbolik model ise AFA konfigürasyonunu taban durum olarak seçmiştir. Dolayısıyla Timmermans'ın modeli AFA-RFA sınırı üzerinde GP sonuçları ile daha yakın sonuç verdiği için tercih edilmiştir.

4.6 İki Bileşenli Yoğuşuğun Dönme Özellikleri

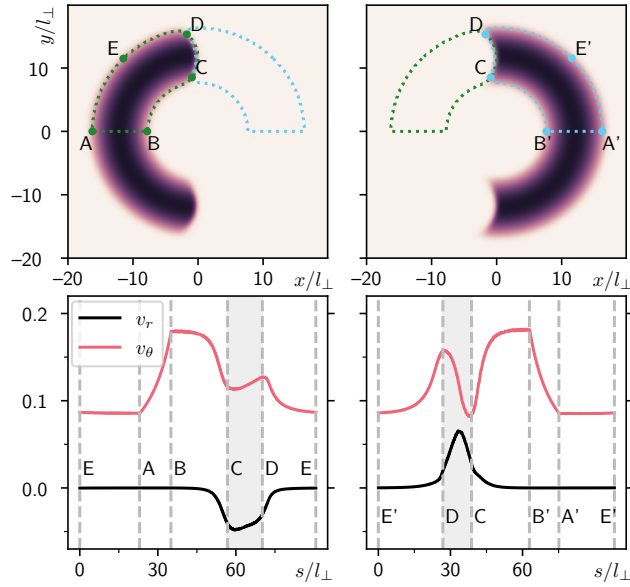
Bu kısımda ayrışık faz durumunda bulunan yüklü karışımın dönme özellikleri incelenmiştir. Atomik Bose gazının hız alanı, yoğuşuğun faz grandyenti $\mathbf{v} \sim \nabla\varphi$ ile orantılı olarak tanımlanmaktadır. Dolayısıyla fazda bir tekillik oluşmadığı takdirde bu atomik Bose gazının irrotasyonel bir akışkan olduğunu belirtir. Fazda oluşan bu tekillikler ise

yoğuşukta kuantize girdaplar olarak ortaya çıkmaktadır. İki boyutta kuantize bir girdap etrafında kapalı bir çevrim dikkate alındığında,

$$\kappa = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} r\mathbf{v} \cdot \hat{\theta}d\theta = 2\pi r v_\theta \Rightarrow v_\theta = \frac{q\hbar}{Mr} \quad (4.89)$$

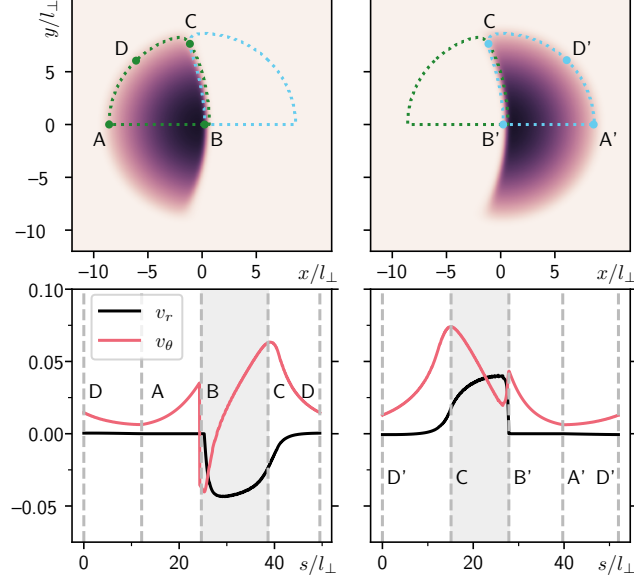
kuantize dolaşım yukarıdaki gibi elde edilmektedir. Dolayısıyla kuantize bir girdap için açısal hız alanı $1/r$ ile orantılıdır. Sabit açısal hız ile dönen katı bir cismin hız alanı ise r ile orantılıdır.

Şekil 4.12 ve Şekil 4.13'de Corbino $r_0 = 12$ ve disk geometrileri için yoğunluk dağılımı ve hız profilleri gösterilmektedir. Bileşenlerin yoğunluk dağılımları üzerinde sabit yoğunlukta birer kapalı çevrim dikkate alınarak bileşenlerin hız profilleri hesaplanmıştır. Bu kapalı çevrim, Corbino geometri için E, (E') \rightarrow B, (B') \rightarrow D ve disk geometri için D, (D') \rightarrow B, (B') \rightarrow C yolları üzerinde belirlenmiştir. Değişik eş yoğunluk eğrileri üzerinde sonuçlar nitelik olarak benzerdir.



Şekil 4.12: Üst satırda yoğunluk dağılımları ve alt satırda hız alanının radyal ve açısal bileşenleri Corbino $r_0 = 12$ geometrisi için AFA konfigürasyonunda gösterilmiştir. Etkileşim değerleri; $U = 3000$, $\gamma_0 = 1.2$ ve $\gamma = 1.4$ ile verilmektedir.

Bileşenlerin radyal hızları siyah kalın çizgi ile açısal hızları kırmızı kalın çizgi ile gösterilmiştir. Hız dağılımları dikkate alındığında her iki geometri için arayüzey sınırı hariç diğer bölgelerde bileşenler üstün akışkan davranışı sergilemektedirler. Bileşenlerin açısal hızları v_θ , A (A') ve B (B') noktaları arasında $1/r$ davranışı göstermektedir. Sınır üzerinde, Corbino geometri için C ve D disk geometri için B ve C noktaları arasında sıfırdan farklı bir radyal hız dağılımı hesaplanmıştır. Bu dağılım klasik bir



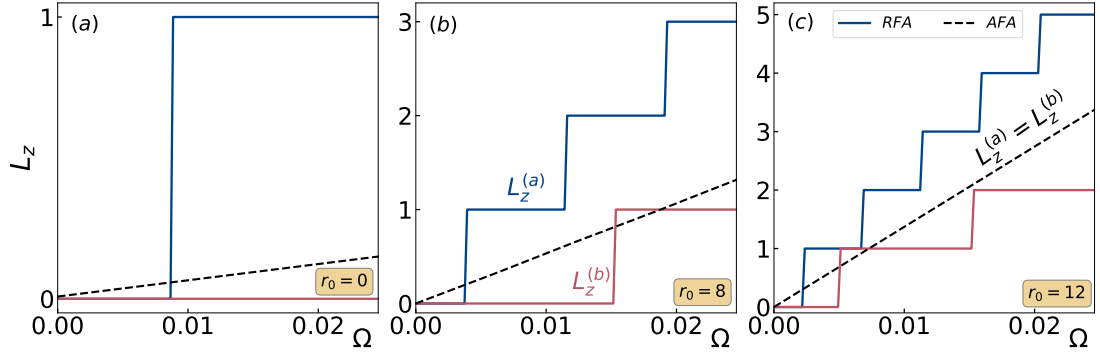
Şekil 4.13: Üst satırda yoğunluk dağılımları ve alt satırda hız alanının radyal ve açısai bileşenleri disk geometri için AFA konfigürasyonunda gösterilmiştir. Etkileşim değerleri; $U = 3000$, $\gamma_0 = 1.025$ ve $\gamma = 1.2$ ile verilmektedir.

akışkanın sergilediği gibi r ile orantılı bir davranış göstermektedir. Bileşenlerin sınır üzerindeki radyal hız dağılımları zıt doğrultularda ve eşit büyüklükte hesaplanmıştır.

Ayrıca yüklü karışımın açısai momentum özelliği incelenmiştir. Ayrışık faz limitinde konfigürasyona bağlı olarak sistem farklı açısai momentum davranışı sergilemektedir. Çünkü radyal faz ayrışması konfigürasyonunda kuantize dolaşım koşulu sağlanırken açısai faz ayrışımı konfigürasyonda kuantize dolaşım koşulu sağlanmaz. Dolayısıyla RFA konfigürasyonu için rotasyon parametresine göre bileşenlerin açısai momentumu kuantize değerli iken AFA konfigürasyonunda ise artan dönme için doğrusaldır. Şekil 4.14'de disk ve Corbino geometrileri için rotasyon parametresine göre bileşenlerin açısai momentumları hesaplanmıştır. Etkileşim enerjisi $U = 5000$ olmak üzere RFA konfigürasyonu için etkileşim oranları,

$$r_0 = 0 \quad \text{ve} \quad r_0 = 8 \Rightarrow \gamma, \gamma_0 = 1.4, 1.4, \quad r_0 = 12 \Rightarrow \gamma, \gamma_0 = 1.4, 1.8 \quad (4.90)$$

ve AFA konfigürasyonu için etkileşim oranları $(\gamma, \gamma_0) = (1.4, 1.0)$ ile verilmektedir. Burada açıkça görüleceği üzere, RFA konfigürasyonunda bileşenlerin açısai momentum değerleri kuantize iken AFA konfigürasyonunda eşit büyüklükte $l_z^a = l_z^b$ ve süreklidir. Örtüşmeyen limit durumunda etkileşim enerjilerinin büyüklüğüne bağlı olarak konfigürasyonlar arasında geçiş yapmak (AFA \leftrightarrow RFA) aynı zamanda sistemin açısai momentum özelliğini de değiştirmek demektir.



Şekil 4.14: (a) Disk $r_0 = 0$ (b) Corbino $r_0 = 8$ (c) Corbino $r_0 = 12$ geometrilerinde rotasyon parametresine göre eşit yüklü $\Omega_a = \Omega_b = \Omega$ karışımın açısıl momentumundaki değişim hesaplanmıştır. Bileşenlerin açısıl momentimleri L_z^j , ($j = a, b$) ile gösterilmiştir.

4.7 Bölüm içi Sonuçlar

Bu çalışmada, düzgün bir manyetik alan altında yüklü iki bileşenli atomik Bose gazı karışımının ayrışma konfigürasyonları ve bu konfigürasyonların rotasyonel özellikleri disk ve Corbino tuzak geometrileri ele alınarak incelenmiştir. Bu tür bir karışım için ayrık faz durumları, açısıl ve radyal olmak üzere iki ayrı konfigürasyon olarak ortaya çıkmaktadır. Sistemin hangi konfigürasyonu taban durum olarak seçtiği GP ve TF yaklaşımları kullanılarak belirlenmiştir.

Simetrik etkileşimler altında tuzak potansiyelinin biçiminden bağımsız olarak hem GP hem de TF düzeyinde açısıl konfigürasyon taban durum olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla simetrik etkileşimler altında sistemin taban durumunun belirlenmesinde tuzak geometrisinin bir etkisinin olmadığı gösterilmiştir. Radyal konfigürasyonun sistemin bir taban durumu olarak seçilebilmesi ise, ancak etkileşimler arasındaki simetrilerinin kırılması ile mümkün olabileceği elde edilmiştir. Böylece bileşenler içi etkileşimlerin şiddetine bağlı olarak AFA konfigürasyonundan RFA konfigürasyona bir geçiş olduğu disk ve Corbino geometrilerinde gösterilmiştir. Bu geçişin belirlenmesindeki en önemli etken ise arayüzey enerjisidir. Aynı zamanda etkileşimler düzleminde oluşturulan faz diyagramı ile RFA ve AFA konfigürasyonlarının enerjetik olarak avantajlı olduğu bölgeler disk ve Corbino geometrileri için hesaplanmıştır. Parametre uzayında RFA konfigürasyonunun enerji açısından daha çok tercih edildiği geometri; disk, ve AFA konfigürasyonunun enerji açısından daha çok tercih edildiği geometri ise Corbino $r_0 = 12$ geometrisi olarak belirlenmiştir. Karışımlar için konfigürasyonlar arası geçişin tuzak

potansiyelinin şekline bağlı olduğu daha önce gösterilmişken [98], [99], [101], [102] burada bileşenler içi etkileşim simetrisinin kırılması ile böyle bir geçişin mümkün olabileceği gösterilmiştir.

Eşit yüklü karışımın rotasyonel özellikleri incelediğinde ayrık faz durumlarının niteliksel olarak farklı açısız momentum davranışları sergilediği elde edilmiştir. Çünkü dönme eksenini etrafında dolaşım kuantizasyon koşulu RFA konfigürasyonu için sağlanırken AFA konfigürasyonunda bu koşul sağlanmaz. Disk ve Corbino geometrileri ele alınarak sistemin hız profili incelendiğinde ise sınır bölgelerinde bileşenler için sıfırdan farklı bir radyal hız profili elde edilmiştir. Sınır dışında kalan bölgelerde ise bileşenler $1/r$ ile orantılı olarak açısız hız dağılımı profili sergilemiştir.

Literatürde dengeli iç etkileşimler altında ayrışık faz limitindeki iki bileşenli bir karışımın sınır üzerinde r bağımlı bir radyal hız profili sergilediği Corbino geometrisi ele alınarak gösterilmiştir [129]. Burada böyle bir davranışın simetrik bileşen içi etkileşim dengesinin bozulduğu durum söz konusu olduğunda hem disk hem de Corbino geometrili bir tuzak potansiyeli ele alınarak sınırda r ile orantılı bir hız profilinin gözlenebileceği gösterilmiştir [130].

5 SONUÇ

Bu tez çalışmasında itici etkileşimli ve etkin yapay yüklü iki bileşenli Bose-Einstein karışımının manyetik alan altındaki özellikleri farklı tuzak geometrileri ele alınarak incelenmiştir. Nötr atomların etkin yapay yük ile bağlanması, ışık uyarımlı yapay manyetik alan oluşturulmasıyla düşünülmüştür.

Halka potansiyeline tuzaklanan yapay manyetik alan etkisinde eşit ve farklı yüklü karışımların açısal momentum özellikleri Bogoliubov yaklaşımı çerçevesinde incelenmiştir. Tek bileşenli bir yoğunlukta olduğu gibi, eşit yüklü bir karışım için uyarılmış parçacıkların momentum durumları üzerine dağılımı yoğunluk durumu etrafında simetrik olarak elde edilmiştir. Bileşenlerin etkin yüklerinin eşit olması sebebiyle manyetik alan her iki bileşene eşit şiddette etki edecektir ve dolayısıyla bu simetrik davranış beklenmektedir. Eşit yüklü bir karışımda çarpışmalar sebebiyle yoğunluk durumundan üst kuantum durumlarına uyarılan parçacıklar, büyüklükleri aynı, işaretleri farklı momentum çiftleri şeklinde uyarılacağından taşıdıkları net momentum sıfırdır.

Bu çalışmanın asıl motivasyonu olan açısal momentum aktarımı ve neticesinde enerji kayıpsız bir sürüklenme olayı farklı yüklü bir karışım için hesaplanmıştır. Bu aktarım, bileşenlerin uzayda örtüştüğü durumda, birinin yüklü, diğerinin yüksüz olduğu limitte incelenmiştir. Farklı yüklü bir karışım için uyarılmış parçacıkların momentum durumları üzerine dağılımı, yoğunluk momentum durumu etrafında asimetric olacak şekilde elde edilmiştir. Bu asimetric davranış bileşenlerin açısal momentum özelliklerini belirgin bir biçimde değiştirir ve açısal momentuma net katkıları sıfırdan farklı, sonlu bir değerdir. Bileşenlerin açısal momentumları ise eşit büyüklükte ancak zıt işaretli olacak şekilde elde edilmiştir. Başka bir ifadeyle, bileşenlerden biri manyetik alan ile doğrudan bağlanmasa dahi her iki bileşen için sonlu değerde bir açısal momentum hesaplanmıştır. Burada sistemin toplam açısal momentumu korunmuştur ve başlangıçtaki yoğunluk durumunun değerine eşittir, yani sıfırdır.

Başlangıçta öngördüğümüz gibi farklı yüklü bir karışım için manyetik alan ile bağ-

lanan yüklü bileşenin, manyetik alan ile doğrudan bağlanmayan yüksüz bileşene Lorentz kuvvetinin etkisini aktarabildiği hesaplanmıştır. Manyetik alanın etkisiyle ivmelenen yüklü bileşen aynı uzayda eşleştiği, manyetik alanı görmeyen diğer bileşeni etkileşimler aracılığıyla ivmelendirebildiği gösterilmiştir. Bu olay, manyetik alanı görmeyen yüksüz bileşenin, yüklü bileşen tarafından ivmelenerek sürüklenmesi neticesinde enerji kayıpsız bir sürükleme olayı olarak ortaya çıkmıştır. Neticede yüklü bileşenden yüksüz bileşene bir açısal momentum aktarımının gerçekleştiği gösterilmiştir [50].

Ortalama alan seviyesinde bileşenlerin yük değerlerinin farkı, yoğunluk-yoğunluk etkileşimlerinden dolayı ortalama alan düzeyinde etkili olmasa da sistemin parçacığımsı uyarılmalarını etkileyecektir. Bu açıdan ortalama alan ötesinde çalışmaların önemi gösterilmiştir.

Bu çalışmanın bir diğer amacı olan örtüşük durumda girdap aktarımı, farklı yüklü bir karışım ele alındığında karışımın enerjetik ve dinamik kararsızlıklarının Bogoliubov enerji spektrumu üzerinden incelenmesiyle analiz edilmiştir. Bunun için karışımın etkileşim enerjisi-manyetik alan düzleminde faz diyagramı, Bölüm 3.2.3'de hesaplanmıştır. Hem enerji hem de dinamik açıdan manyetik alan ile bağlanan yüklü bileşenden manyetik alanı görmeyen yüksüz bileşene girdap aktarımının gerçekleşebileceği ve bu aktarımın, yüklü bileşen için +1 değerli bir kuantize girdap, yüksüz bileşen için -1 değerli bir kuantize anti girdap şeklinde olabileceği elde edilmiştir. Bunun, bir boyutlu bir halka potansiyeli etrafında bileşenlerin zıt doğrultularda dönmesiyle neticelendiği gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilgilendiğimiz diğer araştırma konusu ise söz konusu karışımların ayrışık faz konfigürasyonları ve bu konfigürasyonların rotasyonel özelliklerini disk ve Corbino geometrileri üzerinde incelemek olmuştur. Bu tür iki bileşenli bir sistemin ayrışık konfigürasyonları açısal ve radyal olmak üzere iki farklı konfigürasyon altında sınıflandırılabilir.

Sıfır sıcaklıkta karışımın taban durum konfigürasyonu belirlenirken Gross-Pitaveskii ve Thomas-Fermi yaklaşımları kullanılmıştır. Thomas-Fermi yaklaşımı altında sistemin doğru konfigürasyonu taban durum olarak seçebilmesi için yerel yoğunluk yaklaşımı çerçevesinde arayüzey enerjisi hesaplanarak sistemin toplam enerjisi elde edilmiştir. Bu sayede, sistemin enerji açısından avantajlı olduğu doğru taban durumu belirlenebilmiştir. Böylece Thomas-Fermi sonuçları ile Gross-Pitaveskii sonuçları karşı-

laştırıldığında nitel ve nicel olarak benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Sistemin hangi ayrışık durum konfigürasyonu taban durum olarak seçtiği bileşenlerarası etkileşimlere bağlı olarak incelenmiştir. Simetrik bileşen içi etkileşimler altında tuzak potansiyelinin şeklinden bağımsız olarak hem eşit yüklü hem de farklı yüklü karışımlar için açısız konfigürasyonun her zaman enerji açısından avantajlı konfigürasyon olduğu elde edilmiştir. Dolayısıyla simetrik etkileşimler söz konusu olduğunda sistemin taban durum konfigürasyonunun belirlemede tuzak geometrisinin bir etken olmadığı Bölüm 4.5.1'de gösterilmiştir. Buna karşın bileşen içi etkileşimlerin farklı alınmasıyla sistemin radyal konfigürasyonu bir taban durum olarak seçebileceği gösterilmiştir. Konfigürasyonlar arası geçiş etkileşimlerin bir fonksiyonu olarak incelenmiştir. Böylece her iki konfigürasyon arasında geçişin mümkün olabileceği ve aynı zamanda tuzak geometrisinin asimetric etkileşimler altında önemli bir etken olduğu Bölüm 4.5.2'de gösterilmiştir. Başka bir ifadeyle, asimetric etkileşimler söz konusu olduğunda tuzak geometrisinin şeklinin konfigürasyonlar arası faz geçişinde etkili bir faktör olduğu belirlenmiştir. Sistem her zaman serbest enerjiyi azaltma eğiliminde olduğundan bileşenlerin yoğunluk dağılımları incelendiğinde yüksek etkileşimli bileşenin dışarıya doğru yayıldığı ve düşük etkileşimli bileşenin ise merkeze doğru toplandığı elde edilmiştir. Burada tuzak potansiyelinin şekli bileşenlerin yoğunluk dağılımlarını etkilemektedir ve bu niteliksel olarak bileşenler arası etkileşim simetrilerini kırmak ile benzerdir.

Diğer taraftan sistemin faz diyagramı, disk ve Corbino geometrileri ele alınarak bileşenler içi etkileşim oranı ve bileşenler arası etkileşim oranı düzleminde Bölüm 4.5.3'te oluşturulmuştur. Faz diyagramı üzerinde açısız ve radyal konfigürasyon sınırı Thomas-Fermi yaklaşımına göre elde edilmiştir ve sonuçların doğruluğu Gross-Pitaevskii sonuçları ile teyit edilmiştir. Burada hangi konfigürasyonun karışımın taban durumu olarak seçildiği tuzak geometrisinin biçimine, bileşenler içi etkileşimin şiddetine ve en önemlisi arayüzey enerjisine bağlı olduğu gösterilmiştir. Radyal konfigürasyonun geniş bir parametre bölgesinde sistemin taban durumu olarak belirlendiği disk geometrisi için elde edilmiştir. Buna karşın Corbino geometrisinde açısız konfigürasyonun enerji açısından avantajlı olduğu ve geniş bir parametre uzayında sistemin taban durumu olarak seçildiği belirlenmiştir.

Ayrışık durum konfigürasyonlarının yoğunluk dağılımındaki farklılık karışımın ro-

tasyonel özelliklerini de etkilemektedir. Manyetik alan altında karışımın rotasyonel özellikleri incelenirken disk ve Corbino geometrileri ele alınarak bileşenlerin hız profilleri ve açısal momentumları hesaplanmıştır. Açısal konfigürasyon için ortak eksen etrafında dolaşım kuantizasyon koşulu sağlanmadığından bileşenlerin açısal momentumları artan bir dönmeye göre sürekli değer alabilir. Buna karşın radyal konfigürasyonda kuantizasyon koşulu sağlandığından bileşenlerin açısal momentumları kesikli değer almaktadır. Neticede karışımın rotasyonel özellikleri ele alındığında niteliksel olarak açısal ve radyal konfigürasyonların farklı davranış sergilediği gösterilmiştir. Aynı zamanda bu durum, konfigürasyonlar arası geçiş incelendiğinde karışımın rotasyonel özelliklerinin de değişeceği anlamına gelmektedir.

Disk ve Corbino geometrileri ele alınarak eşit yüklü bileşenlerin hız profilleri incelendiğinde ise sınır hariç diğer bölgelerde bileşenlerin hız profili için, r ortak dönme ekseninde uzaklık olmak üzere, $1/r$ davranışı elde edilirken, sınır bölgelerinde r ile orantılı bir hız profili davranışı elde edilmiştir. Dolayısıyla bileşenler sınır haricinde üstün akışkan davranışı sergilerken sınır üzerinde ise bir katı cisim dönmesi davranışı sergilemektedir. Sınır üzerindeki r bağımlı hız profili bileşenler bazında eşit büyüklükte ve zıt yönlerde elde edilmiştir.

Dengeli bileşen içi etkileşimler altında ayrışık faz limitindeki iki bileşenli bir karışımın sınır üzerinde r bağımlı bir radyal hız profili sergilediği Corbino geometrisi ele alınarak gösterilmiştir [129]. Bu çalışmamızda böyle bir davranışın bileşen içi etkileşimler dengesinin bozulduğu durum altında hem disk hem de Corbino geometrili tuzak potansiyelleri ele alındığında da gözlenebileceği gösterilmiştir [130].

Farklı yüklü karışımların rotasyonel özellikleri ise açık bir problemdir. Bileşenlerden birinin yüklü diğerinin yüksüz olduğu bir karışım ortalama alan yaklaşımı çerçevesinde ele alındığında rotasyonel özelliklerinin niteliksel olarak farklı davranışlar sergilediği belirlenmiştir. Dönme eksenini etrafında yüklü bileşen için sonlu bir rotasyon elde edilebiliyorken yüksüz bileşen için sıfır rotasyon elde edilmiştir. Literatürde detaylı olarak araştırılmış bir problem olmaması sebebiyle, farklı metodlar veya yaklaşımlar uygulanarak incelenmesi planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] S. Bose, “Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese,” *Zeitschrift für Physik* **26**, 178 (1924).
- [2] A. Einstein, “Quantentheorie des Einatomigen Idealen Gases,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* **1**, 3 (1925).
- [3] E. P. Gross, “Structure of a quantized vortex in boson systems,” *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
- [4] L. P. Pitaevskii, “Vortex Lines in an Imperfect Bose Gas,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **40**, 646 (1961).
- [5] M. H. Anderson *vd.*, “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor,” *Science* **269**, 198 (1995).
- [6] K. B. Davis *vd.*, “Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms,” *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [7] C. C. Bradley *vd.*, “Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions,” *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [8] I. Bloch, J. Dalibard ve W. Zwerger, “Many-body physics with ultracold gases,” *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [9] E. Tiesinga, B. J. Verhaar ve H. T. C. Stoof, “Threshold and resonance phenomena in ultracold ground-state collisions,” *Phys. Rev. A* **47**, 4114 (1993).
- [10] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne ve E. Tiesinga, “Feshbach resonances in ultracold gases,” *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
- [11] S. Inouye *vd.*, “Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate,” *Nature* **392**, 151-154 (1998).

- [12] Ph. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen, F. A. van Abeelen ve B. J. Verhaar, “Observation of a Feshbach Resonance in Cold Atom Scattering,” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 69 (1998).
- [13] B. Paredes *vd.*, “Tonks–Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice,” *Nature* **429**, 277–281 (2004).
- [14] E. A. Donley *vd.*, “Dynamics of collapsing and exploding Bose–Einstein condensates,” *Nature* **412**, 295–299 (2008).
- [15] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch ve I. Bloch, “Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms,” *Nature* **415** 39–44 (2002).
- [16] I. B. Spielman, W. D. Phillips ve J. V. Porto, “Mott-Insulator Transition in a Two-Dimensional Atomic Bose Gas,” *Phys. Rev. Lett.* **98**, 080404 (2007).
- [17] M. R. Matthews *vd.*, “Vortices in a Bose-Einstein Condensate,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
- [18] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben ve J. Dalibard, “Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).
- [19] K. W. Madison, F. Chevy, V. Bretin ve J. Dalibard, “Stationary States of a Rotating Bose-Einstein Condensate: Routes to Vortex Nucleation,” *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4443 (2001).
- [20] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels ve W. Ketterle, “Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates,” *Science* **292**, 476 (2001).
- [21] M. F. Andersen *vd.*, “Quantized Rotation of Atoms from Photons with Orbital Angular Momentum,” *Phys. Rev. Lett.* **97**, 170406 (2006).
- [22] A. E. Leanhardt *vd.*, “Imprinting Vortices in a Bose-Einstein Condensate using Topological Phases,” *Phys. Rev. Lett.* **89**, 190403 (2002).
- [23] V. Schweikhard, I. Coddington, P. Engels, V. P. Mogen- dorff ve E. A. Cornell, “Rapidly Rotating Bose-Einstein Condensates in and near the Lowest Landau Level,” *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040404 (2004).

- [24] N. K. Wilkin ve J. M. F. Gunn, “Condensation of “Composite Bosons” in a Rotating BEC,” Phys. Rev. Lett. **84**, 6 (2000).
- [25] L. T. Ho, “Bose-Einstein Condensates with Large Number of Vortices,” Phys. Rev. Lett. **87**, 060403 (2001).
- [26] A. S. Sørensen, E. Demler ve M. D. Lukin, “Fractional Quantum Hall States of Atoms in Optical Lattices,” Phys. Rev. Lett. **94**, 086803 (2005).
- [27] M. A. Baranov, K. Osterloh ve M. Lewenstein, “Fractional Quantum Hall States in Ultracold Rapidly Rotating Dipolar Fermi Gases,” Phys. Rev. Lett. **94**, 070404 (2005).
- [28] S.-L. Zhu, H. Fu, C.-J. Wu, S.-C. Zhang ve L.-M. Duan, “Spin Hall Effects for Cold Atoms in a Light-Induced Gauge Potential,” Phys. Rev. Lett. **97**, 240401 (2006).
- [29] R. O. Umucalilar, H. Zhai ve M. Ö. Oktel, “Trapped Fermi Gases in Rotating Optical Lattices: Realization and Detection of the Topological Hofstadter Insulator,” Phys. Rev. Lett. **100**, 070402 (2008).
- [30] N. R. Cooper, “Rapidly rotating atomic gases,” Advances in Physics **57**, 539 (2008).
- [31] A. L. Fetter, “Rotating trapped Bose-Einstein condensates,” Rev. Mod. Phys. **81**, 647 (2009).
- [32] G. Juzeliūnas, J. Ruseckas, P. Öhberg ve M. Fleischhauer, “Light-induced effective magnetic fields for ultracold atoms in planar geometries,” Phys. Rev. A **73**, 025602 (2006).
- [33] I. B. Spielman, “Raman processes and effective gauge potentials,” Phys. Rev. A **79**, 063613 (2009).
- [34] Y. J. Lin *vd.*, “Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms,” Nature **462**, 628 (2009).
- [35] Y. J. Lin *vd.*, “Bose-Einstein Condensate in a Uniform Light-Induced Vector Potential,” Phys. Rev. Lett. **102**, 130401 (2009).

- [36] Y. J. Lin ve I. B. Spielman, “Synthetic gauge potentials for ultracold neutral atoms,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **49**, 183001 (2016).
- [37] R. M. Price *vd.*, “Vortex nucleation in a Bose–Einstein condensate: from the inside out,” *New Journal of Physics* **18**, 113009 (2016).
- [38] P. C. Haljan, I. Coddington, P. Engels ve E. A. Cornell, “Driving Bose-Einstein-Condensate Vorticity with a Rotating Normal Cloud,” *Phys. Rev. Lett.* **87** 210403 (2001).
- [39] P. Engels, I. Coddington, P. C. Haljan, V. Schweikhard ve E. A. Cornell, “Observation of Long-Lived Vortex Aggregates in Rapidly Rotating Bose-Einstein Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **90**, 170405 (2003).
- [40] E. J. Mueller ve T.-L. Ho, “Two-Component Bose-Einstein Condensates with a Large Number of Vortices,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 180403 (2002).
- [41] K. Kasamatsu, M. Tsubota ve M. Ueda, “Vortex Phase Diagram in Rotating Two-Component Bose-Einstein Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **91**, 150406 (2003).
- [42] K. Kasamatsu, M. Tsubota ve M. Ueda, “Vortices in multicomponent Bose-Einstein condensates,” *Int. J. of Mod. Phys. B* **19**, 1835 (2005).
- [43] M. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck ve W. Ketterle, “Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas,” *Nature* **435**, 1047–1051 (2005).
- [44] M. Lewenstein, A. Sanpera ve V. Ahufinger, “*Ultracold Atoms in Optical Lattices: Simulating Quantum Many-Body Systems*,” Oxford University Press (2012).
- [45] I. Bloch, J. Dalibard ve S. Nascimbène, “Quantum simulations with ultracold quantum gases,” *Nature Physics* **8**, 267–276 (2012).
- [46] V. Galitski ve I. B. Spielman, “Spin–orbit coupling in quantum gases,” *Nature* **494**, 49–54 (2013).
- [47] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas ve P. Öhberg, “Colloquium: Artificial gauge potentials for neutral atoms,” *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1523 (2011).

- [48] F. Nur Ünal, B. Hetényi ve M. Ö. Oktel, “Impurity coupled to an artificial magnetic field in a Fermi gas in a ring trap,” *Phys. Rev. A* **91**, 053625 (2015).
- [49] F. Nur Ünal ve M. Ö. Oktel, “Pairing of Fermions with Unequal Effective Charges in an Artificial Magnetic Field,” *Phys. Rev. Lett.* **116**, 045305 (2016).
- [50] S. S. Aksu, A. L. Subaşı ve N. Ghazanfari, “Mixture of two unequally charged superfluids in a magnetic field,” *Phys. Rev. A* **99**, 063628 (2019).
- [51] C.J. Myatt *vd.*, “Production of Two Overlapping Bose-Einstein Condensates by Sympathetic Cooling,” *Phys. Rev. Lett.* **78**, 586 (1997).
- [52] D.S. Hall *vd.*, “Dynamics of Component Separation in a Binary Mixture of Bose-Einstein Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1539 (1998).
- [53] D. S. Hall, M. R. Matthews, C. E. Wieman ve E. A. Cornell, “Measurements of Relative Phase in Two-Component Bose-Einstein Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1543 (1998).
- [54] D.M. Stamper-Kurn *vd.*, “Optical Confinement of a Bose-Einstein Condensate,” *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2027 (1998).
- [55] J. Stenger, “Spin domains in ground-state Bose–Einstein condensates,” *Nature (London)* **396**, 345 (1998).
- [56] M. R. Matthews *vd.*, “Dynamical Response of a Bose-Einstein Condensate to a Discontinuous Change in Internal State,” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 243 (1998).
- [57] P. Maddaloni *vd.*, “Collective Oscillations of Two Colliding Bose-Einstein Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2413 (2000).
- [58] S. Tojo *vd.*, “Controlling phase separation of binary Bose-Einstein condensates via mixed-spin-channel Feshbach resonance,” *Phys. Rev. A* **82**, 033609 (2010).
- [59] S. B. Papp, J. M. Pino ve C. E. Wieman, “Tunable Miscibility in a Dual-Species Bose-Einstein Condensate,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 040402 (2008).
- [60] S. Sugawa, R. Yamazaki, S. Taie ve Y. Takahashi, “Bose-Einstein condensate in gases of rare atomic species,” *Phys. Rev. A* **84**, 011610 (2011).

- [61] G. Modugno *vd.*, “Two Atomic Species Superfluid,” *Phys. Rev. Lett.* **89**, 190404 (2002).
- [62] G. Thalhammer *vd.*, “Double Species Bose-Einstein Condensate with Tunable Interspecies Interactions,” *Phys. Rev. Lett.* **100**, 210402 (2008).
- [63] D. J. McCarron *vd.*, “Dual-species Bose-Einstein condensate of ^{87}Rb and ^{133}Cs ,” *Phys. Rev. A* **84**, 011603 (2011).
- [64] A. D. Lercher *vd.*, “Production of a dual-species Bose-Einstein condensate of Rb and Cs atoms,” *Eur. Phys. J. D* **65**, 3 (2011).
- [65] B. Pasquiou *vd.*, “Quantum degenerate mixtures of strontium and rubidium atoms,” *Phys. Rev. A* **88**, 023601 (2013).
- [66] L. Wacker *vd.*, “Tunable dual-species Bose-Einstein condensates of ^{39}K and ^{87}Rb ,” *Phys. Rev. A* **92**, 053602 (2015).
- [67] F. Wang, X. Li, D. Xiong ve D. Wang, “A double species ^{23}Na and ^{87}Rb Bose–Einstein condensate with tunable miscibility via an interspecies Feshbach resonance,” *J. Phys. B* **49**, 015302 (2016).
- [68] Th. Busch, J. I. Cirac, V. M. Pérez-García ve P. Zoller, “Stability and collective excitations of a two-component Bose-Einstein condensed gas: A moment approach,” *Phys. Rev. A* **56**, 2978 (1997).
- [69] F. Dalfovo ve S. Stringari, “Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices,” *Phys. Rev. A* **53**, 2477 (1996).
- [70] P. A. Ruprecht, M. J. Holland, K. Burnett ve M. Edwards, “Time-dependent solution of the nonlinear Schrödinger equation for Bose-condensed trapped neutral atoms,” *Phys. Rev. A* **51**, 4704 (1995).
- [71] M. Edwards, R. J. Dodd, C. W. Clark, P. A. Ruprecht ve K. Burnett, “Properties of a Bose-Einstein condensate in an anisotropic harmonic potential,” *Phys. Rev. A* **53**, R1950(R) (1996).

- [72] E. P. Bashkin ve A. V. Vagov, “Instability and stratification of a two-component Bose-Einstein condensate in a trapped ultracold gas,” *Phys. Rev. B* **56**, 6207 (1997).
- [73] H. Pu ve N. P. Bigelow, “Properties of Two-Species Bose Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1130 (1998).
- [74] M. Edwards, P. A. Ruprecht, K. Burnett, R. J. Dodd ve C. W. Clark, “Collective Excitations of Atomic Bose-Einstein Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1671 (1996).
- [75] B. D. Esry, C. H. Greene, J. P. Burke, Jr. ve J. L. Bohn, “Hartree-Fock Theory for Double Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3594 (1997).
- [76] C. K. Law, H. Pu, N. P. Bigelow ve J. H. Eberly, ““Stability Signature” in Two-Species Dilute Bose-Einstein Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3105 (1997).
- [77] P. Öhberg ve S. Stenholm, “Hartree-Fock treatment of the two-component Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. A* **57**, 1272 (1998).
- [78] D. Gordon ve C. M. Savage, “Excitation spectrum and instability of a two-species Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. A* **58**, 1440 (1998).
- [79] R. Graham ve D. Walls, “Collective excitations of trapped binary mixtures of Bose-Einstein condensed gases,” *Phys. Rev. A* **57**, 484 (1998).
- [80] C. Ticknor, “Excitations of a trapped two-component Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. A* **88**, 013623 (2013).
- [81] A. F. Andreev ve E. P. Bashkin, “Three-velocity hydrodynamics of superfluid solutions,” *JETP* **69**, 319 (1975).
- [82] D. V. Fil ve S. I. Shevchenko “Nondissipative drag of super- flow in a two-component bose gas,” *Phys. Rev. A* **72**, 013616 (2005).
- [83] S. Gupta, K. W. Murch, K. L. Moore, T. P. Purdy ve D. M. Stamper-Kurn, “Bose-einstein condensation in a circular waveguide,” *Phys. Rev. Lett.* **95**, 143201 (2005)

- [84] C. Ryu *vd.*, “Observation of persistent flow of a bose-einstein condensate in a toroidal trap,” *Phys. Rev. Lett.* **99**, 260401 (2007).
- [85] A. Ramanathan *vd.*, “Superflow in a Toroidal Bose-Einstein Condensate: An Atom Circuit with a Tunable Weak Link,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 130401 (2011).
- [86] S. Moulder, S. Beattie, R. P. Smith, N. Tammuz ve Z. Hadzibabic, “Quantized supercurrent decay in an annular Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. A* **86**, 013629 (2012).
- [87] S. Eckel, F. Jendrzejewski, A. Kumar, C. J. Lobb ve G. K. Campbell, “Interferometric Measurement of the Current-Phase Relationship of a Superfluid Weak Link,” *Phys. Rev. X* **4**, 031052 (2014).
- [88] D. S. Rokhsar, “Vortex Stability and Persistent Currents in Trapped Bose Gases,” *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2164 (1997)
- [89] S. Bargi, F. Malet, G. M. Kavoulakis ve S. M. Reimann, “Persistent currents in Bose gases confined in annular traps,” *Phys. Rev. A* **82**, 043631 (2010).
- [90] P. L. Halkyard, M. P. A. Jones ve S. A. Gardiner, “Rotational response of two-component bose-einstein condensates in ring traps,” *Phys. Rev. A* **81**, 061602 (2010).
- [91] S. Beattie, S. Moulder, R. J. Fletcher ve Z. Hadzibabic, “Persistent Currents in Spinor Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **110**, 025301 (2013).
- [92] K. C. Wright, R. B. Blakestad, C. J. Lobb, W. D. Phillips, ve G. K. Campbell, “Driving Phase Slips in a Superfluid Atom Circuit with a Rotating Weak Link,” *Phys. Rev. Lett.* **110**, 025302 (2013).
- [93] S. Baharian ve G. Baym, “Bose-Einstein condensates in toroidal traps: Instabilities, swallow-tail loops, and self-trapping,” *Phys. Rev. A* **87**, 013619 (2013).
- [94] S. Ishino, M. Tsubota ve H. Takeuchi, “Counter-rotating vortices in miscible two-component Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A* **88**, 063617 (2013).
- [95] K. Anoshkin, Z. Wu ve E. Zaremba, “Persistent currents in a bosonic mixture in the ring geometry,” *Phys. Rev. A* **88**, 013609 (2013).

- [96] C. Ryu, K. C. Henderson ve M. G. Boshier, “Creation of matter wave Bessel beams and observation of quantized circulation in a Bose–Einstein condensates,” *New J. Phys.* **16**, 013046 (2014).
- [97] N. N. Bogoliubov, “On the theory of superfluidity,” *J. Phys. (USSR)* **11**, 23 (1947).
- [98] A. A. Svidzinsky ve S. T. Chui, “Symmetric-asymmetric transition in mixtures of bose-einstein condensates,” *Phys. Rev. A* **67**, 053608 (2003).
- [99] T. Shimodaira, T. Kishimoto ve H. Saito, “Connection between rotation and miscibility in a two-component Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. A* **82**, 013647 (2010).
- [100] L. Wen, W. M. Liu, Y. Cai, J. M. Zhang ve Jiangping Hu, “Controlling phase separation of a two-component Bose-Einstein condensate by confinement,” *Phys. Rev. A* **85**, 043602 (2012).
- [101] P. Mason, “Ground states of two-component condensates in a harmonic plus gaussian trap,” *he European Physical Journal B* **86**, 453 (2013).
- [102] M. Abad, A. Sartori, S. Finazzi, ve A. Recati, “Persistent currents in two-component condensates in a toroidal trap,” *Phys. Rev. A* **89**, 053602 (2014).
- [103] M. Trippenbach *vd.*, “Structure of binary Bose–Einstein condensates,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **33** 4017 (2000).
- [104] T. L. Ho ve V.B. Shenoy, “Binary Mixtures of Bose Condensates of Alkali Atoms,” *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3276 (1996)
- [105] P. Ao ve S. T. Chui, “Binary Bose-Einstein condensate mixtures in weakly and strongly segregated phases,” *Phys. Rev. A* **58**, 4836 (1998).
- [106] B. D. Esry ve C. H. Greene, “Spontaneous spatial symmetry breaking in two-component Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A* **59**, 1457 (1999).
- [107] S. T. Chui ve P. Ao, “Broken cylindrical symmetry in binary mixtures of Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A* **59**, 1473 (1999).

- [108] E. Timmermans, “Phase Separation of Bose-Einstein Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5718 (1998).
- [109] I. E. Mazets, “Waves on an interface between two phase-separated Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A* **65**, 033618 (2002).
- [110] F. Riboli ve M. Modugno, “Topology of the ground state of two interacting Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A* **65**, 063614 (2002).
- [111] D. M. Jezek ve P. Capuzzi, “Interaction-driven effects on two-component Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A* **66**, 015602 (2002).
- [112] R. A. Barankov, “Boundary of two mixed Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A* **66**, 013612 (2002).
- [113] A. A. Svidzinsky ve S. T. Chui, “Normal modes and stability of phase-separated trapped Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A* **68**, 013612 (2003).
- [114] B. V. Schaeybroeck, “Interface tension of Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A* **78**, 023624 (2008).
- [115] J. O. Indekeu *vd.*, “Static interfacial properties of Bose-Einstein-condensate mixtures,” *Phys. Rev. A* **91**, 033615 (2015).
- [116] K. Kasamatsu, Y. Yasui ve M. Tsubota, “Macroscopic quantum tunneling of two-component Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A* **64**, 053605 (2001).
- [117] C. J. Pethick ve H. Smith, “Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases,” Cambridge University Press (2008).
- [118] Anthony J. Leggett, “Quantum Liquids: Bose condensation and Cooper pairing in condensed-matter systems,” Oxford University Press (2006).
- [119] L. Pitaevskii ve S. Stringari, “Bose-Einstein Condensation and Superfluidity,” Oxford University Press (2016).
- [120] C. F. Barenghi ve N. G. Parker, “A Primer on Quantum Fluids,” Springer Briefs in Physics, Springer (2016).

- [121] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii ve S. Stringari, "Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases," *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [122] Anthony J. Leggett, "Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts," *Rev. Mod. Phys.* **73**, 307 (2003).
- [123] W. Ketterle, D. S. Durfee ve M. Stamper-Kurn, "Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates," *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi* **67**, IOS Press (1999).
- [124] Alexander L. Fetter, "Bose-Einstein Condensates in Dilute Trapped Atomic Gases," *Journal of Low Temperature Physics* **129**, 263 (2002).
- [125] W. Ketterle, "Nobel Lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser," *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 1131 (2002).
- [126] K. J. Garcia, "Artificial Gauge Fields for Ultracold Neutral Atoms," Doktora Tezi, Eylül 2012.
- [127] J. Smyrnakis *vd.*, "Mixtures of Bose Gases Confined in a Ring Potential," *Phys. Rev. Lett.* **103**, 100404 (2009).
- [128] A. I. Yakimenko *vd.*, "Generation and decay of persistent current in a toroidal Bose-Einstein condensate," *Romanian Reports in Physics* **67**, 249-272 (2015).
- [129] A. White, T. Hennessy ve T. Busch, "Emergence of classical rotation in superfluid Bose-Einstein condensates," *Phys. Rev. A* **93**, 033601 (2016).
- [130] S. S. Aksu, A. L. Subaşı ve N. Ghazanfari, "Phase separation in a mixture of charged Bose-Einstein condensates," arXiv:2005.08055 [cond-mat.quant-gas] (2020).
- [131] K. M. Mertes *vd.*, "Nonequilibrium dynamics and superfluid ring excitations in binary bose-einstein condensates," *Phys. Rev. Lett.* **99**, 190402 (2007).

A Bose-Einstein Yoğuğu: Rotasyon ve Manyetik Alan Niceliklerinin Karşılaştırılması

z eksenini etrafında $\Omega = \Omega \hat{z}$ açısal hızı ile dönen bir sistemin Hamiltonyeni aşığıdaki gibi tanımlanabilir.

$$H_{\Omega} = H_0 - \Omega \cdot \mathbf{L} = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) - \Omega \cdot \mathbf{L} \quad (\text{A.1})$$

Açısal momentum, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ olarak tanımlandığından dönen referans çerçevesinde yukarıda verilen Hamiltonyen yeniden düzenlenebilir.

$$H_{\Omega} = \frac{(\mathbf{p} - M\Omega \times \mathbf{r})^2}{2M} + \tilde{V}_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.2})$$

Burada $\tilde{V}_{\text{tuzak}}(\mathbf{r})$, efektif tuzak potansiyeli,

$$\tilde{V}_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) \equiv V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}M (\Omega \times \mathbf{r})^2 \quad (\text{A.3})$$

olarak tanımlandığından, $-\frac{1}{2}M (\Omega \times \mathbf{r})^2$ ile ifade edilen "merkezcil" katkıyı da içermektedir. Yüksüz bir parçacığın kinetik momentumu ise dönen bir referans çerçevesinde aşığıda gibi tanımlanmaktadır.

$$m\mathbf{v} = \mathbf{p} - M\Omega \times \mathbf{r} \quad (\text{A.4})$$

Bu seviyede düzgün bir manyetik alan etkisi altında Q yüklü bir parçacığın Hamiltonyenini tanımlayalım.

$$H_B = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2M} + V_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.5})$$

Burada manyetik alan altındaki yüklü parçacığın kinetik momentumu ise,

$$m\mathbf{v} = \mathbf{p} - Q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.6})$$

olarak elde edilmektedir. Dönen referans sisteminde yüksüz bir parçacığın kinetik momentumu denklem (A.4) ile manyetik alan altında hareket eden yüklü bir parçacığın

kinetik momentumu denklem (A.6) ve bunlara karşılık gelen sistemlerin denklem (A.2) ve (A.5) ile ifade edilen Hamiltonyenleri karşılaştırıldığında biçimsel olarak bu iki sistemin özdeş $M\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow Q\mathbf{A}(\mathbf{r})$ olduğu elde edilir. Düzgün manyetik alanı üreten vektör potansiyeli simetrik ayarda seçilirse $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r})$, manyetik alan ve açısal hız arasındaki ilişki aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$Q\mathbf{B} = 2M\boldsymbol{\Omega} \Rightarrow \boldsymbol{\Omega} = \frac{Q\mathbf{B}}{2M} \quad (\text{A.7})$$

Parçacıklar arasında ikili etkileşimler dikkate alındığında $V_{\text{etk}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ dönen referans çerçevesinde yüksüz sistemin çok parçacık Hamiltonyeni,

$$H_{\Omega} = \sum_i \left[\frac{(\mathbf{p}_i - M\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2}{2M} + \tilde{V}_{\text{tuzak}}(\mathbf{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{\text{etk}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (\text{A.8})$$

ve düzgün manyetik alan etkisi altında hareket eden yüklü sistemin çok parçacık Hamiltonyeni tanımlanabilir.

$$H_B = \sum_i \left[\frac{(\mathbf{p}_i - Q\mathbf{A}(\mathbf{r}_i))^2}{2M} + V(\mathbf{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{\text{etk}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (\text{A.9})$$

B Etkin İki Boyutta İki Bileşenli Bose-Einstein Yoğuşuğu

Üç boyutta, iki bileşenli Bose-Einstein yoğuşuğu karışımı sistemini tanımlayan Gross-Pitaevskii denklem kümesi efektif olarak iki boyutlu bir sisteme indirgenebilir. Üç boyutta karışımın Gross-Pitaevskii denklemleri,

$$i\hbar \frac{\partial \phi_1(\mathbf{r})}{\partial t} = \left[\hat{h}_1(\mathbf{r}) + g_{11}^{3D} |\phi_1(\mathbf{r})|^2 + g_{12}^{3D} |\phi_2(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_1(\mathbf{r}) \quad (\text{B.1})$$

$$i\hbar \frac{\partial \phi_2(\mathbf{r})}{\partial t} = \left[\hat{h}_2(\mathbf{r}) + g_{22}^{3D} |\phi_2(\mathbf{r})|^2 + g_{12}^{3D} |\phi_1(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_2(\mathbf{r}) \quad (\text{B.2})$$

ve \hat{h}_i tek parçacık Hamiltonyeni olmak üzere,

$$\hat{h}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{2M_i} (\mathbf{p}(\mathbf{r}) - Q_i \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + V_{tuzak}^{(i)}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.3})$$

tanımlanmaktadır. Tuzak potansiyeli $V_{tuzak}^{(i)}(\mathbf{r})$, radyal ve eksensel simetriye sahip harmonik salıncı potansiyeli formatında $\omega_x = \omega_y = \omega_{\perp}, \omega_z \gg \omega_{\perp}$ dikkate alınırsa her iki bileşen aynı tuzak potansiyeli $V_{tuzak}^{(1)}(\mathbf{r}) = V_{tuzak}^{(2)}(\mathbf{r}) = V_{tuzak}(\mathbf{r})$ etkisinde olacaktır.

$$V_{tuzak}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} M (\omega_{\perp}^2 r^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (\text{B.4})$$

Üç boyutta etkileşim enerjileri a_s saçılma uzunluğu ile doğru orantılı olarak tanımlanır.

$$g_{11}^{3D} = \frac{4\pi\hbar^2}{M_1} a_{s,11}, \quad g_{22}^{3D} = \frac{4\pi\hbar^2}{M_2} a_{s,22}, \quad g_{12}^{3D} = 4\pi\hbar^2 \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)^{-1} a_{s,12} \quad (\text{B.5})$$

Düzgün manyetik alanı üreten vektör potansiyeli simetrik ayarda $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{r}}{2}$ seçilmiştir. Silindirik koordinatlarda Laplace operatörü aşağıdaki gibi tanımlandığında,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_{\perp}^2 + \partial_z^2 \quad (\text{B.6})$$

kinetik enerji terimi,

$$\frac{1}{2M_i} (\mathbf{p} - Q_i \mathbf{A})^2 \phi_i(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M_i} (\nabla_{\perp}^2 + \partial_z^2) - \omega_i L_z + \frac{1}{2} M_i \omega_i^2 r^2 \right] \phi_i(\mathbf{r}) \quad (\text{B.7})$$

olarak elde edilir. Burada ω_i , aşağıda tanımlanmaktadır.

$$\omega_i = \frac{Q_i B}{2M_i} \quad (\text{B.8})$$

Sistemin efektif olarak üç boyuttan iki boyuta indirgenebilmesi için z doğrultusundaki tuzaklama frekansının yeterince güçlü olması gerekmektedir. Efektif olarak iki boyutlu bir geometride çalışmak için sistemin sağlanması gereken koşullar aşağıda verilmiştir.

$$\lambda = \omega_z/\omega_\perp \gg 1, \quad \hbar\omega_z \gg k_B T, \quad \hbar\omega_z \gg \mu_i \quad (\text{B.9})$$

Bu koşullar altında z -doğrultusu boyunca atomlar sıkıca tuzaklanır ve en düşük enerjili taban durumunda hapsolürler. Bu seviyede, yoğunlaşma dalga fonksiyonunun eksensel kısmı ayrılabilir.

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \phi_i(r, \theta, t)\chi_i(z)e^{-i\mu_z^{(i)}t/\hbar} \quad (\text{B.10})$$

Burada $\mu_z^{(i)}$ kimyasal potansiyeldir ve eksensel dalga fonksiyonunun $\chi_i(z)$ boyu bire normalize edilmiştir $\int dz |\chi_i(z)|^2 = 1$. Yukarıda ifade edilen çözüm Gross-Pitaevskii denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & \left[i\hbar \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2M_i} \nabla_\perp^2 \phi_i + \omega_i L_z \phi_i - \frac{1}{2} M_i \omega_i^2 r^2 \phi_i - \frac{1}{2} M \omega_\perp^2 r^2 \phi_i \right] \chi_i \\ & = \left[-\frac{\hbar^2}{2M_i} \partial_z^2 \chi_i + \frac{1}{2} M_i \omega_z^2 z^2 \chi_i + g_{ii}^{3D} |\phi_i|^2 |\chi_i|^2 \chi_i + g_{ij}^{3D} |\phi_j|^2 |\chi_j|^2 \chi_i - \mu_z^{(i)} \right] \phi_i \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

ve eşitliğin her iki tarafı $\chi_i^*(z)$ ile çarpılarak z üzerinden integrali alındığında,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dz \chi_i^*(z) \left[i\hbar \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2M_i} \nabla_\perp^2 \phi_i + \omega_i L_z \phi_i - \frac{1}{2} M_i \omega_i^2 r^2 \phi_i - \frac{1}{2} M \omega_\perp^2 r^2 \phi_i \right] \chi_i(z) \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} dz \chi_i^*(z) \left[-\frac{\hbar^2}{2M_i} \partial_z^2 \chi_i + \frac{1}{2} M_i \omega_z^2 z^2 \chi_i + g_{ii}^{3D} |\phi_i|^2 |\chi_i|^2 \chi_i + g_{ij}^{3D} |\phi_j|^2 |\chi_j|^2 \chi_i - \mu_z^{(i)} \right] \phi_i \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

olarak elde edilmektedir. Burada aşağıda ifade edilen diferansiyel denklem, z doğrultusunda harmonik salıncı problemine karşılık gelmektedir.

$$-\frac{\hbar^2}{2M_i} \partial_z^2 \chi_i + \frac{1}{2} M_i \omega_z^2 z^2 \chi_i - \mu_z^{(i)} \chi_i = 0 \quad (\text{B.13})$$

Denklem (B.12) ile verilen eşitliğin sağ kısmına uygulandığında sadece etkileşim enerji terimleri kalacaktır. Harmonik salıncı probleminin taban durum dalga fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\chi_i(z) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{a_z}} e^{-z^2/2a_z^2} \quad (\text{B.14})$$

Etkileşim enerjilerine ait integraller,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dz \chi_i^* [g_{ii}^{3D} |\phi_i|^2 |\chi_i|^2 \chi_i] \phi_i &= g_{ii}^{3D} |\phi_i|^2 \phi_i \int_{-\infty}^{\infty} dz |\chi_i(z)|^4 \\
&= g_{ii}^{3D} |\phi_i|^2 \phi_i \frac{1}{\sqrt{2\pi a_z}} \\
&= g_{ii}^{2D} |\phi_i|^2 \phi_i
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dz \chi_i^* [g_{ij}^{3D} |\phi_j|^2 |\chi_j|^2 \chi_i] \phi_i &= g_{ij}^{3D} |\phi_j|^2 \phi_i \int_{-\infty}^{\infty} dz |\chi_i(z)|^2 |\chi_j(z)|^2 \\
&= g_{ij}^{3D} |\phi_j|^2 \phi_i \frac{1}{\sqrt{2\pi a_z}} \\
&= g_{ij}^{2D} |\phi_j|^2 \phi_i
\end{aligned} \tag{B.16}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla denklem (B.12) ile tanımlanan eşitlik yeniden düzenlendiğinde,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi_i(r, \theta, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\perp}^2 - \omega_i L_z + \frac{1}{2} M \omega_i^2 r^2 - \frac{1}{2} M \omega_{\perp}^2 r^2 \right] \phi_i(r, \theta, t) \tag{B.17}$$

$$+ \left[g_{ii}^{2D} |\phi_i|^2 + g_{ij}^{2D} |\phi_j|^2 \right] \phi_i(r, \theta, t) \tag{B.18}$$

Gross-Pitaevskii denklemi üç boyuttan efektif olarak iki boyuta indirgenebilir ve iki boyutta efektif etkileşim enerjileri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$g_{ii}^{2D} = \frac{g_{ii}^{3D}}{\sqrt{2\pi a_z}}, \quad g_{ij}^{2D} = \frac{g_{ij}^{3D}}{\sqrt{2\pi a_z}} \tag{B.19}$$

Burada atomik kütleler ile eksensel tuzaklama frekansları eşit büyüklükte dikkate alınmıştır $M_a = M_b = M$, $\omega_z^{(1)} = \omega_z^{(2)} = \omega_z$.

C Faz Ayrışması - Thomas-Fermi Enerjisi

Bu kısımda kinetik enerji, potansiyel enerji ve etkileşim enerjileri denklem (4.55) ile ifade edilen integral cinsinden belirtilecektir. İlk aşamda a bileşeni için Thomas-Fermi yoğunluğu x değişkeni cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$n_a(x) = \frac{U_b}{\det U} \left(\Delta \tilde{\mu}_a - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\Omega}_a x + r_0 (1 - \lambda_a) - \frac{\Delta l_a}{2x} \right) \quad (\text{C.1})$$

Kinetik enerji,

$$E_k^a = \pi \int dx \left(\frac{1}{2} \Omega_a^2 x + \frac{l_a^2}{2x} - \Omega_a l_a \right) n_a(x) \quad (\text{C.2})$$

ve her bir terimin sırasıyla katkısı aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} E_k^{(1)} &= \frac{\pi}{2} \Omega_a^2 \int x n_a(x) dx \\ &= \frac{\pi \Omega_a^2}{2} \frac{U_b}{\det U} \left(\Delta \tilde{\mu}_a I_{\alpha=1} - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\Omega}_a I_{\alpha=2} + r_0 (1 - \lambda_a) I_{\alpha=3/2} - \frac{\Delta l_a}{2} I_{\alpha=0} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} E_k^{(2)} &= \pi \frac{l_a^2}{2} \int \frac{n_a(x)}{x} dx \\ &= \pi \frac{l_a^2}{2} \frac{U_b}{\det U} \left(\Delta \tilde{\mu}_a I_{\alpha=-1} - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\Omega}_a I_{\alpha=0} + r_0 (1 - \lambda_a) I_{\alpha=-1/2} - \frac{\Delta l_a}{2} I_{\alpha=-2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$E_k^{(3)} = \Omega_a l_a \pi \int n_a(x) dx = \Omega_a l_a \pi N_a \quad (\text{C.5})$$

Potansiyel enerji,

$$E_{pot}^a = \frac{\pi}{2} \int dx (\sqrt{x} - r_0)^2 n_a(x) = \frac{\pi}{2} \left(E_{pot}^{(1)} + E_{pot}^{(2)} \right) + \frac{\pi}{2} r_0^2 N_a \quad (\text{C.6})$$

ve $E_{pot}^{(1)}$ ile $E_{pot}^{(2)}$ integralleri sırasıyla tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} E_{pot}^{(1)} &= \int x n_a(x) dx \\ &= \frac{U_b}{\det U} \left(\Delta \tilde{\mu}_a I_{\alpha=1} - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\Omega}_a I_{\alpha=2} + r_0 (1 - \lambda_a) I_{\alpha=3/2} - \frac{\Delta l_a}{2} I_{\alpha=0} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned}
E_{pot}^{(2)} &= 2r_0 \int \sqrt{x} n_a(x) dx \\
&= 2r_0 \frac{U_b}{\det U} \left(\Delta \tilde{\mu}_a I_{\alpha=1/2} - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\Omega}_a I_{\alpha=3/2} + r_0 (1 - \lambda_a) I_{\alpha=1} - \frac{\Delta l_a}{2} I_{\alpha=-1/2} \right)
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Etkileşim enerjisi E_{etk}^{aa} , aşağıda tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned}
E_{etk}^{aa} &= \frac{\pi}{2} U_a \int dx n_a^2(x) \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{U_a U_b^2}{(\det U)^2} \left[\left(\Delta \tilde{\mu}_a^2 + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\Omega}_a \Delta l_a \right) I_{\alpha=0} + \left(r_0^2 (1 - \lambda_a)^2 - \Delta \tilde{\mu}_a \Delta \tilde{\Omega}_a \right) I_{\alpha=1} \right. \\
&\quad + \frac{1}{4} \Delta \tilde{\Omega}_a^2 I_{\alpha=2} + r_0 (1 - \lambda_a) \left(2 \Delta \tilde{\mu}_a I_{\alpha=1/2} - \Delta \tilde{\Omega}_a I_{\alpha=3/2} \right) \\
&\quad \left. + \frac{\Delta l_a^2}{4} I_{\alpha=-2} - r_0 (1 - \lambda_a) \Delta l_a I_{\alpha=-1/2} - \Delta \tilde{\mu}_a \Delta l_a I_{\alpha=-1} \right]
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Etkileşim enerjisi E_{etk}^{ab} , aşağıda tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned}
E_{etk}^{ab} &= U_{ab} \pi \int dx n_a(x) n_b(x) \\
&= \pi \frac{U_a U_b}{(\det U)^2} U_{ab} \left[\left(\Delta \tilde{\mu}_a \Delta \tilde{\mu}_b + \frac{1}{4} \left(\Delta \tilde{\Omega}_a \Delta l_b + \Delta \tilde{\Omega}_b \Delta l_a \right) \right) I_{\alpha=0} \right. \\
&\quad + \left(r_0^2 (1 - \lambda_a) (1 - \lambda_b) - \frac{1}{2} \left(\Delta \tilde{\mu}_a \Delta \tilde{\Omega}_b + \Delta \tilde{\mu}_b \Delta \tilde{\Omega}_a \right) \right) I_{\alpha=1} \\
&\quad + \frac{1}{4} \Delta \tilde{\Omega}_a \Delta \tilde{\Omega}_b I_{\alpha=2} - \frac{r_0}{2} \left((1 - \lambda_b) \Delta \tilde{\Omega}_a + (1 - \lambda_a) \Delta \tilde{\Omega}_b \right) I_{\alpha=3/2} \\
&\quad + r_0 \left((1 - \lambda_b) \Delta \tilde{\mu}_a + (1 - \lambda_a) \Delta \tilde{\mu}_b \right) I_{\alpha=1/2} + \frac{1}{4} \Delta l_a \Delta l_b I_{\alpha=-2} \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\Delta \tilde{\mu}_a \Delta l_b + \Delta \tilde{\mu}_b \Delta l_a \right) I_{\alpha=-1} - \frac{r_0}{2} \left((1 - \lambda_a) \Delta l_b + (1 - \lambda_b) \Delta l_a \right) I_{\alpha=-1/2} \right]
\end{aligned}$$

b bileşeni için E_k^b , E_{pot}^b ve E_{etk}^{bb} enerjileri $a \rightarrow b$ yerdeğişimi ile belirlenmiştir.