T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EINSTEIN-WEYL-EDDINGTON KURAMINDA NOETHER SİMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Furkan Şakir DİLSİZ

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Haziran 2021

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EINSTEIN-WEYL-EDDINGTON KURAMINDA NOETHER SİMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Furkan Şakir DİLSİZ

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Haziran 2021

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Ücret karşılığı başka kişilere yazdırmadığımı (dikte etme dışında), uygulamalarımı yaptırmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

Furkan Şakir DİLSİZ

EINSTEIN-WEYL-EDDINGTON KURAMINDA NOETHER SİMETRİSİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Furkan Şakir DİLSİZ

MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2021

ÖZET

Einstein'in Genel Görelilik kuramı yerçekimsel olayları açıklamada oldukça başarılı olsa da açıklamada yetersiz kaldığı bazı önemli problemler vardır. Kuramsal açıdan bakıldığında, Genel Görelilik kuramının renormalize edilememesi, 4 temel etkileşimden biri olan yerçekiminin diğer etkileşimlerle birleştirilememesine neden olur. Gözlemsel açıdan ise kayıp madde problemi vardır. Spiral gökadaların dönme eğrileri incelendiğinde, gökada merkezinden uzaklaştıkça yıldızların merkez etrafında dönme hızlarının azalması gerekmektedir, fakat dönme hızlarında sabitleşme görülür. Bu etkiye sebep olabilecek yeterli miktarda baryonik madde olmadığı için astrofiziksel kayıp madde problemi ortaya çıkmıştır. Benzeri bir kayıp madde problemi kozmik genişleme gözlemlerini açıklamaya çalışırken ortaya çıkar. Kozmolojinin standart modelinde kayıp maddenin elektromanyetik olarak etkileşmeyen bir tür karanlık madde olduğu kabul edilmiştir. Karanlık maddeden ayrı olarak, evrenin ivmelenerek genişlemesi olgusunu açıklamak için karanlık enerji bileşenine de ihtiyaç duyulmaktadır.

Alternatif yerçekimi kuramları, kozmolojinin standart modelinde Genel Görelilik kuramıyla açıklamada yetersiz kalınan problemleri açıklamak amacıyla çalışılmaktadır. Alternatif yerçekimi kuramlarından biri Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramıdır. Kuadratik terimler içeren bu kuram renormalize edilebilir. Bu kuram gökada dönme eğrilerini, karanlık maddeye ihtiyaç duymadan uzay-zamanın geometrisi üzerinden açıklayabilmektedir. Kurama göre gökadanın iç bölgelerinde Einstein-Hilbert terimi, dış bölgelerinde ise Weyl-Eddington terimi baskındır. Buna göre, etkili yerçekimi kuramı ölçeğe bağlı olarak değişir.

Bu tez kapsamında Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramında korunan nicelikleri bulmak için Noether simetrisi yöntemi kullanıldı. İlk önce kuramın eyleminden alan denklemleri belirlendi. Devirli genelleştirilmiş koordinatların varlığından hareketle Lagrange çarpanları yöntemi kullanılarak noktasal Lagrangian, kanonik Lagrangian, Hessian matris ve Hessian determinant hesaplandı. Bu süreç, bir Noether vektörü belirleyip, bu vektör yönünde Lagrangian'ın Lie türevini sıfıra eşitleyerek Hessian matris elemanlarından Noether vektör bileşenlerinin sağladığı türevsel denklemlerin belirlenmesiyle devam etti. Sonuç olarak Noether simetrileri altında değişmez olan bir Noether yükü yazıldı. Bu Noether yüküyle MOND kuramı arasında ilişki kurulursa Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramında yeni bir yerçekimsel yarıçap belirlenebilecektir.

Anahtar Kelimeler: Kuadratik yerçekimi, Kanonik Lagrangian, Hessian matris, Noether simetrisi

Sayfa Adedi: 96 Sayfa

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

NOETHER SYMMETRY IN EINSTEIN-WEYL-EDDINGTON THEORY
(M.Sc. Thesis)
Furkan Şakir DİLSİZ

MIMAR SINAN FINE ARTS UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
June 2021

SUMMARY

Einstein's General Theory of Relativity has been quite successful in explaining gravitational phenomena, but there are some important problems that it falls short of. Theoretically, the unrenormalizibility of the General Theory of Relativity causes gravity, which is one of the four fundamental interactions, not to be combined with other interactions. Observationally, there is the missing matter problem. Examining the rotational curves of spiral galaxies reveals that the stars on the galactic disk move with constant velocity, contrary to the expectation that the velocities of the stars have to decrease as they are away from the galactic center. Since there is not enough baryonic matter to cause this effect, the astrophysical missing matter problem has arisen. Similarly, the problem of missing matter emerges in explanations for the cosmic microwave background observations. In the standard model of cosmology, the missing matter is accepted to be the dark matter, which does not interact electromagnetically. Apart from the dark matter, the dark energy component is also needed to explain the phenomenon of the accelerating expansion of the universe.

Alternative gravity theories are studied to explain the problems that are insufficient to explain with the General Theory of Relativity in the standard model of cosmology. One of the alternative theories of gravity is the Einstein-Weyl-Eddington gravity. This theory, which includes quadratic terms, can be renormalized. This theory can explain galaxy rotation curves through the geometry of space-time without the need for dark matter. According to the theory, the Einstein-Hilbert term is dominant in the inner regions of the galaxy and the Weyl-Eddington term is dominant in the outer regions. In other words, the effective theory of gravity changes depending on the scale.

In this thesis, the Noether symmetry method is used to find the conserved quantities in the Einstein-Weyl-Eddington gravity. First, the field equations are determined from the action of the theory. Then, based on the existence of cyclic generalized coordinates, pointlike Lagrangian, canonical Lagrangian, Hessian matrix and Hessian determinant are calculated using the method of Lagrange multipliers. This process is continued by determining a Noether vector and equating the Lie derivative of the Lagrangian to zero in the direction of this vector and thereby determining the differential equations satisfied by the Noether vector components using the Hessian matrix elements. As a result, a Noether charge was written, which was invariant under Noether symmetries. If a relationship could be established between this Noether charge and the MOND theory, a new gravitational radius will be determined in the Einstein-Weyl-Eddington gravity.

Key Words: Quadratic Gravity, Canonical Lagrangian, Hessian Matrix, Noether Symmetry

Page Number: 96 Pages

Supervisor: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince desteğini hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer hocam ve danışmanım Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN'a bana verdiği emekler ve bana kazandırdığı kuramsal fizik bilgi birikimi için teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan ve desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen değerli aileme teşekkür ederim.

Doç. Dr. R. Onur UMUCALILAR'a verdiği destekler için teşekkür ederim.

Furkan Şakir DİLSİZ

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$g_{\mu\nu}$	: Metrik tensör
$g^{\mu\nu}$	: Metrik tensörün tersi
g	: Metrik tensörün determinantı
$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$	: Christoffel sembolü
δ	: Varyasyon
∂	: Kısmi türev
∇	: Kovaryant türev
$\Box$	: d'Alambert operatörü
$R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$	: Riemann tensörü
$R_{\mu\nu}$	: Ricci tensörü
R	: Eğrilik skaleri
$f(R)$	: Eğrilik skaleri R'ye bağlı fonksiyon
$G_{\mu\nu}$	: Einstein tensörü
$T_{\mu\nu}$	: Enerji-momentum tensörü
$C_{\mu\nu\rho\sigma}$	: Weyl tensörü

1 GİRİŞ

Yerçekimi kavramının tarihi Aristotle'e dayanmakla beraber matematiksel bir altyapıya oturmasının tarihi Isaac Newton ile başlar. 17. yüzyılda Isaac Newton "Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri" kitabıyla beraber yerçekimi kavramını matematiksel bir temele oturtur. Newton'a göre 2 cisim arasındaki çekim kuvveti kütleleriyle doğru orantılı ve aralarındaki mesafenin karesiyle ters orantılıdır. Newton'un ters kare yasası o dönem gerçekleşebilen gözlemleri açıklayabiliyordu ve yaklaşık 300 yıl boyunca başarıyla kullanıldı. Fakat 20. yüzyıla gelindiğinde klasik fizik yasalarının güncel fiziği açıklamada yetersiz kaldığı anlaşılmıştı. Elektromanyetik kuramı tanımlayan Maxwell denklemleri Galileo dönüşümleri altında değişmez kalmaz, fakat Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalır. Albert Einstein ışık hızının sabit olması fikrini ve fizik yasalarının Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalmasını kullanarak 1905 yılında "Hareketli Cisimlerin Elektrodinamiği Üzerine" isimli makalesini yayınlayarak özel görelilik kuramını tarif etmiştir [1]. Fakat özel görelilik kuramı eylemsiz sistemler için geçerlidir.

Einstein özel göreliliğin ivmeli sistemlere uygulanması için uzayın geometrisi üzerine çalışılması gerektiğini fark edip tensör hesabı üzerine çalışmalara başlamıştır. Eşdeğerlik ilkesine dayanarak 1916 yılında uzay-zamanın geometrisi ile madde-enerji dağılımı arasında bir ilişki kurmuş ve şimdi Einstein alan denklemleri olarak bilinen denklemleri içeren Genel Görelilik kuramını yayınlamıştır [2]. Genel görelilik kuramında uzay-zaman metrik tensör ile ifade edilir. Einstein alan denklemleri şu şekildedir:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

Bu denklemde denklemin sol tarafı geometri, denklemin sağ tarafı ise enerji dağılımını temsil eder ve bu ikisi birbirine bağlanmış olur. Genel görelilik kuramına göre yerçekimi, Newton kuramının aksine cisimler arasında oluşan bir kuvvet değil, madde dağılımıyla beraber uzay-zamanda oluşan eğrilikler olarak ele alınmıştır. Cisimler bu eğriler üzerinde serbest düşme hareketi yaparak sanki birbirlerini çekiyormuş gibi görünür. Einstein, Genel Görelilik kuramının 3 farklı tahminle test edilebileceğini önerdi ve 3 farklı tahmin başarıyla test edildi. Bu testler şunlardır:

1) Merkür'ün günötesinin devinim hareketi,

2) Işığın güneş tarafından bükülmesi,

3) Yerçekimsel alanda ışığın kırmızıya kayması.

Genel Görelilik kuramının geçerliliği tüm bu testlerle beraber başarıyla doğrulanmıştır.

Genel Görelilik kuramının yayınlanmasıyla beraber modern kozmoloji doğmuştur ve denklemlerin ilk çözümü küresel simetri varsayımı kullanılarak 1916 yılında Karl Schwarzschild tarafından gerçekleşmiştir [3]. 1922 yılında Alexander Friedmann, evrenin homojen ve izotropik olması varsayımıyla beraber durgun olmayan bir evren için çözüm ortaya koydu [4]. 1929 yılında Georges Lemaître, Friedmann'ın çözümleriyle benzer çözümler buldu ve Hubble'ın gözlemlerinden 2 sene önce genişleyen evren fikrini ortaya koydu [5]. Edwin Hubble yaptığı gözlemlerle galaksilerden gelen ışığın kırmızıya kaydığını ve bunun sebebinin galaksilerin birbirinden uzaklaşması olduğunu keşfetti [6]. Bu keşife göre galaksilerin aralarındaki mesafe ile radyal hızları arasında bir ilişki vardır. Hubble yasası olarak bilinen bu ilişki $v = H_0 d$ olarak verilir ve H_0 Hubble sabitidir. Hubble'ın keşfinden sonra evrenin durgun olmadığı ve genişlediği ortaya çıkmıştır. Daha sonra Howard P. Robertson'ın [7] ve Arthur Geoffrey Walker'ın [8] yaptığı çalışmalarla beraber homojen, izotropik ve genişleyen uzay-zamanı temsil eden Robertson-Walker metriği ortaya çıkmıştır. Bu çalışmalarla beraber modern kozmolojik evren modeli Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) genişleyen evren modeli olmuştur. Bugüne kadar yapılan gözlemleri açıklamada Genel Görelilik kuramı başarılı olmuştur. Fakat Genel Göreliliğin açıklamakta zorlandığı problemler vardır. 20. yüzyılın başlarında kuantum mekaniğinin geliştirilmesiyle beraber modern fizik oluşmuştur. Fizik kanunlarını yöneten bilinen 4 temel etkileşim vardır. Bunlar elektromanyetik etkileşim, zayıf nükleer etkileşim, güçlü nükleer etkileşim ve yerçekimsel etkileşimdir. Bu etkileşimlerden ilk üçü Standart Model çatısı altında toplanabilir ve renormalize edilebilir. 4 temel etkileşimin birleştirilmesi için yerçekimi kuramının renormalize olması gerekmektedir fakat yerçekimi renormalize edilememiştir [9].

1933 yılında Fritz Zwicky, Coma gökada kümesindeki gökadaların hareketlerini inceledi [10]. Bu çalışmayla beraber Coma gökada kümesindeki gökdaların hızlarının, küme içindeki toplam kütlenin etkileyebileceğinden çok daha hızlı olduğu ortaya çıktı. Bunun haricinde toplam kütleyi belirlemek için yerçekimsel mercekleme gibi yeni metodlar önerdi [11]. Zwicky'nin çalışmasına göre gökadaların bir arada tutulmasını sağlayan ve gözlenmeyen bir madde olmalıydı. 1932 yılında Jan Oort, gökadadaki yıldızların kümelenmeleri üzerine çalışmalar yaptı ve bu kümelenmenin sönmüş yıldızların yoğunluğundan kaynaklandığını tahmin etti [12] [13]. 1970 yılında Vera Rubin ve diğer bilim insanları, spiral gökadaların dış katmanlarındaki yıldızların dönme eğrilerinde Newton dinamiğine uymayan farklılıklar olduğunu gözlemlediler [14]. Newton dinamiğine göre gökadanın merkezinden uzaklaştıkça dönme hızlarının artması ve çekim etkilerinin azalmasıyla beraber bir noktadan sonra dönme hızlarının da azalması gerekir fakat gözlemlere göre gökada içerisindeki yıldızların dönme hızları, merkezden uzaklaştıkça azalma göstermiyor ve sabit bir değere ulaşıyor. Einstein alan denklemlerinde sağ taraf madde dağılımını temsil ettiği için dönme hızlarını etkileyecek etkinin madde dağılımı olduğu düşünülmüştür. Genel Görelilik kuramına bağlı kalınarak yapılan hesaplarla bu etkiye sebep olabilecek kadar baryonik madde olmadığı bilindiği için gökada içerisinde etkisi sadece yerçekimsel olarak varolabilen ve elektromanyetik etkileşimlere girmediği için gözlemlenemeyen ve baryonik olmayan bir madde olabileceği fikri ortaya atıldı. Bu kayıp maddeye karanlık madde adı verildi. Karanlık maddeye aday olabilecek birçok parçacık önerilmiştir fakat yapılan deneyler sonucunda henüz karanlık madde gözlenmemiştir. Gökada dönme eğrilerini açıklamak amacıyla, Einstein alan denklemlerinde madde dağılımının değişmemesi fakat denklemin sol tarafı olan geometri kısmının değiştirilmesi gerektiğini savununan birçok çalışma yapılmıştır [15] [16] [17].

1990'lı yıllarda yapılan süpernova gözlemleri sonucunda evrenin genişleme hızının yavaşlamadığı aksine ivmeli bir şekilde arttığı gözlemlendi [18]. Evrenin genişleme hızını artırdığı düşünülen etkiye karanlık enerji adı verildi. Karanlık enerji yerçekimine karşı olarak itici bir basınç oluşturur. Bu yüzden evrende gök cisimleri bir araya toplanmak yerine birbirinden ivmeli bir şekilde uzaklaşır. Tıpkı karanlık maddede olduğu gibi karanlık enerji de henüz gözlenmemiştir. Karanlık madde ve karanlık enerji hipotezleri doğruysa, evrenin yaklaşık olarak 70% karanlık enerji, 25% karanlık madde ve 5% bilinen maddeden oluşması gerektiği belirlenmiştir. Karanlık maddenin yoğunluğu ölçek parametresine bağlıdır fakat karanlık enerjinin yoğunluğu ölçek parametresine bağlı değildir. Bu yüzden karanlık madde ve karanlık enerji birbirine dönüşemez.

Einstein'in Genel Görelilik kuramının açıklamada yetersiz kaldığı problemleri açıklamak amacıyla bilim insanları alternatif yerçekimi kuramları üzerine çalışmaktadırlar. İlk alternatif yerçekimi kuramlarından biri Hermann Weyl tarafından 1918 tarihinde yayınlandı. Weyl çalışmasında, elektromanyetizma ile yerçekimi kuramını birleştirip daha genel bir kuram oluşturmak için Riemann geometrisine sahip olmayan ve uzunlukların dönüşümler altında değişebildiği fakat açıların korunduğu konformal geometriyi temel alan Weyl yerçekimi kuramını yayınladı [19] [20] [21]. Bu kuramın eylemi konformal dönüşümler altında değişmez kalan Weyl tensörünün karesi ile oluşturulur. Weyl yerçekimi kuramı, doğru Newton limiti olmadığı için [22] ve uzunlukların dönüşümler altında değişebilmesini sağladığı için döneminde fazla ilgi görmedi ama daha sonra konformal yerçekimi birçok yerçekimi modelinde kullanıldı [23] [24] [25] [26]. Alternatif yerçekimi kuramlarında, Genel Görelilik kuramının eylemi olan Einstein-Hilbert eylemi değiştirilir ve genelde eyleme skaler fonksiyonlar veya yüksek mertebeden terimler eklenir. Birçok Alternatif yerçekimi kuramı vardır. Bu kuramlardan bazıları, skaler alan kuramları [27], tensör kuramları, skaler-tensör kuramları, skaler-vektör-tensör kuramları, bimetrik kuramlardır [28]. Tensör kuramlarına örnek olarak dördüncü mertebe yerçekimi, $f(R)$ yerçekimi kuramı [29], Gauss-Bonnet yerçekimi [30] verilebilir. Skaler-tensör kuramlarına örnek olarak Brans-Dicke kuramı [31] ve skaler-vektör-tensör kuramlarına örnek olarak Bekenstein'in relativistik MOND kuramı TeVeS [32] verilebilir.

1977 yılında K.Stelle kuadratik terimler içeren bir eylemin 4 boyutta renormalize edilebildiğini göstermiştir [33]. Genel görelilik kuramı renormalize edilemez fakat üniterdir. Yüksek mertebeden türevler içeren bu kuram ise renormalize edilebilir fakat üniter değildir. Üniter olmaması sebebiyle kuramın hayalet parçacıklara sahip olduğu düşünülmektedir. Bu durum kuantum alanlarda negatif enerjiye karşılık gelmektedir [34]. Eğrilik skaleri R'nin karesi ve Ricci tensörünün karesinden oluşan eyleme sahip kuramlar kuadratik yerçekimi kuramlarına örnektir. Weyl tensörünün karesi, topolojik değişmez olan Gauss-Bonnet terimi kullanılarak R eğrilik skalerinin karesi ve Ricci tensörünün karesi cinsinden yazılabilir [35]. Einstein yerçekimi kuramı ve Weyl yerçekimi kuramı birleştirilerek oluşan Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramı da kuadratik bir yerçekimi kuramıdır. Stelle'nin makalesi morötesi bölgeyi esas alır. Gökadaların dış bölgesinde ivmeler çok düşük olduğu için burası düşük enerji olan kızılötesi bölge olarak düşünülebilir. B. Holdom ve J.Ren'in makalesinde [36] kuantum renk dinamiği için yazılan kiral Lagrangian, kuadratik terimler içermektedir ve kızılötesi bölgede geçerlidir. Kızılötesi bölge için yüksek mertebeden türevler içeren kuramlarda hayalet parçacıkların oluşup oluşmadığı bilinmemektedir. Bu tezde Holdom-Ren'in makalesi motivasyon olarak alınmıştır. Gökadaların dönme eğrilerinin, Weyl yerçekimi kuramı kullanılarak çalışıldığı [37] makalesine göre Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramında gökadaların iç bölgelerinde Einstein-Hilbert terimi, gökadaların dış bölgelerinde ise Weyl-Eddington terimi baskındır. Gökadanın merkezinden uzaklaştıkça dönme hızlarının ölçekten bağımsız bir şekilde sabitleşmesi Weyl-Eddington yerçekimi kuramının sonucudur. Görüldüğü gibi bu kuramda yerçekimi ölçeğe bağlı olarak değişir. Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramında eylem şu şekildedir:

$$S = -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}(R-2\Lambda) - \alpha R^2 + \beta C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} + \mathscr{L}_M\right) \tag{1.2}$$

Eylemdeki $\mathscr{L}_M$ madde alanı için Lagrangian yoğunluğudur. $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ Einstein sabitidir. Einstein kuramından gelen katkı $\frac{1}{2\kappa}(R-2\lambda)$ terimidir. Burada λ kozmolojik sabit olarak adlandırılır. Eddington yerçekimi kuramından gelen katkı αR^2 terimidir. Weyl yerçekimi kuramından gelen katkı $\beta C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma}$ terimidir. Eylemdeki terimlerin birbirlerine göre baskınlığı mesafeye yani ölçeğe göre değişir. Buna göre ölçek yani uzaklık değiştikçe yerçekimi de değişir. Gökadaların iç bölgelerinde Einstein-Hilbert terimi baskın olduğu için bu bölgede Genel Görelilik kuramı geçerlidir. Gökadaların dış bölgelerinde Weyl ve Eddington terimi baskın olduğu için dış bölgelerde dönme hızlarında sabitleşme görülür. Eylemdeki terimlerin birbirlerine göre baskınlığı, katsayıları olan $\frac{1}{2\kappa}$, α ve β terimlerine bağlı olarak değişir.

Noether teoremine göre, fiziksel bir sistemin eylemindeki her sürekli simetriye karşılık bir korunum yasası vardır [38]. Bu tez kapsamında Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramında korunan nicelikleri bulmak için Noether simetrisi kullanıldı. Küresel simetrik bir uzay-zaman için yazılan metrik tensör kullanılarak eğrilik skaleri ve Weyl kare terimi bulundu. Kuramın eylemine Lagrange çarpanları eklendi ve buradan r radyal koordinata bağlı noktasal Lagrangian bulundu. Noktasal Lagrangian'ın karesi olan kanonik Lagrangian'dan Hessian matris ve Hessian determinant hesaplandı. Hessian matris elemanları kullanılarak Noether vektörü bileşenlerini verecek diferansiyel denklemler ve Noether yükü, genelleştirilmiş koordinatlar ve eğrilik skaleri bileşenleri cinsinden hesaplandı. Genel görelilik kuramı, ikinci mertebe türevler içerdiği için bu kuramda bir tane karakteristik yarıçap vardır. Bu yarıçapa Schwarzchild yarıçapı denir. Kuadratik yerçekimi kuramları ise dördüncü mertebe türevler içerir ve bunun sonucu olarak 2 farklı karakteristik yarıçap içerir. Bu ikinci yarıçapa yeni yerçekimsel yarıçap denir. Hessian matris elemanlarından elde edilen diferansiyel denklemler çözülerek bulunan Noether vektör bileşenleri ve Noether yükü kullanılarak radyal koordinat ve yeni yerçekimsel yarıçap hesaplanabilir. Hesaplanan bu yeni yerçekimsel yarıçap, Einstein ve Weyl-Eddington terimlerinin merkezden uzaklığa göre hangisinin baskın olduğu hakkında fikir verecektir. α_1, α_2 ve α_3 Noether vektör bileşenlerini belirlemek amacıyla eylemdeki katsayılar olan α ve β'nın limit şartlarına bakılabilir. Kuram $\alpha = 0$ veya $\beta = 0$ limitlerine indirgendiğinde diğer kuramlarla bağlantı kurulabilir. $\beta = 0$ durumunda kuram $R + \alpha R^2$ durumuna indirgenir ve bu durum için yapılan çalışmalarla karşılaştırılarak bu limit için Noether vektör bileşenleri belirlenebilir.

Tezin 2.bölümünde $f(R)$ yerçekimi kuramı hakkında genel bilgiler verildi. Eğrilik skaleri R'ye bağlı genel bir fonksiyon olan $f(R)$ fonksiyonu ve madde dağılımını içeren fonksiyon kuramın eylemini oluşturur. Varyasyon ilkesine dayanarak eylemin varyasyonu alınıp sıfıra eşitlendi ve yapılan hesaplar sonucunda $f(R)$ yerçekimi kuramı için alan denklemleri bulundu. Daha sonra küresel simetrik uzay-zaman için yazılan metrik tensörü kullanılarak Christoffel sembolleri ve R skaleri metrik elemanlarına bağlı olarak hesaplandı. Bulunan R skaleriyle beraber Lagrange çarpanları yöntemi kullanılarak önce noktasal Lagrangian daha sonra kanonik Lagrangian hesaplandı. Euler-Lagrange denklemi kullanılarak çevrimsel koordinat diğer koordinatlar cinsinden bulundu. Daha sonra kanonik Lagrangian'ın genelleştirilmiş hızlara göre türevlerinden Hessian matris elemanları hesaplandı ve Hessian determinantı bulundu. Noether simetrisi hakkında genel bilgiler verilip Noether vektörü bileşenlerinin ve Noether yükünün nasıl bulunacağı hesaplandı. $f(R)$ yerçekimi kuramı için Noether simetrisi kullanıldığında Noether vektör bileşenlerini verecek diferansiyel denklemler bulunup Noether vektör bileşenleri belirlendi.

3.bölümde $f(R)$ yerçekimi kuramına örnekler verildi. İlk örnekte $f(R)$ yerçekimi, özel durumu olan Genel Görelilik kuramına indirgendi. Genel Görelilik için noktasal Lagrangian, kanonik Lagrangian, Hessian matris ve Hessian determinantı hesaplandı. Kanonik Lagrangian'a Euler-Lagrange denklemleri uygulandı ve bulunan diferansiyel denklemler çözülerek metrik elemanlarının hangi denklemlere uyacağı belirlendi. Genel görelilik kuramı için Noether vektör bileşenleri ve Noether yükü hesaplandı. 3. bölümün 2. kısmında genel R^b durumu için Kanonik Lagrangian, Hessian matris, Noether vektör bileşenleri ve Noether yükü bulundu.

4.bölümde $f(R)$ yerçekimi kuramı ile Modifiye Newton Dinamiği (MOND) arasındaki ilişki araştırıldı. MOND hakkında genel bilgiler verildi. MOND kuramı ile Newton dinamiği arasında MOND ivmesi kullanılarak ilişki kuruldu ve hangi şartlarda MOND kuramı, hangi şartlarda Newton dinamiği geçerli olduğu belirtildi. $f(R)$ yerçekimi kuramının özel hali olan $R^{3/2}$ durumu için kanonik Lagrangian ve Noether yükü bulundu.

5.bölümde Weyl yerçekimi kuramı ve konformal dönüşümler hakkında genel bilgiler verildi. Weyl tensörü ve özellikleri ile konformal dönüşümler arasındaki ilişki verildi. Daha sonra Weyl tensörünün karesiyle oluşturulan Weyl yerçekimi kuramı eylemi yazıldı ve Gauss-Bonnet topolojik terimi kullanılarak bu eylem, eğrilik skalerinin karesini ve Ricci tensönün karesini içerecek şekilde yazıldı. Bu şekilde yazılan eylemin varyasyonu alınarak alan denklemleri ve Bach tensörü bulundu.

6.bölümde tezin esas konusu olan Einstein-Weyl-Eddington kuramı hakkında genel bilgiler verildi ve kuramın eylemi yazıldı. Daha sonra varyasyon prensibi kullanılarak eylemin varyasyonu alındı ve sıfıra eşitlenerek Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramı için alan denklemleri hesaplandı.

7.bölümde küresel simetrik uzay-zaman için yazılan metrik tensör kullanılarak Christoffel sembolleri, R eğrilik skaleri, eğrilik skalerinin karesi ve Ricci tensörünün karesi metrik elemanlarına bağlı şekilde hesaplandı. Hesaplanan R, R^2 terimi ve Ricci tensörünün karesi Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramı eyleminde yerine yazıldı ve Lagrange çarpanları yöntemi kullanıldı. Lagrange çarpanları eğrilik skaleri bileşenleri cinsinden bulundu ve noktasal Lagrangian ve kanonik Lagrangian hesaplandı. Bulunan noktasal Lagrangian kullanılarak çevrimsel koordinat diğer koordinatlar cinsinden hesaplandı. Hesaplanan çevrimsel koordinat noktasal Lagrangian'a eklendi ve buradan kanonik Lagrangian bulundu. Daha sonra Hessian matris ve Hessian determinant hesaplandı. Hesap sonucunda Hessian determinant sıfır bulundu. Buna göre Lagrangian'da açıkça gözükmeyen bir çevrimsel koordinat daha olduğu anlaşılıp bu sorunu çözmek için nokta dönüşümü yapıldı. Yapılan nokta dönüşümünde belirlenen koordinatlar noktasal Lagrangian'a yerleştirilip ikinci çevrimsel koordinat hesaplandı. Sonuç olarak Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramı için kanonik Lagrangian hesaplandı. Bu kanonik Lagrangian kullanılarak Hessian matris elemanları ve Hessian determinant bulundu. Hessian matris elemanları kullanılarak kuram için Noether vektör bileşenlerini verecek diferansiyel denklemler belirlendi. Noether vektör bileşenleri kullanılarak hesaplanacak olan Noether yükü yazıldı.

2 $f(R)$ Yerçekimi Kuramı

$f(R)$ kuramı Genel Görelilik kuramının modifiye edilip, yüksek mertebeden eğrilikler eklenerek Genel Görelilik ile çözülemeyen problemleri çözmeyi amaçlayan yerçekimi kuramıdır. $f(R)$ yerçekimi kuramında eylem, Lagrange yoğunluğu ve R eğrilik skalerine bağlı bir fonksiyonla temsil edilir. Bu kuram yüksek mertebeden türevler içerir. Genel görelilik kuramı güneş sistemi gibi sistemlerde iyi çalıştığı için $f(R)$ kuramı limit şartlarda Genel Görelilik kuramını sağlamalıdır. Genel olarak $f(R)$ kuramında eylem şu şekilde yazılabilir:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big(R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \gamma R_{\rho\mu\alpha\nu}R^{\rho\mu\alpha\nu} + \Box R + \Box^2 R ...\Big) \tag{2.1}$$

Görüldüğü gibi eylem eğrilik skaleri R'yi içerecek terimlerden oluşabilir. Burada eklenen terimler R^2 eğrilik skalerinin karesi, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ Ricci tensörünün karesi olan Ricci skaleri ve $R_{\rho\mu\alpha\nu}R^{\rho\mu\alpha\nu}$ Riemann tensörünün karesi olan Kretschmann skaleridir [39]. Eylemdeki α, β, γ katsayıları $[L]^2$ boyutundadır. Kurama bu kuadratik eklemeler yapıldığından dolayı 4.mertebe türevler ortaya çıkar. R eğrilik skalerinin karesinin boyutu $1/[L]^2$'dir ve karesi alınan terimlerden dolayı boyut $1/[L]^4$ olur. Ayrıca kurama $\Box R$ terimi ve $\Box^2 R$ terimleri eklendiğinde ise sırasıyla 6.mertebe ve 8.mertebe türevler ortaya çıkar [40].

Herhangi bir alan kuramında, varyasyon prensibi kullanılarak alan denklemleri bulunabilir ve kuram tanımlanabilir. Buna göre kuramın eyleminin varyasyonu alınır ve Lagrange yoğunluğundan kuramın alan denklemleri bulunabilir. Yerçekimi kuramında metrik tensör $g_{\mu\nu}$ yerçekimsel alanı tanımlamak için kullanılan dinamik değişkendir. $f(R)$ yerçekimi kuramınında alan denklemlerini elde etmenin iki yolu vardır [41]. Bunlardan ilki eylemin metrik tensöre göre varyasyonu alınarak alan denklemlerinin bulunmasıdır. Burada metrik tensör $g_{\mu\nu}$ ile $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ bağlantısı birbirine bağlı olarak alınır ve bu bağlantı Levi-Civita bağlantısı yani diğer adıyla Christoffel sembolüdür. Buna metrik f(R) yerçekimi denir. Diğeri ise metrik tensör ile $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ bağlantısının bağımsız değişkenler olarak alınıp eylemin varyasyonunun alındığı Palatini formalizmidir [42]. Burada kullanılan bağlantı Levi-Civita bağlantısı değildir. Bu formalizme Palatini $f(R)$ yerçekimi denir. $f(R)$ yerçekimi kuramının birçok kozmolojik uygulaması vardır [43] [44] [45] [17].

2.1 Eylem ve Alan Denklemlerinin Çıkarılışı

$f(R)$ yerçekimi kuramı eyleminin varyasyonu alındığında bu kuramın alan denklemleri bulunabilir. Burada alan denklemleri çıkarılırken metrik $f(R)$ yerçekimi kullanılmıştır. $f(R)$ yerçekimi kuramında eylem şu şekilde yazılır:

$$S = \int \left[\frac{1}{2\kappa} f(R) + \mathscr{L}_M\right] \sqrt{-g} d^4x \tag{2.2}$$

Burada $d^4x\sqrt{-g}$ hacim elemanıdır. g metrik tensörün determinantı, $\mathscr{L}_M$ Lagrange yoğunluğu ve G Newton yerçekimi sabiti olmak üzere $\kappa = 8\pi G$'dir. (Ayrıca doğal birimler seçilerek $c = 1$ alınmıştır.) Bu eylem, Hilbert eylemi ve madde eylemi olarak $S = S_H + S_M$ şeklinde 2 kısıma ayrılır. Hilbert eylemi S_H ve madde eylemi ise S_M şeklinde gösterilir.

$$\begin{aligned} S_H &= \int \frac{1}{2\kappa} f(R) \sqrt{-g} d^4x \\ S_M &= \int \mathscr{L}_M \sqrt{-g} d^4x \end{aligned} \tag{2.3}$$

Minimum eylem ilkesine dayanarak $f(R)$ yerçekimi kuramı eyleminin metriğin tersine göre varyasyonu alınarak sıfıra eşitlenir. Buradan da $f(R)$ kuramı alan denklemleri bulunur. Varyasyon alınarak alan denklemleri elde edilmesinde metrik formalizmi kullanılmıştır.

$$\delta(S_H + S_M) = 0 \tag{2.4}$$

Eyleme varyasyon uygulandığında,

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa} \delta\sqrt{-g} f(R) + \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\delta f(R) + \delta\left(\sqrt{-g}\mathscr{L}_M\right)\right] \tag{2.5}$$

olarak bulunur. Amaç tüm terimleri metriğin tersinin varyasyonu $\delta g^{\mu\nu}$ içerecek şekilde yazmaktır. Bu varyasyonların hesaplanması için öncelikle metriğin karekökünün varyasyonu hesaplanmalıdır. Varyasyonları hesaplamadan önce metrik tensörün bazı özelliklerinin verilmesi faydalı olacaktır. Kovaryant ve kontravaryant metrik tensörün orthogonal olmasından gelen özellik şudur [46]:

$$g^{\mu\alpha}g_{\mu\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{2.6}$$

Burada kronecker-delta fonksiyonu sabit olduğu için varyasyon alındığında,

$$\delta g^{\mu\alpha}g_{\mu\beta} = -g^{\mu\alpha}\delta g_{\mu\beta} \tag{2.7}$$

olur. Bir diğer önemli özellik ise varyasyonu alınan metrik tensörün indislerinin değiştirilebilmesidir. Varyasyonu alınan kovaryant bir metrik tensör, kontravaryant metrik tensör varyasyonuna ve varyasyonu alınan kontravaryant metrik tensör, kovaryant metrik varyasyonuna dönüştürülebilir. Bu özellik metrik tensör ve metrik tensörün tersinin orthogonal olması olarak düşünülebilir. Metrik tensörün simetrik olma özelliği de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\delta\left(g_{\mu\lambda}g_{\beta\nu}g^{\lambda\beta}\right) \\
&= g^{\mu\nu}\left(\delta g_{\mu\lambda}g_{\beta\nu}g^{\lambda\beta} + g_{\mu\lambda}\delta g_{\beta\nu}g^{\lambda\beta} + g_{\mu\lambda}g_{\beta\nu}\delta g^{\lambda\beta}\right) \\
&= g^{\mu\nu}\delta^{\lambda}_{\nu}\delta g_{\mu\lambda} + g^{\mu\nu}\delta^{\beta}_{\mu}\delta g_{\beta\nu} + g^{\mu\nu}g_{\mu\lambda}g_{\nu\beta}\delta g^{\lambda\beta} \\
&= 2g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}g_{\mu\lambda}g_{\nu\beta}\delta g^{\lambda\beta}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

bulunur ve denklemler toparlandığında ve aynı işlemler metriğin tersinin varyasyonu için de yapıldığında,

$$\begin{aligned}
\delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\lambda}g_{\nu\beta}\delta g^{\lambda\beta} \\
\delta g^{\mu\nu} &= -g^{\mu\lambda}g^{\nu\beta}\delta g_{\lambda\beta}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

eşitlikleri bulunur. Burada λ ve β serbest indislerdir. Metrik tensörün varyasyonunu hesaplamak için matrislerin özelliği olan $ln(detg_{\mu\nu}) = Tr(lng_{\mu\nu})$ özelliği kullanılır çünkü metrik tensor köşegenleştirilebilir [47]. Bu özellikle beraber,

$$\frac{\delta g}{g} = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.10}$$

eşitliği bulunur. Buradan $\sqrt{-g}$ ifadesinin varyasyonu bulunur.

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{\delta g}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.11}$$

Eğrilik skaleri $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ olmak üzere, $f(R)$ fonksiyonu R eğrilik skalerine bağlı olduğu için eylem varyasyonundaki $\delta f(R)$ terimi şu şekilde yazılır:

$$\delta f(R) = f_R(R)\delta R = f_R(R)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + f_R(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

Burada $f_R(R) = \frac{df(R)}{dR}$ olarak kısaltılmıştır ve $R_{\mu\nu}$ terimi Ricci tensörüdür. Madde kısmının eyleminin varyasyonundan gelen katkı ise şu şekilde yazılır [48]:

$$\delta\left(\sqrt{-g}\mathscr{L}_M\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.13}$$

$T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörüdür. Tüm bulunanlar eylem varyasyon denklemine yerleştirilir ve denklem 2κ ile çarpılırsa,

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[f_R(R)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R)\delta g^{\mu\nu} + f_R(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right] \tag{2.14}$$

olarak bulunur. $\delta R_{\mu\nu}$ terimi hariç diğer terimler metrik tensörün tersinin varyasyonu parantezine alınabilir. Burada Ricci tensörünün varyasyonunun, metriğin tersinin varyasyonunu içerecek şekilde yazılması gerekir. $\delta R_{\mu\nu}$ hesaplamak için ise Kovaryant türev, Christoffel sembolü ve Riemann tensörünün tanımı kullanılarak Riemann tensörünün varyasyonunun hesaplanması gereklidir. Herhangi bir tensörün kovaryant türevi şu şekilde yazılır [49] :

$$\nabla_\alpha T^\mu_\nu = \partial_\alpha T^\mu_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}T^\mu_\lambda + \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}T^\lambda_\nu \tag{2.15}$$

Christoffel sembolü (affine connection) tanımı metriğe bağlı olarak şu şekildedir:

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\beta\lambda}\left(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right) \tag{2.16}$$

Riemann tensörünün tanımı ise şu şekildedir:

$$R^\rho{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} \tag{2.17}$$

Riemann tensörünün varyasyonu alınırsa sonuç:

$$\begin{aligned}\delta R^\rho{}_{\mu\sigma\nu} = \quad & \partial_\sigma\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \partial_\nu\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^\rho{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} + \Gamma^\rho{}_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \\ & -\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}\end{aligned} \tag{2.18}$$

Ayrıca Riemann tensörüne daraltme işlemi uygulanarak Ricci tensörü bulunur.

$$R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} \tag{2.19}$$

Buradan Ricci tensörünün varyasyonu ise,

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} = \quad & \partial_\sigma \delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^\sigma{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \\ & -\delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} \end{aligned} \tag{2.20}$$

olarak bulunur. Christoffel sembolü bir tensör değildir çünkü koordinat dönüşümlerinde farklı değerler alabilir. Fakat Christoffel sembolünün varyasyonu bir tensördür çünkü tensör özelliklerine göre dönüşür [50]. Riemann tensörünün varyasyonu, farklı Christoffel sembolü varyasyonlarının kovaryant türevlerinin farkı olarak yazılabilir. Christoffel sembolünün varyasyonunun kovaryant türevi,

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma(\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}) &= \partial_\sigma\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu}\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \\ \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho{}_{\sigma\mu}) &= \partial_\nu\delta\Gamma^\rho{}_{\sigma\mu} + \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\delta\Gamma^\rho{}_{\sigma\lambda}\end{aligned} \tag{2.21}$$

olduğundan yukarıda da görülebileceği gibi Riemann tensörünün varyasyonu,

$$\delta R^\rho{}_{\mu\sigma\nu} = \nabla_\sigma\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} \tag{2.22}$$

olarak Christoffel sembolünün varyasyonunu içerecek şekilde yazılır. Bu varyasyonda, Riemann tensörüne daraltma işlemi uygulanırsa Ricci tensörünün varyasyonu bulunur.

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} \tag{2.23}$$

Bu bulunan eşitliğe Palatini özdeşliği denir. Ricci tensörünün varyasyonu metrik tensör varyasyonlarını içerecek şekilde yazılabilir. Bunun için Christoffel sembolünün varyasyonunun metrik tensör varyasyonları şeklinde yazılması gerekir. Varyasyon ile kısmi türev operatörünün yer değiştirebildiğini göz önüne alarak Christoffel sembolü varyasyonu,

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\delta g^{\beta\lambda}\left(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right) \qquad (2.24)\\ &\quad +\frac{1}{2}g^{\beta\lambda}\left(\partial_\mu\delta g_{\beta\nu} + \partial_\nu\delta g_{\mu\beta} - \partial_\beta\delta g_{\mu\nu}\right) \\ &= -\frac{1}{2}g^{\lambda\beta}g^{\gamma\beta}\delta g_{\beta\gamma}\left(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}g^{\beta\lambda}\left(\partial_\mu\delta g_{\beta\nu} + \partial_\nu\delta g_{\mu\beta} - \partial_\beta\delta g_{\mu\nu}\right) \\ &= -g^{\lambda\beta}\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}\delta g_{\beta\gamma} + \frac{1}{2}g^{\beta\lambda}\left(\partial_\mu\delta g_{\beta\nu} + \partial_\nu\delta g_{\mu\beta} - \partial_\beta\delta g_{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{\lambda\beta}\Big(\partial_\mu\delta g_{\beta\nu} - \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}\delta g_{\beta\gamma} - \Gamma^\gamma{}_{\mu\beta}\delta g_{\gamma\nu} + \partial_\nu\delta g_{\beta\mu} - \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}\delta g_{\beta\gamma} \\ &\quad -\Gamma^\gamma{}_{\nu\beta}\delta g_{\gamma\mu} - \partial_\beta\delta g_{\mu\nu} + \Gamma^\gamma{}_{\beta\mu}\delta g_{\nu\gamma} + \Gamma^\gamma{}_{\nu\beta}\delta g_{\gamma\mu}\Big)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Kovaryant türevin tanımından hareketle bu varyasyon şu şekilde yazılabilir:

$$\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\beta}\left(\nabla_{\mu}\delta g_{\beta\nu}+\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\beta}-\nabla_{\beta}\delta g_{\mu\nu}\right) \tag{2.25}$$

Ayrıca daralmış Christoffel sembolünün varyasyonu ise şu şekilde bulunur:

$$\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}=\frac{1}{2}g^{\lambda\beta}\nabla_{\mu}\delta g_{\beta\lambda} \tag{2.26}$$

Daha önce bulunan (2.23) Palatini özdeşliği ile (2.25) ve (2.26) Christoffel sembolünün varyasyonu birleştirilirse Ricci tensörü varyasyonu metrik tensör varyasyonları cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$\delta R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\beta}\left[\nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}\delta g_{\beta\nu}+\nabla_{\lambda}\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\beta}-\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\delta g_{\beta\lambda}-\nabla_{\lambda}\nabla_{\beta}\delta g_{\mu\nu}\right] \tag{2.27}$$

(2.14) varyasyon denklemindeki 3.terim, hesaplanan (2.27) varyasyonu da kullanılarak ayrı bir integral olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}\int d^4x\sqrt{-g}f_R(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \;=\; & \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}f_R(R)g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\Big[\nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}\delta g_{\beta\nu} \\ & +\nabla_{\lambda}\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\beta}-\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\delta g_{\beta\lambda}-\nabla_{\lambda}\nabla_{\beta}\delta g_{\mu\nu}\Big]\end{aligned} \tag{2.28}$$

Metrik tensörün önemli bir özelliği de kovaryant türevinin sıfır olmasıdır. Buna metrik uyumluluğu denir [51].

$$\nabla_{\sigma}g^{\mu\nu}=\nabla_{\sigma}g_{\mu\nu}=0 \tag{2.29}$$

Burada dikkat edilmesi gereken konu metrik tensörün kovaryant türevi sıfırdır ancak metrik tensörün varyasyonunun kovaryant türevi sıfır değildir.

(2.28) integralindeki metrik varyasyonları, daha önce hesaplanan (2.9) özdeşliği kullanılarak şu şekilde dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned}\delta g_{\beta\nu} &= -g_{\beta\gamma}g_{\nu\chi}\delta g^{\gamma\chi} \\ \delta g_{\mu\beta} &= -g_{\mu\gamma}g_{\beta\chi}\delta g^{\gamma\chi} \\ \delta g_{\beta\lambda} &= -g_{\beta\gamma}g_{\lambda\chi}\delta g^{\gamma\chi} \\ \delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\gamma}g_{\nu\chi}\delta g^{\gamma\chi}\end{aligned} \tag{2.30}$$

Bu dönüşümler 2.28 integraline yerleştirilir ve kovaryant türevler $\delta g^{\gamma\chi}$ parantezine alınır. Ayrıca (2.6) özelliği kullanılırsa şu sonuçlar bulunur:

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}g_{\beta\gamma}g_{\nu\chi} &= \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\mu}_{\chi} \\
g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}g_{\mu\gamma}g_{\beta\chi} &= \delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\chi} \\
g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}g_{\beta\gamma}g_{\lambda\chi} &= g_{\gamma\chi}g^{\mu\nu} \\
g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}g_{\mu\gamma}g_{\nu\chi} &= g_{\gamma\chi}g^{\lambda\beta} \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

Bulunan sonuçlar 2.28 integralinin parantez içine yerleştirilir ve gerekli işlemler yapılır.

$$
\begin{aligned}
& \Big[g_{\gamma\chi}g^{\mu\nu}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu} + g_{\gamma\chi}g^{\lambda\beta}\nabla_{\lambda}\nabla_{\beta} - \delta^{\lambda}_{\gamma}\delta^{\mu}_{\chi}\nabla_{\lambda}\nabla_{\mu} - \delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\chi}\nabla_{\lambda}\nabla_{\nu}\Big]\delta g^{\gamma\chi} \\
= \; & \Big[g_{\gamma\chi}g^{\mu\nu}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu} + g_{\gamma\chi}g^{\lambda\beta}\nabla_{\lambda}\nabla_{\beta}\delta g_{\mu\nu} - \nabla_{\gamma}\nabla_{\chi} - \nabla_{\chi}\nabla_{\gamma}\Big]\delta g^{\gamma\chi} \\
= \; & 2\Big[g_{\gamma\chi}\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha} - \nabla_{\gamma}\nabla_{\chi}\Big]\delta g^{\gamma\chi} \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

Bu denklemde simetriden dolayı elde edilen aşağıdaki eşitlikler kullanılmıştır:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\gamma}\nabla_{\chi}\delta g^{\gamma\chi} &= \nabla_{\chi}\nabla_{\gamma}\delta g^{\gamma\chi} \\
g^{\mu\nu}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu} &= g^{\lambda\beta}\nabla_{\lambda}\nabla_{\beta} = \nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha} \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Ayrıca 2.32 denkleminde indisler üzerinden toplam alındığı için γ ile χ indisleri yerine μ ve ν indisleri seçilebilir.

$$
\Big[g_{\gamma\chi}\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha} - \nabla_{\gamma}\nabla_{\chi}\Big]\delta g^{\gamma\chi} = \Big[g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Big]\delta g^{\mu\nu} \qquad (2.34)
$$

Bulunanların hepsi (2.28) integraline yerleştirilirse sonuç şu şekilde yazılır:

$$
\int d^4x\sqrt{-g}f_R(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x\sqrt{-g}f_R(R)\Big[g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Big]\delta g^{\mu\nu} \qquad (2.35)
$$

Bu integralde, $\delta g^{\mu\nu}$ üzerine uygulanan kovaryant türevlerden kısmi integrasyon kullanarak kurtulmak mümkündür. Bunun için 2.35 integrali ikiye ayrılır ve ayrı ayrı kısmi integrasyon yapılır. İlk kısmi integrasyon yapılacak kısım,

$$
\begin{aligned}
& \int d^4x\sqrt{-g}f_R(R)g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}\delta g^{\mu\nu} \qquad (2.36) \\
= \; & \int d^4x\nabla^{\alpha}\Big[\sqrt{-g}f_R(R)g_{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\delta g^{\mu\nu}\Big] - \int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}f_R(R)\nabla_{\alpha}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. İlk integraldeki terim yüzey terimi olup alan denklemlerine katkı yapmaz, böylece sıfıra eşitlenebilir. Geriye kalan integralde tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa şu sonuç bulunur:

$$
\begin{aligned}
& -\int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}f_R(R)\nabla_{\alpha}\delta g^{\mu\nu} \qquad (2.37) \\
= \; & -\int d^4x\nabla_{\alpha}\Big[\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^{\alpha}f_R(R)\Big] + \int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}f_R(R)
\end{aligned}
$$

Burada yine ilk integral yüzey terimi olup sıfıra eşitlenebilir. Böylece 2.35 integralinin ilk kısımı şu şekilde bulunur:

$$\int d^4x\sqrt{-g}f_R(R)g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}\delta g^{\mu\nu} = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}f_R(R) \qquad (2.38)$$

2.35 integralinde ikinci kısmi integrasyon yapılacak kısım şudur:

$$\begin{aligned} & -\int d^4x\sqrt{-g}f_R(R)\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta g^{\mu\nu} \qquad (2.39)\\ = \; & -\int d^4x\nabla_{\mu}\left[\sqrt{-g}f_R(R)\nabla_{\nu}\delta g^{\mu\nu}\right] + \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_{\mu}f_R(R)\nabla_{\nu}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

2.39 denkleminde ilk integraldeki terim yine yüzey terimi olup alan denklemlerine katkı yapmaz, böylece sıfıra eşitlenebilir. 2.39 denkleminde geriye kalan integralde tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa şu sonuç bulunur:

$$\begin{aligned} & \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_{\mu}f_R(R)\nabla_{\nu}\delta g^{\mu\nu} \qquad (2.40)\\ = \; & \int d^4x\nabla_{\nu}\left[\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}f_R(R)\right] - \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}f_R(R) \end{aligned}$$

Burada yine ilk integral yüzey terimi olup sıfıra eşitlenebilir. Böylece 2.35 integralinin ikinci kısımı şu şekilde bulunur:

$$-\int d^4x\sqrt{-g}f_R(R)\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta g^{\mu\nu} = -\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}f_R(R) \qquad (2.41)$$

$\Box = \nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}$ d'Alembert operatörü kullanılarak 2.38 ve 2.41 eşitlikleri birleştirilirse 2.35 integrali şu hale gelir:

$$\int d^4x\sqrt{-g}f_R(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left[g_{\mu\nu}\Box - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\right]f_R(R) \qquad (2.42)$$

Bulunan bu sonuç (2.14) denklemine yerleştirilir ve böylece tüm terimler $g^{\mu\nu}$ parantezine alınabilir. Böylelikle eylem varyasyon denklemi,

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}f_R(R) + g_{\mu\nu}\Box f_R(R) - \kappa T_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu} \qquad (2.43)$$

olurak bulunur. Böylece tüm terimler $\delta g^{\mu\nu}$ parantezine alınmış olur ve parantez içindeki terim sıfıra eşittir. Buradan $f(R)$ yerçekimi kuramı alan denklemleri elde edilir.

$$f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \left(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - g_{\mu\nu}\Box\right)f_R(R) = \kappa T_{\mu\nu} \qquad (2.44)$$

Bulunan bu denklem $f_R(R)$'ın kovaryant türevi alındığı için 4. mertebe diferansiyel denklemlerden oluşur. Bu yüzden $f(R)$ yerçekimi kuramına 4. mertebe yerçekimi kuramı denir. Ayrıca $f(R)$ yerçekimi kuramı alan denklemlerinin diverjansı sıfırdır. Buna göre $f(R)$ yerçekimi kuramında enerji korunur.

$$\nabla^{\mu}\left[f_R(R)R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu}-\left(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}-g_{\mu\nu}\Box\right)f_R(R)\right]=\kappa\nabla^{\mu}T_{\mu\nu}=0 \tag{2.45}$$

Enerji-Momentum tensörünün izi $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}=T$ olduğu göz önüne alınarak, (2.44) denklemi metriğin tersi ile çarpılır ve $f(R)$ kuramı için iz denklemi,

$$3\Box f_R(R)+Rf_R(R)-2f(R)=\kappa T \tag{2.46}$$

olarak elde edilir. Burada $f_R(R)$ fonksiyonuna uygulanan d'Alembert operatörünün açık hali şu şekildedir [52] :

$$\Box f_R(R)=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}f_R(R)\right) \tag{2.47}$$

Einstein tensörüyle bağlantı kurmak amacıyla etkin stres-enerji tensörü tanımlanır.

$$T^{etkin}_{\mu\nu}=\frac{1}{f_R(R)}\left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[f(R)-Rf_R(R)]+(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}-g_{\mu\nu}\Box)f_R(R)\right] \tag{2.48}$$

Geometrik terimleri içeren bu denklem eğrilik enerji-momentum tensörüdür ve etkin Einstein denklemlerinin kaynağıdır. Bu denklemle beraber Einstein tensörü ,

$$G_{\mu\nu}=\frac{\kappa}{f_R(R)}T_{\mu\nu}+T^{etkin}_{\mu\nu} \tag{2.49}$$

olarak yazılabilir [53].

2.2 Küresel Simetride Noktasal Lagrangian

Küresel simetride uzay-zaman metrik işareti $\left(-,+,+,+\right)$ seçilerek genellikle şu metrikle temsil edilir:

$$ds^2=-A(r)dt^2+B(r)dr^2+C(r)d\Omega^2 \tag{2.50}$$

Burada açıya bağlı kısım $d\Omega^2=d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2$'dir. Metrik tensör elemanları ise sırasıyla şunlardır:

$$\begin{aligned} g_{tt}&=-A(r) \quad g_{rr}=B(r)\\ g_{\theta\theta}&=C(r) \quad g_{\varphi\varphi}=C(r)\sin^2\theta \end{aligned} \tag{2.51}$$

Ayrıca özel durumda $A(r) = B^{-1}(r)$ ve $C(r) = r^2$ seçilirse standart Schwarzchild metriği elde edilir [3] [54]. Metrik tensör ve Christoffel sembolü kullanılarak elde edilen eğrilik skaleri ayrı bir genelleştirilmiş koordinat olarak eyleme eklenir ve buradan noktasal Lagrangian elde edilebilir. Noktasal Lagrangian'ın bulunacağı eylem,

$$S = \int dr \mathscr{L}(A, A', B, B', C, C', R, R') \tag{2.52}$$

olarak tanımlanır. R eğrilik skaleri ve potansiyeller A, B, C metrik tensör elemanlarıdır. Ayrıca (A', B', C', R') sırasıyla (A, B, C, R)'nin radyal koordinat r'ye göre türevleridir.

Eylemden noktasal Lagrangian bulmak için Lagrange çarpanları yöntemi kullanılır. Boşluk çözümü için (2.2) ifadesi,

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[f(R) - \lambda(R - \hat{R})] \tag{2.53}$$

olur. Burada λ Lagrange çarpanı ve $\hat{R}$ ise (2.50) metrik terimlerini içeren eğrilik skaleridir. Ayrıca burada $\frac{8\pi G}{c^4} = 1$ olarak alınmıştır.

Eğrilik skalerini hesaplamak için önce Riemann tensörü hesaplanıp buna daraltma işlemi uygulanır ve Ricci tensörü bulunur, daha sonra bu tensör de metriğin tersi ile çarpılır böylece eğrilik skaleri bulunur. Daha önce verildiği üzere Riemann tensörü,

$$R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} \tag{2.54}$$

olarak yazılır. Ricci tensörü $R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$ ve Ricci skaleri $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ olarak tanımlanır. Riemann tensörünü hesaplamak için ise Christoffel sembolü kullanılır. Christoffel sembolünün metrik cinsindenl ifadesi,

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}\left[\partial_\nu g_{\mu\gamma} + \partial_\mu g_{\gamma\nu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}\right] \tag{2.55}$$

olarak verilir. Christoffel sembolü $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu}$ olarak alt indislerine göre simetriktir.

(2.50) metriği kullanılarak tüm Christoffel sembolleri hesaplanabilir. Sonucu sıfırdan farklı olan Christoffel sembolleri şunlardır:

$$\begin{aligned}
\Gamma^t{}_{rt} &= \Gamma^t{}_{tr} = \frac{A'}{2A} \\
\Gamma^r{}_{tt} &= \frac{A'}{2B}, \qquad \Gamma^r{}_{rr} = \frac{B'}{2B} \\
\Gamma^r{}_{\theta\theta} &= -\frac{C'}{2B}, \qquad \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -\frac{C'\sin^2\theta}{2B} \\
\Gamma^\theta{}_{r\theta} &= \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \frac{C'}{2C}, \qquad \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^\varphi{}_{r\varphi} &= \Gamma^\varphi{}_{\varphi r} = \frac{C'}{2C}, \qquad \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \cot\theta
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Bulunan Christoffel sembolleri kullanılarak eğrilik skaleri hesaplanabilir. (2.50) metriğinin diyagonal olmasından faydalanarak eğrilik skaleri şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\hat{R} &= g^{tt}\left[\Gamma^\lambda{}_{tt,\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{t\lambda,t} + \Gamma^\alpha{}_{tt}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{t\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\alpha t}\right] \\
&+ g^{rr}\left[\Gamma^\lambda{}_{rr,\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{r\lambda,r} + \Gamma^\alpha{}_{rr}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{r\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\alpha r}\right] \\
&+ g^{\theta\theta}\left[\Gamma^\lambda{}_{\theta\theta,\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\theta\lambda,\theta} + \Gamma^\alpha{}_{\theta\theta}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\theta\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\theta}\right] \\
&+ g^{\varphi\varphi}\left[\Gamma^\lambda{}_{\varphi\varphi,\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\varphi\lambda,\varphi} + \Gamma^\alpha{}_{\varphi\varphi}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\varphi\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\varphi}\right]
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Kısmi türev $\Gamma^d{}_{ab,c} = \partial_c\Gamma^d{}_{ab}$ olarak kısaltılmıştır. Bulunan sıfırdan farklı Christoffel sembolleri ve bunların türevleri (2.57) denklemine yerleştirilerek eğrilik skaleri,

$$\hat{R} = -\frac{A''}{AB} - 2\frac{C''}{BC} - \frac{A'C'}{ABC} + \frac{A'^2}{2A^2B} + \frac{C'^2}{2BC^2} + \frac{A'B'}{2AB^2} + \frac{B'C'}{B^2C} + \frac{2}{C} \tag{2.58}$$

olarak bulunur. Bundan sonraki amaç 2.mertebe türevlerden kurtulmaktır. Çünkü alan denklemlerinde 1.mertebe türevler olması gerekir. Bu yüzden eğrilik skaleri eyleme yerleştirildiğinde 2.mertebe türevler kısmi integrasyon kullanılarak 1.mertebe türevlere indirgenebilir. Kurtulmak istediğimiz 2.mertebe türevler ayrı halde yazılısa eğrilik skaleri şu şekilde yazılır:

$$\hat{R} = R^* - \frac{A''}{AB} - 2\frac{C''}{BC} \tag{2.59}$$

Buradaki denklemde R^* terimi 1.mertebe türevleri içerir. Lagrange çarpanını bulmak için ise R için Euler-Lagrange denklemi çözülür.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial L}{\partial R'}\right) - \frac{\partial L}{\partial R} = 0 \tag{2.60}$$

Lagrangian'de R' bağlılığı olmadığı için,

$$\frac{\partial L}{\partial R} = 0 \longrightarrow \lambda = f_R(R) \tag{2.61}$$

olarak bulunur. (2.50) Metriğinin determinantı ve $\sqrt{-g}$ terimi ise metrik köşegen olduğu için,

$$\begin{aligned} g &= -A(r)B(r)C(r)^2\sin^2\theta \\ \sqrt{-g} &= A^{1/2}B^{1/2}C\sin\theta \end{aligned} \tag{2.62}$$

olarak bulunur. Eylemde açıya bağlılık ve zamana bağlılık olmadığı için açısal kısım ve t'ye bağlı kısım Lagrangian'e sadece bir çarpan olarak katkı sağlar. Bu yüzden d^4x yerine dr yazılabilir. Bu şekilde yazılan eyleme kanonik eylem denir ve bulunan Lagrangian ise noktasal Lagrangian olarak adlandırılır. Tüm bulunanlar (2.53) eylem denklemine yerleştirilirse,

$$S = \int drA^{1/2}B^{1/2}C\left[f - f_R\big(R - R^* + \frac{A''}{AB} + 2\frac{C''}{BC}\big)\right] \tag{2.63}$$

olur. Burada 2.mertebe türevlerden kurtulmak için kısmi integrasyon uygulanır ve kısmi integrasyonla gelen yüzey terimleri atılır. Kısmi integrasyonla değişen terimler şunlardır:

$$\sqrt{AB}C\Big(f_R\frac{A''}{AB}\Big) \to -A'\partial_r\Big(\frac{f_RC}{A^{1/2}B^{1/2}}\Big) \tag{2.64}$$

$$\sqrt{AB}C\Big(f_R\frac{2C''}{BC}\Big) \to -C'\partial_r\Big(\frac{2A^{1/2}}{B^{1/2}}f_R\Big) \tag{2.65}$$

Bu terimler kanonik eylemde yerine koyulursa kanonik eylem,

$$S = \int dr\left[A^{1/2}B^{1/2}C\big[f - f_R(R - R^*)\big] + \Big(\frac{f_RC}{A^{1/2}B^{1/2}}\Big)'A' + 2\Big(\frac{A^{1/2}}{B^{1/2}}f_R\Big)'C'\right] \tag{2.66}$$

olarak bulunur. Böylece noktasal Lagrangian'de 2.mertebe türevler bulunmaz.

$S = \int dr\mathscr{L}$ olduğu için noktasal Lagrangian,

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = \quad & \frac{A^{1/2}C'^2f_R}{2CB^{1/2}} + \frac{A'C'f_R}{A^{1/2}B^{1/2}} + \frac{CA'R'f_{RR}}{A^{1/2}B^{1/2}} \\ & + \frac{2A^{1/2}R'C'f_{RR}}{B^{1/2}} + A^{1/2}B^{1/2}\big[Cf + (2 - CR)f_R\big] \end{aligned} \tag{2.67}$$

olur. Burada tanımlanan kısaltma $f_{RR} = \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}$'dir. Noktasal Lagrangian denkleminde B' bağlılığı olmadığı için B çevrimsel koordinattır ve B için Euler-Lagrange denklemi yazıldığında,

$$\frac{\partial L}{\partial B} = 0 \tag{2.68}$$

olur. B'yi hesaplamayı kolaylaştırmak amacıyla noktasal Lagrangian şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \quad & \frac{1}{B^{1/2}}\Big[\frac{A^{1/2}C'^2 f_R}{2C} + \frac{A'C' f_R}{A^{1/2}} + \frac{CA'R' f_{RR}}{A^{1/2}} + 2A^{1/2}R'C' f_{RR}\Big] \\ & + B^{1/2}\Big[A^{1/2}\big[Cf + (2-CR) f_R\big]\Big] \end{aligned} \tag{2.69}$$

Hesapları kolaylaştırmak amacıyla şu kısaltmalar tanımlanır:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{A^{1/2}C'^2 f_R}{2C} + \frac{A'C' f_R}{A^{1/2}} + \frac{CA'R' f_{RR}}{A^{1/2}} + 2A^{1/2}R'C' f_{RR} \\ \beta &= A^{1/2}\big[Cf + (2-CR) f_R\big]\end{aligned} \tag{2.70}$$

Bu kısaltmalarla beraber (2.67) denklemi,

$$\mathscr{L} = \frac{\alpha}{B^{1/2}} + B^{1/2}\beta \tag{2.71}$$

olarak yazılır. Noktasal Lagrangian'ı kullanarak B için Euler-Lagrange denklemi çözüldüğünde sonuç şu şekildedir:

$$\frac{\partial L}{\partial B} = -\frac{\alpha}{2B^{3/2}} + \frac{\beta}{2B^{1/2}} = 0 \longrightarrow B = \frac{\alpha}{\beta} \tag{2.72}$$

Kısaltmalar yerine koyulduğunda B şu şekilde bulunur:

$$B = \frac{A f_R C'^2 + 2C f_R A'C' + 2C^2 f_{RR} A'R' + 4AC f_{RR} C'R'}{2AC\big[Cf + (2-CR) f_R\big]} \tag{2.73}$$

Hessian matrix hesaplanması için kanonik Lagrangian kullanılır. Kanonik Lagrangian $L = \mathscr{L}^2$ olarak tanımlanır. Buna göre kanonik Lagrangian kısaltmalar cinsinden şu şekilde yazılır:

$$L = \mathscr{L}^2 = \frac{\alpha^2}{B} + \beta^2 B + 2\alpha\beta = 4\alpha\beta \tag{2.74}$$

α ile β kısaltmaları kanonik Lagrangian'a yerleştirilince sonuç şu şekilde bulunur:

$$L = \frac{2\big[Cf + (2-CR) f_R\big]}{C}\big[AC'^2 f_R + 2CC'A' f_R + 2C^2 A'R' f_{RR} + 4ACC'R' f_{RR}\big] \tag{2.75}$$

Hesaplanan Kanonik Lagrangian denkleminden hareketle, Kanonik Lagrangian'ın genelleştirilmiş koordinatların türevlerine göre sıralı şekilde alınan ikinci türevlerinden Hessian matris elemanları ve Hessian determinant hesaplanabilir. Hessian matris $\frac{\partial^2 L}{\partial q'_\mu \partial q'_\nu}$ olarak tanımlanır. Uzay-zamanın boyutu 4 olduğu için ve metrik tensör köşegen olduğu için metrik tensörün de 4 elemanı vardır. Buna göre Hessian matrisinin 16 elemanı olması gerekir. Fakat B metrik elemanının r türevi kanonik Lagrangian'de bulunmadığı için B' türevleri yok olur. Buna göre Hessian matris 9 elemanlıdır. Ayrıca

Hessian matris simetrik olduğu için alınan türevlerin sırası değişebilir. Hessin matrisin determinantı alınarak çevrimsel koordinat olup olmadığı anlaşılabilir. Eğer Hessian determinantı sıfır olursa genelleştirilmiş koordonatlardan en az birisi çevrimsel olmalıdır [56]. Kanonik Lagrangian'ın genelleştirilmiş koordinatların türevlerine göre hesaplanan Hessian matris elemanları şunlardır:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial A'\partial C'} &= \frac{\partial^2 L}{\partial C'\partial A'} = 4\left[Cf+(2-CR)f_R\right]f_R \\
\frac{\partial^2 L}{\partial A'\partial R'} &= \frac{\partial^2 L}{\partial R'\partial A'} = 4\left[Cf+(2-CR)f_R\right]Cf_{RR} \\
\frac{\partial^2 L}{\partial R'\partial C'} &= \frac{\partial^2 L}{\partial C'\partial R'} = 8\left[Cf+(2-CR)f_R\right]Af_{RR} \\
\frac{\partial^2 L}{\partial C'^2} &= 4\frac{\left[Cf+(2-CR)f_R\right]}{C}Af_R \\
\frac{\partial^2 L}{\partial A'^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 L}{\partial R'} &= 0
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Bu bulunan sonuçlar, Hessian matris simetrik olduğu için ikiye bölünür. Bulunanlarla beraber Hessian matris şu şekilde yazılır:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q'_\mu \partial q'_\nu} = 2\left[Cf+(2-CR)f_R\right]\begin{pmatrix} 0 & f_R & Cf_{RR} \\ f_R & \frac{Af_R}{C} & 2Af_{RR} \\ Cf_{RR} & 2Af_{RR} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

Bu Hessian matrisin, Hessian determinantı ise şu şekilde hesaplanır:

$$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q'_\mu \partial q'_\nu}\right) = 24AC\left[Cf+(2-CR)f_R\right]^3 f_R f_{RR}^2 \tag{2.78}$$

Burada determinantın sıfırdan farklı olması için, $Cf+(2-CR)f_R \neq 0$ ve $f_{RR} \neq 0$ olduğu kabul edilmiştir. $f_{RR} \neq 0$ olan yerçekimi modellerine örnek olarak dördüncü-mertebe yerçekimi verilebilir.

2.3 Noether Simetrisi

Fiziksel sistemin belirli bir dönüşüm grubuna göre sahip olduğu değişmez özelliklerine, o sistemin simetrileri denir. Noether teoremine göre, fiziksel bir sistemin eyleminin her diferansiyellenebilir simetrisine karşılık bir korunum yasası vardır [38]. Buna örnek olarak öteleme simetrisinin sonucu olarak momentum korunumu, zaman simetrisinin sonucu olarak enerji korunumu ve dönme simetrisinin sonucu olarak açısal momentum korunumu verilebilir [57] [58]. Korunan nicelikler ise dinamikteki çevrimsel değişkenlerle bağlantılıdır [59].

Kanonik, dejenere olmayan, Hessian determinantı sıfırdan farklı bir noktasal Lagrangian'ın genelleştirilmiş koordinatları q_i ile sonsuz küçük ε parametresine bağlı olarak $Q^i = Q^i(q,\varepsilon)$ nokta dönüşümü yapıldığında bu nokta dönüşümü Q üzerinde bir vektör alanı, affine parametresine göre türevleri de hesaba katarak şu şekilde ifade edilir [60] [61]:

$$\mathbf{X} = \alpha^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{d\lambda}\alpha^i(q)\right)\frac{\partial}{\partial q'^i} \tag{2.79}$$

Burada λ affine parametresidir ve $f(R)$ yerçekimi kuramında bu radyal koordinat r'dir. Buna göre $\frac{d}{d\lambda}\alpha^i(q) = \alpha'^i$ olur. Böylece (2.79) ifadesi şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{X} = \alpha_i\partial_{q_i} + \alpha'_i\partial_{q'^i} \tag{2.80}$$

2.3.1 Noether Vektör Bileşenleri

α vektör alanı bileşenlerine Noether vektörü bileşenleri denir. Noether vektörü bileşenleri $\alpha = \alpha_i$ olarak yazılır. (2.80) vektör alanı boyunca noktasal Lagrangian'ın Lie türevi sıfıra eşitlenir. Noether vektör bileşenleri, Lie türevinin Lagrangian'e uygulanmasıyla elde edilen diferansiyel denklemlerden hesaplanabilir. Vektör alanının Lagranian'e nasıl etki ettiğini görmek için Lagrangian'in matris formunda yazılması gerekir. Lagrangian'in matris formunda ifadesi,

$$L = q'^t\mathbf{L}q' \tag{2.81}$$

olarak yazılır. Burada $q = (A,C,R)$ ve $q' = (A',C',R')$ sırasıyla genelleştirilmiş koordinatlar ve genelleştirilmiş koordinatların affine parametresine göre türevlerini içeren matrislerdir. q'^t ise q' matrisinin transpozudur. Burada $\mathbf{L} = L_{,\mu\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial q'_\mu \partial q'_\nu}$ matrisi daha önce hesaplanan Hessian matrisdir. (2.80) vektör alanını boyunca Lagragian'in Lie türevi sıfıra eşitlenirse,

$$L_{\mathbf{X}}L = (\alpha\nabla_q + \alpha'\nabla_{q'})(q'^t\mathbf{L}q') = q'^t\alpha.\nabla_q\mathbf{L}q' + 2\alpha'.\mathbf{L}q' + \alpha'.q'^t\nabla_{q'}\mathbf{L}q' = 0 \tag{2.82}$$

olarak bulunur [62]. Hessian matriste, affine parametresine göre türev içeren terimler olmadığı için $\nabla_{q'}\mathbf{L} = 0$ olur. Ayrıca Noether vektörü bileşeninin türevi şu şekilde yazılır:

$$\alpha' = \frac{\partial\alpha}{\partial r} = \frac{\partial\alpha}{\partial q^t}\frac{\partial q^t}{\partial r} = (\nabla_q\alpha)^t q'^t \tag{2.83}$$

Bulunan sonuçlar göz önüne alınarak (2.82) denklemi,

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{X}}L &= q'^t(\alpha.\nabla_q\mathbf{L}+2(\nabla_q\alpha)^t.\mathbf{L})q' = 0 \\ &\longrightarrow \alpha.\nabla_q\mathbf{L}+2(\nabla_q\alpha)^t\mathbf{L} = 0 \end{aligned} \tag{2.84}$$

olurak bulunur. Bulunan sonuç indis gösterimiyle şu şekilde yazılır:

$$\alpha_i\frac{\partial L_{,\mu\nu}}{\partial q_i}+2\frac{\partial\alpha_i}{\partial q_\mu}L_{,i\nu} = 0 \tag{2.85}$$

Genelleştirilmiş koordinatlar $q_1 = A$, $q_2 = C$ ve $q_3 = R$ olarak tanımlanırsa, Noether vektör bileşenleri $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ olur ve i indisi üzerinden toplam açılırsa,

$$\alpha_1\frac{\partial L_{,\mu\nu}}{\partial A}+\alpha_2\frac{\partial L_{,\mu\nu}}{\partial C}+\alpha_3\frac{\partial L_{,\mu\nu}}{\partial R}+2\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_\mu}L_{,A\nu}+2\frac{\partial\alpha_2}{\partial q_\mu}L_{,C\nu}+2\frac{\partial\alpha_3}{\partial q_\mu}L_{,R\nu} = 0 \tag{2.86}$$

olarak bulunur. Burada 9 tane diferansiyel denklem vardır fakat Hessian matris $L_{,\mu\nu} = L_{,\nu\mu}$ simetrik olduğu için denklem sayısı 6 olur. (2.86) diferansiyel denklemlerini hesaplamak için daha önce $f(R)$ kuramı için küresel simetrik metrikle hesaplanan (2.77) Hessian matrisi kullanılır. [ek-A]'da yapılan detaylı hesaplar sonucunda bulunan ve Noether vektör bileşenlerini verecek diferansiyel denklemler şunlardır:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \frac{\partial\alpha_2}{\partial A}f_R+\frac{\partial\alpha_3}{\partial A}Cf_{RR} = 0 \\
&2)\quad \frac{A}{C}\big[(2-CR)\alpha_3 f_{RR}-\frac{2\alpha_2 f_R}{C}\big]f_R+\gamma\big[\big(\frac{\alpha_1}{C}+2\frac{\partial\alpha_1}{\partial C}+2\frac{\partial\alpha_2}{\partial C}\frac{A}{C}\big)f_R \\
&\qquad +A\big(\frac{\alpha_3}{C}+4\frac{\partial\alpha_3}{\partial C}\big)f_{RR}\big] = 0 \\
&3)\quad C\frac{\partial\alpha_1}{\partial R}+2A\frac{\partial\alpha_2}{\partial R} = 0 \\
&4)\quad \alpha_2 f_R\big(f-Rf_R\big)+\alpha_3\big(2-CR\big)f_R f_{RR}+\gamma\big[\big(\alpha_3+C\frac{\partial\alpha_3}{\partial C}+2A\frac{\partial\alpha_3}{\partial A}\big)f_{RR} \\
&\qquad +\big(\frac{\partial\alpha_1}{\partial A}+\frac{A}{C}\frac{\partial\alpha_2}{\partial A}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial C}\big)f_R\big] = 0 \\
&5)\quad \big[C\big(2-CR\big)\alpha_3 f_{RR}-2\alpha_2 f_R\big]f_{RR} \\
&\qquad +\gamma\big[f_R\frac{\partial\alpha_2}{\partial R}+\big(2\alpha_2+C\frac{\partial\alpha_1}{\partial A}+2A\frac{\partial\alpha_2}{\partial A}+C\frac{\partial\alpha_3}{\partial R}\big)f_{RR}+C\alpha_3 f_{RRR}\big] = 0 \\
&6)\quad 2A\big[\big(2-CR\big)\alpha_3 f_{RR}+\big(f-Rf_R\big)\alpha_2\big]f_{RR}+\gamma\big[\big(\frac{\partial\alpha_1}{\partial R}+\frac{A}{C}\frac{\partial\alpha_2}{\partial R}\big)f_R \\
&\qquad +\big(2\alpha_1+C\frac{\partial\alpha_1}{\partial C}+2A\frac{\partial\alpha_2}{\partial C}+2A\frac{\partial\alpha_3}{\partial R}\big)f_{RR}+2A\alpha_3 f_{RRR}\big] = 0
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Burada kısaltma amacıyla $\gamma = \big[Cf+(2-CR)f_R\big]$ olarak alınmıştır ve kanonik Lagrangian'daki 2 katsayısı denklemlere herhangi bir katkı yapmayacağı için alınmamıştır.

Böylece eğrilik skaleri R'ye bağlı olarak yazılan herhangi bir yerçekimi kuramı için ilgili f_R ve f_{RR} türevleri hesaplanarak 2.87 diferansiyel denklem sistemine yerleştirilir ve bu denklemler çözülerek ilgili yerçekimi kuramı için küresel simetride Noether vektörü bileşenleri hasaplanabilir.

2.3.2 Noether Yükü

Noether teoremine göre her sürekli simetriye karşılık bir korunum yasası olduğuna göre bir korunumlu nicelik olmalıdır. Bu korunumlu niceliğe Noether yükü denir. Noether vektörü ile Noether yükü arasında bir ilişki yazılabilir. Euler-Lagrange denklemi, Noether vektörü α^i ile çarpılırsa,

$$\alpha^i\Big(\frac{d}{dr}\frac{\partial L}{\partial q'^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\Big)=0 \tag{2.88}$$

olur ve çarpımın türevinden,

$$\begin{aligned}\alpha^i\frac{d}{dr}\frac{\partial L}{\partial q'^i} &= \frac{d}{dr}\Big(\alpha^i\frac{\partial L}{\partial q'^i}\Big)-\frac{d\alpha^i}{dr}\frac{\partial L}{\partial q'^i}\\ &= \frac{d}{dr}\Big(\alpha^i\frac{\partial L}{\partial q'^i}\Big)-\alpha'^i\frac{\partial L}{\partial q'^i}\end{aligned} \tag{2.89}$$

olarak bulunur. Bulunan eşitlik kullanılırsa,

$$\frac{d}{dr}\Big(\alpha^i\frac{\partial L}{\partial q'^i}\Big)-\alpha'^i\frac{\partial L}{\partial q'^i}-\alpha^i\frac{\partial L}{\partial q^i}=0 \tag{2.90}$$

olarak hesaplanır. Daha önce bulunduğu gibi (2.80) vektör alanı boyunca noktasal Lagrangian'a Lie türevinin uygulanmasıyla bulunan,

$$L_{\mathbf{X}}L=\alpha^i\frac{\partial L}{\partial q^i}+\alpha'^i\frac{\partial L}{\partial q'^i} \tag{2.91}$$

eşitliği, (2.90) denklemine yerleştirerek,

$$\frac{d}{dr}\Big(\alpha^i\frac{\partial L}{\partial q'^i}\Big)=L_{\mathbf{X}}L \tag{2.92}$$

olarak bulunur. Noktasal Lagrangian'ın **X** vektör alanı boyunca Lie türevi sıfıra eşitlenirse şu sonuç bulunur:

$$\frac{d}{dr}\Big(\alpha^i\frac{\partial L}{\partial q'^i}\Big)=0 \tag{2.93}$$

Burada korunan nicelik yani hareket sabiti Σ_0 olarak gösterilir ve

$$\Sigma_0=\alpha^i\frac{\partial L}{\partial q'^i} \tag{2.94}$$

olur. Bu bulunan hareket sabiti Σ_0 Noether yükü olarak adlandırılır.

3 $f(R)$ Yerçekimi Kuramı Örnekleri

3.1 $f(R)$ Yerçekimi Kuramının Genel Görelilik Kuramına İndirgenmesi

Her yeni fizik kuramı, limit şartlarında kendinden önce kullanılan kuramı sağlamalıdır. $f(R)$ yerçekimi kuramı da limit şartlarda Einstein'in Genel Görelilik kuramına indirgenmelidir çünkü Genel Görelilik kuramı güneş sistemi gibi sistemlerde çok iyi çalışmaktadır. $f(R) = R$ olduğu durumda $f(R)$ yerçekimi kuramı, Einstein'in Genel Görelilik Kuramına indirgenir. $f(R)$ yerçekimi kuramı eylemi ise Einstein-Hilbert eylemine dönüşür.

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}R + \mathscr{L}_M\right) \tag{3.1}$$

Eylemin varyasyonu alınarak bulunan (2.44) alan denkleminde $f(R) = R$ ve $f_R = 1$ yerleştirilince Einstein alan denklemleri bulunur.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.2}$$

Einstein 1916 yılında Genel Görelilik kuramını yayınladığında evrenin genişlediğini bilmiyordu ve durağan bir evren fikrine sahipti. Einstein'a göre evrendeki maddelerin yerçekimi etkileriyle bir araya gelmemesi için itici bir kuvvet olması gerekiyordu. Einstein bu düşünceye dayanarak denklemlerine kozmolojik sabiti ekledi [63]. Fakat daha sonra Hubble tarafından yapılan gözlemler sonucu evrenin durağan olmadığı ve genişlediği anlaşıldı. Yıllar sonra Einstein kozmolojik sabit için hayatında yaptığı en büyük gaf olarak bahseder. Kozmolojik sabitin olduğu durumda $f(R) = R - 2\Lambda$ olur ve Einstein-Hilbert eylemi ise şu şekilde yazılır:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa}(R - 2\Lambda) + \mathscr{L}_M\right] \tag{3.3}$$

Buradan yine varyasyon alınarak kozmolojik sabitin olduğu Einstein alan denklemleri şu şekilde bulunur:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

(2.67) Lagrangian'de $f(R) = R$ ve $f_R = 1$ yerleştirilir ve küresel simetriyi temsil eden (2.50) metriği için Genel Görelilik kuramında noktasal Lagrangian şu şekilde bulunur:

$$\mathscr{L}_{GR} = \frac{A^{1/2}C'^2}{2CB^{1/2}} + \frac{A'C'}{A^{1/2}B^{1/2}} + 2A^{1/2}B^{1/2} \tag{3.5}$$

Bu Lagrangian'e uygulanan Euler-Lagrange denklemi, Schwarzchild metriği için Genel Göreliliğin standart denklemlerini sağlar. (3.5) Lagrangian'de B' bağımlılığı yoktur. Hessian determinant hesaplanırsa sonuç sıfır olur. Bu yüzden B çevrimsel koordinattır. B için Euler-Lagrange denklemi,

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{GR}}{\partial B} = 0 \tag{3.6}$$

olur ve buradan B hesaplanabilir. Hesap kolaylığı açısından şu kısaltmalar tanımlanır:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{A^{1/2}C'^2}{2C} + \frac{A'C'}{A^{1/2}} \\ \beta &= 2A^{1/2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Bunlarla beraber noktasal Lagrangian ve türevinden B,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{GR} &= \frac{\alpha}{B^{1/2}} + \beta B^{1/2} \\ \frac{\partial \mathscr{L}_{GR}}{\partial B} &= -\frac{\alpha}{2B^{3/2}} + \frac{\beta}{2B^{1/2}} = 0 \\ B &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned} \tag{3.8}$$

olur ve kısaltamalar yerine koyulduğunda,

$$B = \frac{C'^2}{4C} + \frac{A'C'}{2A} \tag{3.9}$$

olarak bulunur. Bulunan sonuç (3.5) denkleminde yerine koyulur. Kanonik Lagrangian $L_{GR} = \mathscr{L}_{GR}^2$ olduğundan kısaltmalar yerine koyulunca,

$$L_{GR} = 2A'C' + \frac{AC'^2}{C} \tag{3.10}$$

olarak bulunur. Bu Lagrangian için hesaplanan Hessian matris elemanları şunlardır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L_{GR}}{\partial A' \partial C'} &= \frac{\partial^2 L_{GR}}{\partial C' \partial A'} = 2 \\ \frac{\partial^2 L_{GR}}{\partial C'^2} &= 2\frac{A}{C} \\ \frac{\partial^2 L_{GR}}{\partial A'^2} &= 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Buradan Genel Görelilik kuramı Hessian matrisi,

$$\frac{\partial^2 L_{GR}}{\partial q_i' \partial q_j'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{A}{C} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

olur ve bu Hessian matristen bulunan Hessian determinant şu şekilde hesaplanır:

$$det\Big(\frac{\partial^2 L_{GR}}{\partial q_i' \partial q_j'}\Big) = -1 \tag{3.13}$$

(3.10) kanonik Lagrangian'den Euler-Lagrange denklemi kullanılarak, A ve C için hareket denklemleri hesaplanır.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\Big(\frac{\partial L_{GR}}{\partial A'}\Big) - \frac{\partial L_{GR}}{\partial A} = 0 \\ \frac{d}{dr}\Big(\frac{\partial L_{GR}}{\partial C'}\Big) - \frac{\partial L_{GR}}{\partial C} = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

A için Euler-Lagrange denklemden,

$$C'' - \frac{C'^2}{2C} = 0 \tag{3.15}$$

diferansiyel denklemi ve C için Euler-Lagrange denkleminden,

$$A'' + \frac{AC''}{C} + \frac{A'C'}{C} - \frac{AC'^2}{2C^2} = 0 \tag{3.16}$$

diferansiyel denklemi bulunur. Bu diferansiyel denklemler çözlülerek A ve C için hareket denklemleri bulunabilir.

(3.15) denkleminin çözümü:

$$\begin{aligned} \frac{C''}{C'} &= \frac{C'}{2C} \\ \int \frac{dC'}{C'} &= \frac{1}{2}\int \frac{dC}{C} \quad \longrightarrow \quad \ln C' = \frac{1}{2}\ln C + \ln k \\ C' &= k\sqrt{C} \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dC}{\sqrt{C}} = \int k dr \\ \sqrt{C} &= kr + d \quad \longrightarrow \quad C = k_2(r+k_1)^2 \end{aligned} \tag{3.17}$$

(3.15) ve (3.16) denklemleri birleştirilirse,

$$A'' + A'\frac{C'}{C} = 0 \tag{3.18}$$

bulunur ve bu denklemin çözümü,

$$\begin{aligned} \frac{A''}{A'} &= -\frac{C'}{C} \\ \int \frac{dA'}{A'} &= -\int \frac{dC}{C} \quad \longrightarrow \quad \ln A' = -\ln C + \ln k \\ A' &= \frac{k}{C} \quad \longrightarrow \quad A = \int \frac{k}{C} dr = \int \frac{k}{k_2(r+k_1)^2} dr \\ A &= -\frac{k}{k_2(r+k_1)} + d \quad \longrightarrow \quad A = k_4 - \frac{k_3}{r+k_1} \end{aligned} \tag{3.19}$$

olarak bulunur. (3.17) ve (3.19) denklemleri birleştirilerek B bulunabilir. Burada k,d,k_1,k_2,k_3 ve k_4 integral sabitleridir. Buradan boşluk için Genel Görelilik çözümleri,

$$A = k_4 - \frac{k_3}{r+k_1} \qquad B = \frac{k_2 k_4}{A} \qquad C = k_2(r+k_1)^2 \tag{3.20}$$

olur. $k_1 = 0$, $k_2 = k_4 = 1$ ve $k_3 = \frac{2GM}{c^2}$ olduğu durum için,

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{2GM}{rc^2}\Big)dt^2 + \frac{1}{\Big(1 - \frac{2GM}{rc^2}\Big)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3.21}$$

standart Schwarzchild metriği bulunur. Karl Schwarzchild 1917 tarihinde noktasal bir M kütlesi için uzay-zamanı temsil eden 3.21 metriğini kullanarak Einstein alan denklemlerini hesapladı [3].

Genel Görelilik kuramı için Noether vektörü bileşenleri bulunabilir. Noether vektör bileşenleri $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ için $q_1 = A$ ve $q_2 = C$ olarak seçilir ve buradan (2.86) denklemi,

$$\alpha_1 \frac{\partial L_{,\mu\nu}}{\partial A} + \alpha_2 \frac{\partial L_{,\mu\nu}}{\partial C} + 2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_\mu} L_{,A\nu} + 2\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_\mu} L_{,C\nu} = 0 \tag{3.22}$$

olur. Bu denklemleri bulmak için (3.12) Hessian matrisi kullanılır.
μ ve ν'ye A ve C değerleri verilince, sıfırdan farklı denklemler,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha_2}{\partial A} = 0\\
&\frac{\partial \alpha_1}{\partial A} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial C} = 0\\
&\frac{\alpha_1}{C} - \frac{\alpha_2 A}{C^2} + 2\frac{\partial \alpha_1}{\partial C} + 2\frac{\partial \alpha_2}{\partial C}\frac{A}{C} = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

olarak bulunur. Bu denklemler çözülüp, k integrasyon sabiti olmak üzere, $\alpha_1 = -kA$ ve $\alpha_2 = kC$ olarak bulunmuştur [55]. Genel görelilik kuramı için hareket sabiti yani 2.94 Noether yükü ise (3.10) Lagrangian'den hareketle,

$$\begin{aligned}
&\Sigma_0 = \alpha^i \frac{\partial L_{GR}}{\partial q'^i} = \alpha_1 \frac{\partial L_{GR}}{\partial A'} + \alpha_2 \frac{\partial L_{GR}}{\partial C'}\\
&\frac{\partial L_{GR}}{\partial A'} = 2C', \qquad \frac{\partial L_{GR}}{\partial C'} = 2A' + \frac{2AC'}{C}\\
&\Sigma_0 = 2kCA'
\end{aligned} \tag{3.24}$$

olarak bulunur. (3.21) Schwarzchild çözümü için hareket sabiti $\Sigma_0 = \frac{kGM}{c^2}$ olur.

3.2 $f(R) = R^b$ Genel Durumu

$f(R) = R^b$ genel durumunda, $f_R = bR^{b-1}$, $f_{RR} = b(b-1)R^{b-2}$ olacağından, (2.73) B denklemi şu şekilde yazılır:

$$B = \frac{b\left[ARC'^2 + 2CRC'A' + 2(b-1)C^2A'R' + 4(b-1)ACR'C'\right]}{2ACR\left[2b-(b-1)CR\right]} \tag{3.25}$$

Bu durumda (2.75) kanonik Lagrangian,

$$L = \frac{2bR^{2b-3}\left[2b-(b-1)CR\right]}{C}\left[ARC'^2 + 2CRC'A' + 2(b-1)C^2A'R' + 4(b-1)ACC'R'\right] \tag{3.26}$$

olarak bulunur. Bulunan kanonik Lagrangian'dan Hessian matris elemanları hesaplanabilir. Hessian matris $\frac{\partial^2 L}{\partial q'_\mu \partial q'_\nu}$ tanımından hareketle bulunur.
$\gamma_b = bR^{2b-3}\left[2b-(b-1)CR\right]$ olarak tanımlanırsa, Hessian matris elemanları,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial A'\partial C'} &= \frac{\partial^2 L}{\partial C'\partial A'} = 2R\gamma_b \\
\frac{\partial^2 L}{\partial A'\partial R'} &= \frac{\partial^2 L}{\partial R'\partial A'} = 2(b-1)C\gamma_b \\
\frac{\partial^2 L}{\partial R'\partial C'} &= \frac{\partial^2 L}{\partial C'\partial R'} = 4(b-1)A\gamma_b \\
\frac{\partial^2 L}{\partial C'^2} &= 2\frac{AR}{C}\gamma_b \\
\frac{\partial^2 L}{\partial A'^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 L}{\partial R'^2} &= 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

olarak hesaplanır. Bulunan sonuçlar simetriden dolayı ikiye bölünür. Bulunanlar yerine yazılınca Hessian matris şu şekilde yazılır:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q'_\mu \partial q'_\nu} = \gamma_b \begin{pmatrix} 0 & R & (b-1)C \\ R & \frac{AR}{C} & 2(b-1)A \\ (b-1)C & 2(b-1)A & 0 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

Bu Hessian matris ile belirlenen (2.86) diferansiyel denklemleri şunlardır:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \frac{\partial\alpha_2}{\partial A}+\frac{C(b-1)}{R}\frac{\partial\alpha_3}{\partial A}=0 \qquad (3.29)\\
&2)\quad \frac{A}{C}\Big[(2-CR)\frac{\alpha_3(b-1)}{R}-\frac{2\alpha_2}{C}\Big]b^2R^{2b-3}\\
&\qquad +\gamma_b\Big[\big(\frac{\alpha_1}{C}+2\frac{\partial\alpha_1}{\partial C}+2\frac{\partial\alpha_2}{\partial C}\frac{A}{C}\big)+\frac{A(b-1)}{R}\big(\frac{\alpha_3}{C}+4\frac{\partial\alpha_3}{\partial C}\big)\Big]=0\\
&3)\quad C\frac{\partial\alpha_1}{\partial R}+2A\frac{\partial\alpha_2}{\partial R}=0\\
&4)\quad \alpha_2 b(1-b)R^{2b}+\alpha_3\big(2-CR\big)b^2(b-1)R^{2b-2}+\gamma_b\Big[R^2\big(\frac{\partial\alpha_2}{\partial C}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial A}+\frac{A}{C}\frac{\partial\alpha_2}{\partial A}\big)\\
&\qquad +\big(\alpha_3+C\frac{\partial\alpha_3}{\partial C}+2A\frac{\partial\alpha_3}{\partial A}\big)(b-1)R\Big]=0\\
&5)\quad \Big[C\alpha_3(b-1)\big(2-CR\big)-2\alpha_2R\Big]b^2(b-1)R^{2b-3}+\gamma_b\Big[R^2\frac{\partial\alpha_2}{\partial R}\\
&\qquad +R(b-1)\big(2\alpha_2+C\frac{\partial\alpha_1}{\partial A}+2A\frac{\partial\alpha_2}{\partial A}+C\frac{\partial\alpha_3}{\partial R}\big)+C\alpha_3(b-1)(b-2)\Big]=0\\
&6)\quad 2A\Big[\big(2-CR\big)b\alpha_3-R^2\alpha_2\Big]b(b-1)^2R^{2b-3}+\gamma_b\Big[R^2\big(\frac{\partial\alpha_1}{\partial R}+\frac{A}{C}\frac{\partial\alpha_2}{\partial R}\big)\\
&\qquad +R(b-1)\big(2\alpha_1+C\frac{\partial\alpha_1}{\partial C}+2A\frac{\partial\alpha_2}{\partial C}+2A\frac{\partial\alpha_3}{\partial R}\big)+2A(b-1)(b-2)\alpha_3\Big]=0
\end{aligned}
$$

Bu diferansiyel denklemler, metrik işaretinin $(+,-,-,-)$ olarak alındığı metrik için çözülmüştür [55]. Çözülen denklemlerden Noether vektör bileşenleri,

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= (3-2b)kA\\
\alpha_2 &= -kC\\
\alpha_3 &= kR
\end{aligned}
\qquad (3.30)
$$

olarak bulunmuştur. Bulunan bu Noether vektörü bileşenlerinin, metrik işaretinin $(-,+,+,+)$ olarak seçilerek bulunan 3.29 denklemlerini de sağladığı görülmüştür. Σ_0 hareket sabiti R^b durumu için,

$$\Sigma_0=\alpha^i\frac{\partial L}{\partial q'^i}=\alpha_1\frac{\partial L}{\partial A'}+\alpha_2\frac{\partial L}{\partial C'}+\alpha_3\frac{\partial L}{\partial R} \qquad (3.31)$$

olur. Bu denklemde ilgili türevler hesaplanırsa,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial A'} &= \frac{2bR^{2b-3}\big[2b-(b-1)CR\big]}{C}\big[2(b-1)C^2R'+2CRC'\big]\\
\frac{\partial L}{\partial C'} &= \frac{2bR^{2b-3}\big[2b-(b-1)CR\big]}{C}\big[2CRA'+4(b-1)ACR'+2ARC'^2\big]\\
\frac{\partial L}{\partial R} &= \frac{2bR^{2b-3}\big[2b-(b-1)CR\big]}{C}\big[2(b-1)C^2A'+4(b-1)ACC'\big]
\end{aligned}
\qquad (3.32)
$$

olarak bulunur ve bulunan (3.30) Noether vektörü bileşenleri yerine koyularak hareket sabiti şu şekilde hesaplanmıştır [55]:

$$\Sigma_0 = 4kCbR^{2b-3}\left[2b-(b-1)CR\right]\left[(b-2)RA'-(2b^2-3b+1)AR'\right] \tag{3.33}$$

4 $f(R)$ Yerçekimi Kuramı ve MOND

4.1 Modifiye Edilmiş Newton Dinamiği (MOND)

1970'li yıllarda spiral gökadaların dış bölgelerindeki yıldızların dönme eğrilerinde hesaplanan değerlerle uyuşmayan bazı gariplikler olduğu gözlemlenmişti [14]. Hesaplanan değerlere göre gökadanın merkezinden uzaklaştıkça dönme hızlarının artması ve çekim etkilerinin azalmasıyla beraber bir noktadan sonra hızların da azalması gerekir fakat yapılan gözlemlere göre spiral gökada içerisindeki yıldızların hızları, merkezden uzaklaştıkça azalma göstermiyor ve sabit bir şekilde devam ediyor. Gökadaların dönme eğrilerindeki bu beklemedik farklılığı açıklamak için iki farklı düşünce vardır. Bunlardan ilki bilinen maddeyle etkileşmeyen baryonik olmayan maddenin (karanlık maddenin) varlığıdır. Buna göre gökada içerisinde yerçekimsel etkisi olan fakat elektromanyetik etkileşimde bulunmayan bir madde bu dönme eğrilerindeki farkı yaratır. Diğer düşünce ise Einstein'in Genel Görelilik kuramının bazı durumlarda yetersiz kalmasına dayanır ve çekim yasalarının modifiye edilmesiyle dönme eğrilerindeki fark açıklanabilir.

Gökadalardaki yıldızların dönüş hızlarındaki beklenmeyen gözlem sonucunu açıklamak amacıyla 1983 yılında Mordehai Milgrom, Modifiye Edilmiş Newton Dinamiği olan MOND kuramını ortaya attı [64] [65]. Bu kurama göre Newton yasaları çok küçük ivmelerde değiştirilirse, gözlemlenen sonuçlara ulaşılabiliyor. Milgrom, Newton'un 2.yasasına şu şekilde bir düzeltme getiriyor:

$$F = \mu m a \tag{4.1}$$

Burada m kütle, a ivme ve $\mu = \mu(\frac{a}{a_0})$ ise ivme ve a_0 Milgrom ivmesi olarak adlandırılan yeni bir temel sabitin fonksiyonu olan boyutsuz bir fonksiyondur. Gökadaların iç bölgelerinde yüksek ivmeli hareket ve dış bölglerinde düşük ivmeli hareket olduğu göz önüne alınırsa bu fonksiyon:

Yüksek ivmeli durumda, $\mu = 1 \longrightarrow F = ma$

Düşük ivmeli durumda, $\mu = \frac{a}{a_0} \longrightarrow F = m\frac{a^2}{a_0}$

olur. Görüldüğü gibi yüksek ivmeli durumda MOND kuramı Newton'nun 2.yasısına indirgenir. Düşük ivmeli hareket durumunu evrensel çekim kanununa eşitlersek,

$$F = G\frac{mM}{r^2} = m\frac{a^2}{a_0} \tag{4.2}$$

olur ve merkezcil ivme $a = \frac{V^2}{r}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} G\frac{mM}{r^2} &= m\frac{V^4}{r^2 a_0} \\ V^4 &= GMa_0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

olarak hesaplanır ve böylece uzaklık r'den bağımsız hız elde edilir. Sabit olan M kütlesi için hız, gözlemlerle uyumlu şekilde sabittir. Milgrom, a_0 ivmesini gözlemlere dayanarak $a_0 = 1.2 \times 10^{-10} ms^{-2}$ olarak hesaplamıştır [66] . Bulunan hız denklemi, kütle ve dönme hızı arasındaki ampirik bir ilişki olan Tully-Fisher ilişkisi ile uyumludur [67]. Tüm bunlara rağmen MOND kuramı relativistik bir kuram değildir ve büyük patlama kuramı ve erken evren, yerçekimsel mercekleme, kırmızıya kayma gibi kozmolojik olaylara açıklama getirememiştir. Bunlara açıklama getirmek amacıyla MOND'un genişletilmiş kuramları üzerine çalışmalar devam etmektedir. Bunlardan biri de Bekenstein tarafından 2004 tarihinde geliştirilen Tensor-Vektör-Skaler (TeVeS) yerçekimi kuramıdır [32].

4.2 MOND ve Newton Dinamiği Karşılaştırması

Newton'un yerçekimi kuramı, Einstein'in Genel Görelilik Kuramı'nın zayıf alan limiti olduğu gibi MOND kuramı da ilgili relativistik yerçekimi kuramının zayıf alan limiti olduğu düşünülebilir. Hangi durumlarda Newton dinamiği, hangi durumlarda MOND etkili olduğunu belirlemek için şu tanımlama yapılır:

$$r_M = \left(\frac{GM}{a_0}\right)^{1/2} \tag{4.4}$$

Burada r_M, MOND yarıçapı denilen ve MOND etkilerinin devreye girdiği durumu anlatmak için tanımlanan karakteristik uzunluktur. Bu karakteristik uzunluk yeni yerçekimsel yarıçaptır [68]. a_0 ivmesi ise MOND kuramının temeli olan Milgrom ivmesidir. Milgrom ivmesi, ışık hızı ve Hubble sabiti ile $a_0 \approx cH_0$ şeklinde orantılıdır [69]. a_0 Mond ivmesinin önemi Modifiye Newton dinamiği ile Newton dinamiği arasındaki sınırı vermesidir. Mond ivmesi ışık hızı veya Planck sabiti gibi iki rejim arasında bir belirleyici faktör olarak düşünülebilir. a_0'dan büyük ivmeli hareket yapan cisimler için Newton dinamiği, küçük ivmelerde hareket yapan cisimler için ise Modifiye Newton dinamiği kullanılır [70].

MOND kuramına göre merkezdeki bir M kütlesi, radyal koordinat r olmak üzere, Relativistik etkilerin olmadığı durumda:

$r_M \gg r$ durumunda Newton Dinamiği,

$r_M \ll r$ durumunda Modifiye Newton Dinamiği etkisi altındadır [71].
Relativistik etkilerin olduğu durumda:

$r_M \gg r$ durumunda standart Genel Görelilik,

$r_M \ll r$ durumunda MOND'un relativistik versiyonunun etkisi altında olduğu düşünülür.
Görüldüğü gibi r_M uzunluğu ile r radyal koordinat arasındaki ilişki, gökadanın dış kısımlarındaki düşük ivmeli hareket durumunda MOND etkilerinin devreye girdiğini gösterir.

4.3 Relativistik Olmayan Durum

Relativistik olmayan durumda parçacıklar ışık hızına göre çok düşük hızlarla hareket ederler. Yerçekimi alanı zayıftır ve durağandır yani zamanla değişmez. Zayıf alan durumunda metrik, Minkowski metriği ile küçük bir pertürbasyonun toplamı olarak yazılabilir.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{4.5}$$

Relativistik olmayan bir durum için ϕ potansiyelindeki m kütleli bir parçaçığın Lagrangian'ı ve eylemi,

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\phi$$
$$S = -mc\int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c}\right)dt \tag{4.6}$$

olarak yazılır [72]. Tanım olarak $S = -mc\int ds$ olduğundan $ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c}\right)dt$ olur. $1/c^2$ terimi ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(c^2 - v^2 + 2\phi\right)dt^2 \\ &= \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c^2dt^2 - dX_i^2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

olur. Buradan metrik elemanı $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ olur.

4.4 $f(R)$ Yerçekimi Kuramı ve MOND Arasındaki İlişki

MOND'un relativistik kuramını inşa etmek amacıyla MOND ile $f(R)$ yerçekimi kuramı arasında ilişki kurulabilir. Ricci skalerinin boyutu $[L]^{-2}$ olduğu için $f(R)$ fonksiyonunda Ricci skaleri yerine boyutsuz bir skaler şöyle seçilebilir :

$$\chi = L_M^2 R \tag{4.8}$$

Burada L_M Ricci skalerini boyutsuzlaştırmak için kullanılır ve boyutu $[L]$'dir. Boyut analizi yapılarak L_M bulunabilir. $r_S = \frac{2GM}{c^2}$ Schwarzschild yarıçapı olmak üzere L_M, karakteristik uzunluk r_M ve r_S 'nin fonksiyonudur. γ boyutsuz bir orantı sabiti olmak üzere,

$$L_M = \gamma r_S^{\alpha} r_M^{\beta} \tag{4.9}$$

olarak tanımlabilir. Denklemde boyutların tutması için $\alpha + \beta = 1$ olmalıdır. (2.44) alan denkleminde Ricci skaleri yerine boyutsuz skaler χ koyularak iz alındığında,

$$3L_M^2 \Box f_\chi(\chi) + \chi f_\chi(\chi) - 2f(\chi) = \kappa L_M^2 T \tag{4.10}$$

olarak bulunur. Burada $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$'dur. Merkezde noktasal bir M kütlesinin olduğu bir yerçekimi alanı alnırsa, sıfırdan farklı enerji-momentum tensorü bileşeni $T_{00} = \rho c^2$ olur ve $f(\chi) = \chi^b$ durumu için denklem şu şekilde bulunur [73]:

$$3bL_M^2 \Box \chi^{b-1} + \chi^b(b-2) = \kappa L_M^2 \rho c^2 \tag{4.11}$$

Bu denklemde boyut analizi yardımıyla, $\Box \approx -\frac{1}{r^2}$ ve $\rho \approx \frac{M}{r^3}$ yaklaşıklıkları yapılırsa denklem şu hale gelir :

$$-3bL_M^2\frac{\chi^{b-1}}{r^2}+\chi^b\big(b-2\big) \approx \frac{\kappa L_M^2 Mc^2}{r^3} \tag{4.12}$$

Bu denklemde ilk terim ikinci terime göre çok büyük olduğu için ikinci terim göz ardı edilebilir [73]. $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ yerine yazılırsa denklem,

$$\chi^{b-1} \approx -\frac{8\pi GM}{3bc^2 r} \tag{4.13}$$

olur. Einstein alan denklemleri metrik ile çarpılıp daraltılırsa,

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T \tag{4.14}$$

olur ve $T = \rho c^2$ yerine koyulur. ϕ yerçekimi alanı ve a ivme olmak üzere Laplace denklemi $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ kullanılırsa,

$$R = -\frac{2}{c^2}\nabla^2\phi = \frac{2}{c^2}\nabla.a \tag{4.15}$$

olur. Burada $\nabla \approx \frac{1}{r}$ boyutsal yaklaşıklığı kullanılırsa $\chi \approx \frac{2aL_M^2}{c^2 r}$ olarak bulunur.

$$\Big(\frac{2aL_M^2}{c^2r}\Big)^{b-1} \approx -\frac{8\pi GM}{3bc^2r} \tag{4.16}$$

Bulunan bu denklemden a ivmesi yaklaşıklık hesabıyla şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} a &\approx -\frac{c^2r}{2L_M^2}\Big(\frac{8\pi GM}{3bc^2r}\Big)^{\frac{1}{b-1}} \\ &\approx -c^{\frac{(2b-4)}{(b-1)}}\,r^{\frac{(b-2)}{(b-1)}}L_M^{-2}\Big(GM\Big)^{\frac{1}{(b-1)}} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Bulunan denklemde b'yi belirlemek için boyut analizi yapılmalıdır. Boyut analizi yapılırsa,

$$\big[L\big]\big[T\big]^{-2} = \big[L/T\big]^{\frac{(2b-4)}{(b-1)}}\big[L\big]^{\frac{(b-2)}{(b-1)}}\big[L\big]^{-2}\big[L\big]^{\frac{3}{b-1}}\big[T\big]^{\frac{-2}{(b-1)}} \tag{4.18}$$

olacağından boyutların tutması için $b = 3/2$ olmalıdır. Bulunan sonuç yerine yerleştirilince, $L_M^2 = r_S r_M/2$ olarak seçilirse ve r_S ile r_M yerine koyulursa,

$$a \approx -\frac{\sqrt{a_0 GM}}{r} \tag{4.19}$$

olarak bulunur. Bu sonuç küresel simetride MOND kuramının tahmin ettiği yerçekimsel ivme ile uyumludur [70]. Buradan $f(R)$ yerçekimi kuramının, boyutusuz olarak seçilen $f(\chi) = \chi^{3/2}$ durumunda relativistik olmayan şartlarda Modifiye Newton Dinamiği kuramına indirgendiği sonucu çıkarılabilir. Relativistik olmayan durum için hesaplanan metrikten yararlanarak küresel simetrik uzay-zaman için metrik elemanları,

$$\begin{aligned} g_{tt} &= 1 + \frac{2\phi}{c^2} \qquad & g_{rr} &= -1 \\ g_{\theta\theta} &= -r^2 \qquad & g_{\varphi\varphi} &= -r^2 sin^2\theta \end{aligned} \tag{4.20}$$

olur. Bu durumda $A = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$, $C = r^2$ olur. Ayrıca Newton potansiyeli $\phi = -\frac{GM}{r}$'dir. Boyutsuz olan $f(\chi)$ için (2.67) Lagrangian'ı,

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = \quad & \frac{L_M^2}{\sqrt{AB}}\Big[\frac{AC'^2 f_\chi}{2C} + A'C' f_\chi + CA'\chi' f_{\chi\chi} + 2AC'\chi' f_{\chi\chi}\Big] \\ & + \sqrt{AB}\big[Cf + (2L_M^2 - C\chi) f_\chi\big] \end{aligned} \tag{4.21}$$

olarak bulunur. Metrik işaretinin $(+,-,-,-)$ olarak seçildiği durum için, boyutsuz seçilen χ^b durumunda Noether vektörü bileşenleri $B = 1$ alındığıda $\alpha = (2(1-b)kA, 0, k\chi)$ olarak ve hareket sabiti,

$$\Sigma_0 = L_M^2 b(b-1)kA^{-1/2}C\chi^{b-2}\big[2(b-1)A\chi' - A'\chi\big] \tag{4.22}$$

olarak bulunmuştur [73]. $L_M^2 = r_s r_M$ olduğundan dolayı hareket sabitinin 2 farklı yerçekimsel yarıçapla orantılı olduğu görülür.

5 Weyl Yerçekimi Kuramı

Einstein, Genel Görelilik kuramını ortaya attıktan sonra 1918 yılında Hermann Weyl elektromanyetizma ile yerçekimi kuramını birleştirip daha genel bir kuram oluşturmak için Riemann geometrisine sahip olmayan farklı bir geometrik model kurdu [19]. Riemann geometrisinde bir vektörün paralel taşınması sonucunda vektörün yönü değişebilir ama boyu aynı kalır. Weyl geometrisinde ise paralel taşıma altında bir vektörün yönünün yanı sıra boyu da değişebilir. Weyl yerçekimi kuramının Newton limiti mevcut değildir [22] [74]. Weyl kuramına göre bağlantı şu şekilde yazılır:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} + g^{\sigma\alpha} \left[g_{\sigma\beta}\phi_{\gamma} + g_{\sigma\gamma}\phi_{\beta} - g_{\beta\gamma}\phi_{\sigma} \right] \tag{5.1}$$

Burada $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ bağlantısı simetrik değildir yani daha önce kullanılan Christoffel sembolü değildir. $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$ sembolü ise Christoffel sembolüdür. ϕ_{β} ise kovaryant vektör alanıdır. $\phi_{\beta} = 0$ seçilirse Weyl geometrisi, Riemann geometsine indirgenir [75]. Weyl geometrisinde dönüşümler altında vektörlerin boyu da değişebilir fakat vektörler arasındaki açı değişmez. Bu sonuç Weyl geometrisinin konformal olduğunu gösterir. Bundan sonraki bölümlerde Weyl geometrisinde dönüşümler sonucunda uzunlukların degişimine yol açan ϕ_{β} terimi yok sayılıp, geometri Lorentzyen olarak alınacaktır. Weyl yerçekimi kuramı birçok astrofiziksel ve kozmolojik çalışmada kullanılmıştır [76] [77] [37]

5.1 Konformal Dönüşümler

Konformal dönüşümler vektörlerin arasındaki açıların korunduğu dönüşümlerdir. Einstein yerçekimi ile diğer yerçekimi kuramları arasındaki ilişkileri belirlemek için konformal dönüşümler kullanılır. M, n boyutlu manifold ve $g_{\mu\nu}$ M manifoldu üzerinde tanımlı Lorentz metriği olmak üzere $(M, g_{\mu\nu})$ uzay-zamanında konformal bir dönüşüm,

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x) \tag{5.2}$$

olarak tanımlanır [78]. Bu denklemle beraber metrikler arasında bir ilişki kurulmuş olur. $0 < \Omega < \infty$ aralığında olmak üzere $\Omega(x)$ konformal faktör olarak adlandırılır. Aynı şekilde metriğin tersi için konformal dönüşüm,

$$g'^{\mu\nu}(x) = \Omega^{-2}(x) g^{\mu\nu}(x) \tag{5.3}$$

olarak yazılır.

5.2 Weyl Tensörü

Riemann eğrilik tensörünün antisimetrik bölümü olan ve izi sıfır olan tensör Weyl tensörüdür. 4 boyutta Riemann eğrilik tensörünün 20 birbirinden bağımsız değişkeni vardır. Bunlardan 10 bağımsız değişken Riemann eğrilik tensörünün izi olan kısımdadır. Geriye kalan 10 bağımsız değişken ise izsiz kısmı olan Weyl tensöründe yer alır. n boyutta Weyl tensörü,

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{(n-2)}\left(g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}\right) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma} \tag{5.4}$$

olarak verilir [79]. Weyl tensörü antisimetrik ve izsiz olduğu için yine antismetrik ve izsiz olan ve elektrik alan ile manyetik alan kısımları içeren Maxwell tensörüyle bir bağlantı kurulabilir. Weyl tensörünün özellikleri Riemann tensörü özelliklerine benzerdir. Weyl tensörünün simetriden gelen özellikleri şunlardır:

$$\begin{aligned} C_{\rho\sigma\mu\nu} &= C_{[\rho\sigma][\mu\nu]}, \\ C_{\rho\sigma\mu\nu} &= C_{\mu\nu\rho\sigma} \\ C_{\rho[\sigma\mu\nu]} &= 0 \\ C^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Weyl tensörünün en önemli özelliği konformal dönüşümler altında değişmez kalmasıdır. Bu yüzden Weyl tensörüne konformal eğrilik tensörü de denilir.

$$g'_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g^{\mu\nu}(x) \quad \longrightarrow \quad C'^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} = C^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} \tag{5.6}$$

5.3 Weyl Yerçekimi Alan Denklemleri

Weyl yerçekimi kuramında eylem, Weyl tensörünün karesi kullanılarak şu şekilde yazılır [20] [21]:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\beta C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} + \mathscr{L}_M\right] \tag{5.7}$$

Burada β boyutsuz parametredir. Weyl kare terimi, Weyl tensörünün tanımından hareketle açıkça yazılırsa,

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2 \tag{5.8}$$

olarak bulunur. Riemann kare terimi, topolojik değişmez olduğu için alan denklemlerine katkı yapmayan Gauss-Bonnet terimi kullanılarak yok edilebilir [35].
Gauss-Bonnet terimi

$$G = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2 \tag{5.9}$$

olarak yazılır. Weyl kare teriminin alan denklemlerine katkı yapacak bölümü,

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} = 2\big(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2\big) \tag{5.10}$$

olarak bulunur. Buradan Weyl yerçekimi kuramı eylemi,

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[2\beta\big(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2\big) + \mathscr{L}_M\Big] \tag{5.11}$$

olarak bulunur. Weyl yerçekimi kuramı için alan denklemleri varyasyon ilkesiyle bulunur. Weyl eyleminin varyasyonu alındığında:

$$\begin{aligned}\delta S = \int d^4x\Bigg[&\delta\sqrt{-g}\Big[2\beta\big(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2\big)\Big] + \delta\Big(\sqrt{-g}\mathscr{L}_M\Big) \\ &+\sqrt{-g}\Big[2\beta\big(\delta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta R^{\mu\nu} - \frac{2}{3}R\delta R\big)\Big]\Bigg]\end{aligned} \tag{5.12}$$

Varyasyon alınarak yapılan detaylı hesaplar Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramı alan denklemleri hesaplanmasında yapılmıştır.

$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ teriminin varyasyonundan gelen katkıya $K_{\mu\nu}$ denilirse,

$$K_{\mu\nu} = \Box(R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) - \nabla_\lambda\nabla_\mu R^\lambda{}_\nu - \nabla_\lambda\nabla_\nu R^\lambda{}_\mu + 2R_{\mu\lambda}R^\lambda{}_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} \tag{5.13}$$

olarak hesaplanır. R^2 teriminin varyasyonundan gelen katkıya $H_{\mu\nu}$ denilirse,

$$H_{\mu\nu} = 2R(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R) + 2(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)R \tag{5.14}$$

olarak hesaplanır. Madde eyleminin varyasyonundan gelen katkı Enerji-Momentum tensörünü verir.

$$\delta\Big(\sqrt{-g}\mathscr{L}_M\Big) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{5.15}$$

Buradan Weyl yerçekimi kuramı alan denklemleri,

$$2\beta\left(K_{\mu\nu} - \frac{1}{3}H_{\mu\nu}\right) = T_{\mu\nu} \tag{5.16}$$

olur. Alan denklemlerindeki geometrik kısım, izi sıfır olan ve 4 boyutta konformal değişmez olan Bach tensörüdür [80],

$$B_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} - \frac{1}{3}H_{\mu\nu} \tag{5.17}$$

Bunun neticesinde 5.16 ifadesi şu şekilde yazılır:

$$2\beta B_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tag{5.18}$$

Weyl yerçekimi kuramı alan denklemlerinin, metriğin tersi ile çarpılıp izi alındığında sonuç sıfırdır çünkü Bach tensörü izsiz bir tensördür.

6 Einstein-Weyl-Eddington Yerçekimi Kuramı

Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramı gökadaların dönme eğrilerindeki sorunları, karanlık maddeye ihtiyaç duyulmadan uzay-zamanın geometrisi açıklar. Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramına göre gökadaların iç bölgelerinde Einstein-Hilbert terimi, dış bölgelerinde ise Weyl-Eddington terimi baskındır [37]. Gökadaların dış bölgelerindeki hızların sabitleşmesi, Weyl-Eddington teriminin etkisidir. Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramında eylem,

$$S = -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}(R-2\Lambda) - \alpha R^2 + \beta' C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma} + \mathscr{L}_M\right) \tag{6.1}$$

olarak yazılır. Burada $\mathscr{L}_M$ madde alanı için Lagrangian yoğunluğudur. $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ Einstein sabitidir. $\frac{1}{2\kappa}(R-2\Lambda)$ terimi, Λ kozmolojik sabit olmak üzere, Einstein yerçekimi kuramından, αR^2 terimi Eddington yerçekimi kuramından ve $\beta' C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma}$ terimi Weyl yerçekimi kuramından gelen katkıları gösterir. Bu terimlerin birbirlerine göre baskınlığı mesafeye bağlıdır. Eylemdeki terimlerin katsayıları olan $\frac{1}{2\kappa}$, α ve β' terimlerine bağlı olarak hangisinin baskın olduğu değişir. Einstein-Weyl kuramı için bu sabitlere göre baskın olma durumu daha önce çalışılmıştır [81] [82] [83]. Daha önce gösterildiği üzere Weyl tensörü, Gauss-Bonnet terimi kullanılarak şu şekilde ifade edilir:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} = 2(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2) \tag{6.2}$$

Bu açılımı da kullanarak Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramı eylemi,

$$S = -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}(R-2\Lambda) - (\alpha + \frac{2\beta'}{3})R^2 + 2\beta' R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \mathscr{L}_M\right) \tag{6.3}$$

haline gelir. 1977 yılında K.Stelle 4 boyutta bu şekilde kuadratik terimler içeren bir eylemin $\Lambda = 0$ durumunda renormalize edilebilir olduğunu göstermiştir [33]. Stelle'nin makalesi morötesi bölgeyi esas alır. Gökadaların dış bölgesinde ivmeler çok düşük olduğu için burası düşük enerji olan kızılötesi bölge olarak düşünülebilir. B. Holdom ve J.Ren'in makalesinde [36] kuantum renk dinamiği için yazılan kiral Lagrangian, kuadratik terimler içermektedir ayrıca renormalize edilebilir ve kızılötesi bölgede geçerlidir. Bu çalışmada B. Holdom ve J.Ren'in makalesi motivasyon olarak alınmıştır. Burada karışıklık olmaması amacıyla önemli bir ayrıntı vurgulanmalıdır. Literatürde Eddington yerçekimi kuramı eylemi, burada kullanılandan farklı olarak,

$$S = 2\kappa \int d^4x \sqrt{det(R_{\mu\nu})} \tag{6.4}$$

şeklinde yazılır [84] [85]. Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramındaki R^2 teriminin Eddington terimi olarak adlandırılmasının sebebi bu terimin Eddington tarafından kullanılmasıdır.

6.1 Einstein-Weyl-Eddington Yerçekimi Kuramında Alan Denklemlerinin Çıkarılışı

Varyasyon ilkesine dayanarak (6.3) eyleminin metriğin tersine göre varyasyonu alınarak sıfıra eşitlenir ve alan denklemleri bulunabilir.

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\delta \int d^4x \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}(R-2\Lambda) - \alpha R^2 - \frac{2\beta'}{3}R^2 + 2\beta' R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \mathscr{L}_M\right) = 0 \\
&= -\int d^4x \Bigg[\delta\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}(R-2\Lambda) - \alpha R^2 - \frac{2\beta'}{3}R^2 + 2\beta' R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right) \\
&\quad + \delta\left(\sqrt{-g}\mathscr{L}_M\right) + \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}\delta R - 2\alpha R\delta R\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{4\beta'}{3}R\delta R + 2\beta' R_{\mu\nu}\delta R^{\mu\nu} + 2\beta' R_{\mu\nu}\delta R^{\mu\nu}\right)\right]
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Burada daha önce bulunan metrik tensörün varyasyonu kullanılır.

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{6.6}$$

Eğrilik skalerinin varyasyonu $\delta R = \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ olarak denkleme eklenir. Madde eyleminin varyasyonundan gelen katkıdan Enerji-Momentum tensörü bulunur.

$$\delta S_M = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{6.7}$$

$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ terimi de toplam alındığından dolayı diğer indislerle karışmaması amacıyla $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$ olarak yazılabilir. Tüm bunlar (6.5) denklemine yerleştirilir ve denklem 2κ

ile çarpılır.

$$\begin{aligned}\delta S = \quad - & \int d^4x\sqrt{-g}\Bigg[\Big(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Lambda g_{\mu\nu}-\kappa T_{\mu\nu}\Big)\delta g^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ & -2\kappa\alpha\Big[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2\delta g^{\mu\nu}+2R\big(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\big)\Big] \\ & -\frac{4}{3}\kappa\beta'\Big[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2\delta g^{\mu\nu}+2R\big(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\big)\Big] \\ & +4\kappa\beta'\Big[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}\delta g^{\mu\nu}+\delta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+R_{\mu\nu}\delta R^{\mu\nu}\Big]\Bigg]=0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Amaç tüm terimleri $\delta g^{\mu\nu}$ parantezinde yazmaktır. Ricci tensörünün varyasyonunun metrik tensörün tersi ile çarpımı daha önce (2.42) $f(R)$ yerçekimi kuramı alan denklemleri hesaplamasında yapılan hesaplarda bulunmuştur.

$$\int d^4x\sqrt{-g}f_R(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\big(g_{\mu\nu}\Box-\nabla_\mu\nabla_\nu\big)f_R(R) \tag{6.9}$$

(6.8) denkleminde, ilk satırdaki $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ teriminde $f_R(R)=1$ olduğu için (6.9) integraline göre bu terimden katkı gelmez. 2. ve 3.satırdaki $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ teriminde $f_R(R)=2R$ olduğu için (6.9) integrali,

$$\int d^4x\sqrt{-g}2Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}2\big(g_{\mu\nu}\Box-\nabla_\mu\nabla_\nu\big)R \tag{6.10}$$

olarak bulunur. Böylelikle Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramı eyleminin varyasyonundaki R ve R^2 terimlerinin varyasyonları bulunmuş olur. Geriye Ricci tensörünün karesinin varyasyonu olan terimler kalır. Ricci tensörünün karesinin varyasyonu,

$$\begin{aligned}&\delta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+R_{\mu\nu}\delta R^{\mu\nu}=\delta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+R_{\mu\nu}\delta\Big(g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}R_{\lambda\sigma}\Big)\\ &=\delta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}R_{\lambda\sigma}+R_{\mu\nu}g^{\mu\lambda}\delta g^{\nu\sigma}R_{\lambda\sigma}+R_{\mu\nu}g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\delta R_{\lambda\sigma}\\ &=\delta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+R_{\mu\lambda}\delta g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}R_{\nu\sigma}+R_{\sigma\nu}g^{\sigma\lambda}\delta g^{\nu\mu}R_{\lambda\mu}+R_{\lambda\sigma}g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\delta R_{\mu\nu}\\ &=2\Big(\delta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+R_{\mu\lambda}R^{\lambda}_{\nu}\delta g^{\mu\nu}\Big)\end{aligned} \tag{6.11}$$

λ ve σ serbest indisler olduğu için bu şekilde yazılabilir. Burada Ricci tensörünün ve metrik tensörün simetrik olmalarından yararlanılmıştır. $\delta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ terimini hesaplamak için ise daha önce (2.23) bulunan Palatini özdeşliği kullanılmalıdır.

$$\delta R_{\mu\nu}=\nabla_\lambda\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}-\nabla_\nu\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} \tag{6.12}$$

Christoffel sembolünün varyasyonu daha önce şu şekilde bulunmuştur 2.24:

$$\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\beta}(\nabla_\mu\delta g_{\beta\nu}+\nabla_\nu\delta g_{\mu\beta}-\nabla_\beta\delta g_{\mu\nu}) \tag{6.13}$$

Bu eşitlik Palatini özdeşliğinde yerine koyulduğunda şu özdeşlik elde edilir:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\beta} \left[\nabla_\lambda \nabla_\mu \delta g_{\beta\nu} + \nabla_\lambda \nabla_\nu \delta g_{\mu\beta} - \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu} \right] \tag{6.14}$$

(6.8) eylem varyasyon denklemindeki $\delta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ terimi ayrı integral olarak yazılır ve Palatini özdeşliği bu integrale yerleştirilir.

$$\begin{aligned} & 2 \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \qquad (6.15) \\ = \quad & \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} g^{\lambda\beta} \left[\nabla_\lambda \nabla_\mu \delta g_{\nu\beta} + \nabla_\lambda \nabla_\nu \delta g_{\mu\beta} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\lambda\beta} - \nabla_\lambda \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu} \right] \\ = \quad & \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \left[\nabla^\beta \nabla_\mu \delta g_{\nu\beta} + \nabla^\beta \nabla_\nu \delta g_{\mu\beta} - g^{\lambda\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\lambda\beta} - \nabla^\beta \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$

Serbest indisler üzerinden toplam alındığı için indislerin yerleri değiştirilebilir. Tüm terimleri $\delta g_{\mu\nu}$ parantezine alacak şekilde yapılan değişimler şunlardır:

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} \nabla^\beta \nabla_\mu \delta g_{\beta\nu} &= R^{\alpha\nu} \nabla^\mu \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu} \\ R^{\mu\nu} \nabla^\beta \nabla_\nu \delta g_{\mu\beta} &= R^{\mu\alpha} \nabla^\nu \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu} \\ R^{\mu\nu} g^{\lambda\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\lambda\beta} &= R^{\alpha\gamma} g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\gamma \delta g_{\mu\nu} \\ R^{\mu\nu} \nabla^\beta \nabla_\beta \delta g_{\nu\beta} &= R^{\mu\nu} \Box \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Yapılan bu değişimler 6.15'de yerlerine koyulduğunda şu sonuç bulunur:

$$\begin{aligned} & 2 \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \qquad (6.17) \\ = \quad & \int d^4x \sqrt{-g} \left[R^{\alpha\nu} \nabla^\mu \nabla_\alpha + R^{\mu\alpha} \nabla^\nu \nabla_\alpha - R^{\alpha\gamma} g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\gamma - R^{\mu\nu} \Box \right] \delta g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Metrik tensörün kovaryant türevinin sıfır olduğu göz önüne alınarak $\delta g_{\mu\nu}$ üzerine uygulanan kovaryant türevler kısmi integrasyon kullanılarak Ricci tensörüne uygulanabilir. 2 defa kovaryant türev alındığı için 2 defa kısmi integrasyon yapılması gerekir. Yapılan her kısmi integrasyondan gelen yüzey terimleri alan denklemlerine katkı yapmayacağı için sıfır seçilir. Kısmi integrayon sonucu şu denklem bulunur:

$$\begin{aligned} & 2 \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \qquad (6.18) \\ = \quad & \int d^4x \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \left[\nabla_\alpha \nabla^\mu R^{\alpha\nu} + \nabla_\alpha \nabla^\nu R^{\mu\alpha} - g^{\mu\nu} \nabla_\gamma \nabla_\alpha R^{\alpha\gamma} - \Box R^{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$

Buradaki metrik varyasyonlarını metriğin tersinin varyasyonlarına dönüştürebiliriz. Kovaryant indislere sahip metrik varyasyonu, kontravaryant indislere sahip olacak şekilde yazılabilir.

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\sigma} g_{\nu\chi} \delta g^{\sigma\chi} \tag{6.19}$$

Bu indis değişimi (6.18) denklemine eklendiğinde sonuç şu şekildedir:

$$
\begin{aligned}
&2\int d^4x\sqrt{-g}R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\
= &\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\sigma\chi}\left[g_{\sigma\chi}\nabla_\gamma\nabla_\alpha R^{\gamma\alpha}+\Box R_{\sigma\chi}-\nabla_\alpha\nabla_\sigma R^\alpha_\chi-\nabla_\alpha\nabla_\chi R^\alpha_\sigma\right]
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

Bu integraldeki ilk terimde Contracted Bianchi özdeşliği $\nabla_\alpha R^\alpha_\beta=\frac{1}{2}\nabla_\beta R$ kullanılırsa bu terim şu şekilde yazılabilir [79]:

$$
\nabla_\gamma\nabla_\alpha R^{\gamma\alpha}=\nabla_\gamma\nabla_\alpha\left(g^{\gamma\beta}R^\alpha_\beta\right)=g^{\gamma\beta}\nabla_\gamma\nabla_\alpha R^\alpha_\beta=\nabla^\beta\left(\frac{1}{2}\nabla_\beta R\right)=\frac{1}{2}\Box R \tag{6.21}
$$

Ayrıca σ ve χ indisleri üzerinden toplam alındığı için bunlar yerine sırasıyla μ ve ν indisleri yazılabilir. Bununla beraber (6.20) integrali şu hale gelir:

$$
\begin{aligned}
&2\int d^4x\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right) \\
= &\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box R+\Box R_{\mu\nu}-\nabla_\lambda\nabla_\mu R^\lambda_\nu-\nabla_\lambda\nabla_\nu R^\lambda_\mu\right]
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

Tüm bulunanlar (6.8) eylem varyasyonu denklemine yerleştirilirse,

$$
\begin{aligned}
\delta S = \quad & -\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\Bigg[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Lambda g_{\mu\nu}-\kappa T_{\mu\nu} \qquad (6.23)\\
&-2\kappa\alpha\left[2R\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}\right)+2\left(g_{\mu\nu}\Box-\nabla_\mu\nabla_\nu\right)R\right]\\
&-\frac{4}{3}\kappa\beta'\left[2R\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}\right)+2\left(g_{\mu\nu}\Box-\nabla_\mu\nabla_\nu\right)R\right]\\
&+4\kappa\beta'\Bigg[\Box\left(R_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)-\nabla_\lambda\nabla_\mu R^\lambda_\nu-\nabla_\lambda\nabla_\nu R^\lambda_\mu\\
&+2R_{\mu\lambda}R^\lambda_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\Bigg]\Bigg]
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Parantez içindeki terim sıfıra eşittir. Bu denklemde R teriminden gelen katkıları içeren kısım Einstein tensörüdür.

$$
G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{6.24}
$$

R^2 ve $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ terimlerinden gelen katkılara sırasıyla şu kısaltmalar yapılır:

$$
\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= 2R\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}\right)+2\left(g_{\mu\nu}\Box-\nabla_\mu\nabla_\nu\right)R \qquad (6.25)\\
K_{\mu\nu} &= \Box\left(R_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)-\nabla_\lambda\nabla_\mu R^\lambda_\nu-\nabla_\lambda\nabla_\nu R^\lambda_\mu+2R_{\mu\lambda}R^\lambda_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

Ayrıca $K_{\mu\nu}$ tensörünün, Riemann tensörünü içeren ve kullanışlı olabilen bir diğer hali vardır.

$$
K_{\mu\nu}=\Box\left(R_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)-\nabla_\mu\nabla_\nu R-2R^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\nu\beta}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \tag{6.26}
$$

Bu kısaltmaların oluşturduğu izsiz ve 4 boyutta konformal değişmez olan tensör Bach tensörüdür.

$$B_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} - \frac{1}{3}H_{\mu\nu} \tag{6.27}$$

Bu kısaltmalarla beraber Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramı alan denklemleri,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - 2\kappa\alpha H_{\mu\nu} + 4\kappa\beta' B_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{6.28}$$

olarak bulunur [86] [87] [88] [89] [90]. Alan denklemleri metrik tensörün tersi ile çarpılarak izi alındığında iz denklemi bulunur. İz denklemine Bach tensörünün katkısı sıfırdır çünkü Bach tensörü izsiz bir tensördür. Buna göre iz denklemi,

$$-R + 4\Lambda - 12\kappa\alpha\Box R = \kappa T \tag{6.29}$$

olarak bulunur. Einstein-Weyl-Edington yerçekimi kuramı alan denklemlerinin diverjansı alınıp enerji-momentumun korunduğu gösterilebilir.

$$\nabla^{\mu}\left[G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - 2\kappa\alpha H_{\mu\nu} + 4\kappa\beta' B_{\mu\nu}\right] = \kappa\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0 \tag{6.30}$$

7 Pechlaner-Sexl Parametrizasyonu

Küresel simetrik bir uzay-zaman için Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramının eylemi kullanılarak bulunan Kanonik Lagrangian'dan Hessian matris, Hessian determinant, Noether vektörü bileşenleri ve Noether yükü bulunabilir. Küresel simerik bir uzay-zaman, metrik işareti $(-,+,+,+)$ seçilerek şu metrikle temsil edilir:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{1}{B(r)}dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{7.1}$$

Görüldüğü gibi metrik elemanları sadece radyal koordinat r'ye bağlıdır. Kısaltma amacıyla şu gösterimler kullanılır:

$$t \to 0\,, \quad r \to 1, \quad \theta \to 2, \quad \varphi \to 3 \tag{7.2}$$

Bu metrik kullanılarak Christoffel sembolleri hesaplanırsa sıfırdan farklı olanlar,

$$\begin{aligned}
\Gamma^0{}_{01} &= \Gamma^0{}_{10} = \frac{A'}{2A} & & \\
\Gamma^1{}_{00} &= \frac{A'B}{2}, & \Gamma^1{}_{11} &= -\frac{B'}{2B} \\
\Gamma^1{}_{22} &= -\frac{BC'}{2}, & \Gamma^1{}_{33} &= -\frac{BC'\sin^2\theta}{2} \\
\Gamma^2{}_{12} &= \Gamma^2{}_{21} = \frac{C'}{2C}, & \Gamma^2{}_{33} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^3{}_{13} &= \Gamma^3{}_{31} = \frac{C'}{2C}, & \Gamma^3{}_{23} &= \Gamma^3{}_{32} = \cot\theta
\end{aligned} \tag{7.3}$$

olarak bulunur. Bulunan Christoffel sembolleri ve bunların türevlerinden hareketle (6.3) eylemi içindeki eğrilik skaleri R, eğrilik skaleri karesi R^2 ve Ricci kare terimi $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ hesaplanabilir. Metriğin diyagonal olmasına dayanarak eğrilik skaleri, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ tanımından hareketle bileşenler cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
R &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\
&= R^0{}_0 + R^1{}_1 + R^2{}_2 + R^3{}_3
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Ricci tensörünün karesi ise bileşenler cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = R^0{}_0R^0{}_0 + R^1{}_1R^1{}_1 + R^2{}_2R^2{}_2 + R^3{}_3R^3{}_3 \tag{7.5}$$

Hesaplanan eğrilik skaleri bileşenleri şunlardır:

$$\begin{aligned}
R^0{}_0 &= -\frac{B}{2}\left[-\frac{A'^2}{2A^2}+\frac{A'B'}{2AB}+\frac{A'C'}{AC}+\frac{A''}{A}\right] &(7.6)\\
R^1{}_1 &= -\frac{B}{2}\left[-\frac{A'^2}{2A^2}+\frac{A'B'}{2AB}+\frac{A''}{A}+\frac{B'C'}{BC}-\frac{C'^2}{C^2}+\frac{2C''}{C}\right]\\
R^2{}_2 &= -\frac{B}{2}\left[\frac{A'C'}{2AC}+\frac{B'C'}{2BC}-\frac{2}{BC}+\frac{C''}{C}\right]\\
R^3{}_3 &= R_2^{\ 2}
\end{aligned}$$

Hesaplanan bileşenler kullanılarak eğrilik skaleri,

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{B}{2}\left[-\frac{A'^2}{A^2}+\frac{A'B'}{AB}+\frac{2A'C'}{AC}+\frac{2A''}{A}+\frac{2B'C'}{BC}-\frac{4}{BC}-\frac{C'^2}{C^2}+\frac{4C''}{C}\right] &(7.7)\\
&= -\frac{B}{2}\left[\frac{2A''}{A}+\frac{4C''}{C}+\frac{2A'C'}{AC}-\frac{A'^2}{A^2}-\frac{C'^2}{C^2}\right]-\frac{B'}{2}\left[\frac{A'}{A}+\frac{2C'}{C}\right]+\frac{2}{C}
\end{aligned}$$

olarak ve eğrilik skalerinin karesi,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{B^2}R^2 &= \left[\frac{A'^4}{A^4}-\frac{4A'^3C'}{A^3C}+\frac{6A'^2C'^2}{A^2C^2}-\frac{4A'C'^3}{AC^3}+\frac{C'^4}{C^4}\right]+\frac{1}{B}\left[\frac{8A'^2}{A^2C}-\frac{16A'C'}{AC^2}+\frac{8C'^2}{C^3}\right]\\
&+\frac{16}{B^2C^2}+\frac{B'}{B}\left[-\frac{2A'^3}{A^3}-\frac{4C'^3}{C^3}+\frac{6A'C'^2}{AC^2}-\frac{16C'}{BC^2}-\frac{8A'}{ABC}\right]\\
&+\frac{B'^2}{B^2}\left[\frac{A'^2}{A^2}+\frac{4C'^2}{C^2}+\frac{4A'C'}{AC}\right]+\frac{B'}{B}\left[\frac{4A'A''}{A^2}+\frac{8A''C'}{AC}+\frac{8A'C''}{AC}+\frac{16C'C''}{C^2}\right]\\
&+\frac{4A''^2}{A^2}+\frac{16A''C''}{AC}+\frac{16C''^2}{C^2}+\frac{C''}{C}\left[-\frac{8A'^2}{A^2}-\frac{8C'^2}{C^2}+\frac{16A'C'}{AC}-\frac{32}{BC}\right]\\
&+\frac{A''}{A}\left[-\frac{4A'^2}{A^2}-\frac{4C'^2}{C^2}+\frac{8A'C'}{AC}-\frac{16}{BC}\right] &(7.8)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ricci tensörünün karesi ise,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{B^2}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} &= \left[\frac{A'^4}{2A^4}-\frac{A'^3C'}{A^3C}+\frac{5A'^2C'^2}{2A^2C^2}+\frac{C'^4}{C^4}\right]-\frac{4A'C'}{ABC^2}+\frac{8}{B^2C^2}\\
&-\frac{B'}{B}\left[\frac{A'^3}{A^3}+\frac{2C'^3}{C^3}+\frac{4C'}{BC^2}\right]+\frac{B'^2}{B^2}\left[\frac{A'^2}{2A^2}+\frac{3C'^2}{2C^2}+\frac{A'C'}{AC}\right]\\
&+\frac{B'}{B}\left[\frac{2A'A''}{A^2}+\frac{2A''C'}{AC}+\frac{2A'C''}{AC}+\frac{6C'C''}{C^2}\right]\\
&+\frac{2A''^2}{A^2}+\frac{4A''C''}{AC}+\frac{6C''^2}{C^2}+\frac{C''}{C}\left[-\frac{2A'^2}{A^2}-\frac{4C'^2}{C^2}+\frac{2A'C'}{AC}-\frac{8}{BC}\right]\\
&+\frac{A''}{A}\left[-\frac{2A'^2}{A^2}-\frac{2C'^2}{C^2}+\frac{2A'C'}{AC}\right] &(7.9)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

7.1 Einstein-Weyl-Eddington Yerçekimi Kuramında Noktasal Lagrangian

(6.3) eyleminden hareketle, Lagrange çarpanları yöntemi kullanılarak Noktasal Lagrangian ve buradan da kanonik Lagrangian hesaplanabilir. Hesaplanan R, R^2, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ terimleri, metrik elemanlarının 2.mertebe türevlerini içermektedirler. Bu terimler 1.mertebe türevler ve 2.mertebe türevler olacak şekilde yazılırsa,

$$\bar{R} = \hat{R} - B\left[\frac{A''}{A} + \frac{2C''}{C}\right] \tag{7.10}$$

$$\bar{R}_0{}^0 = \hat{R}_0{}^0 - \frac{B}{2}\frac{A''}{A}\,, \quad \bar{R}_1{}^1 = \hat{R}_1{}^1 - \frac{B}{2}\left[\frac{A''}{A} + \frac{2C''}{C}\right]\,, \quad \bar{R}_2{}^2 = \hat{R}_2{}^2 - \frac{B}{2}\frac{C''}{C} \tag{7.11}$$

olur. Burada $\hat{R}$ terimleri 1.mertebe türevler içeren terimlerdir. Bu şekilde yazılmasının amacı eylemde 2.mertebe türevlerin kısmi integrasyon yapılarak 1.mertebe türevlere dönüştürülmesidir. Einstein-Weyl-Eddington eylemi Lagrange çarpanları kullanılarak,

$$\begin{aligned} S &= -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}R - \alpha R^2 + \frac{\beta}{2}C^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma}\right) \\ &= -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}R - \alpha R^2 + \beta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2)\right) \\ &= -\int dr\sqrt{\frac{A}{B}}C\Big[\frac{1}{2\kappa}R - \left(\alpha + \frac{\beta}{3}\right)R^2 + \beta R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu \\ &\quad -\lambda_0(R_0{}^0 - \bar{R}_0{}^0) - \lambda_1(R_1{}^1 - \bar{R}_1{}^1) - \lambda_2(R_2{}^2 - \bar{R}_2{}^2)\Big] \end{aligned} \tag{7.12}$$

olarak yazılır. Burada $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ Lagrange çarpanlarıdır ve $\beta' = \beta/2$ olarak alınmıştır. Noktasal Lagrangian $S = \int \mathscr{L} dr$ tanımından bulunur. Daha önce bulunan $R = R_0{}^0 + R_1{}^1 + 2R_2{}^2$ ve $R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu = R_0{}^0 R_0{}^0 + R_1{}^1 R_1{}^1 + 2R_2{}^2 R_2{}^2$ ifadeleri yerlerine koyulur ve Lagrange çarpanları bulunur.

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta R_0{}^0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = 2\beta R_0{}^0 - 2\left(\alpha + \frac{\beta}{3}\right)R + \frac{1}{2\kappa} \tag{7.13}$$

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta R_1{}^1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2\beta R_1{}^1 - 2\left(\alpha + \frac{\beta}{3}\right)R + \frac{1}{2\kappa} \tag{7.14}$$

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta R_2{}^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 4\beta R_2{}^2 - 4\left(\alpha + \frac{\beta}{3}\right)R + \frac{1}{\kappa} \tag{7.15}$$

Metriğin determinantı hesaplanarak $\sqrt{-g} = \sqrt{\frac{A}{B}}C$ olarak bulunur. Bulunan Lagrange çarpanları da yerlerine yerleştirilirse Noktasal Lagrangian,

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \quad & \sqrt{\frac{A}{B}}C\left[\frac{1}{2\kappa}R-\left(\alpha+\frac{\beta}{3}\right)R^2+\beta R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu-\lambda_0\left(R_0{}^0-\hat{R}_0{}^0+\frac{B}{2}\frac{A''}{A}\right)\right.\\ & \left.-\lambda_1\left(R_1{}^1-\hat{R}_1{}^1+\frac{B}{2}\left[\frac{A''}{A}+\frac{2C''}{C}\right]\right)-\lambda_2\left(R_2{}^2-\hat{R}_2{}^2+\frac{B}{2}\frac{C''}{C}\right)\right] \quad (7.16)\end{aligned}$$

olur. Eylemdeki 2.mertebe türevler kısmi integrasyon yapılarak 1.mertebe türevlere indirgenir. Yüzey terimlerinden sıfır geldiği için kısmi integrasyonla değişen terimler,

$$-\sqrt{\frac{A}{B}}C\lambda_0\left(\frac{B}{2}\frac{A''}{A}\right)\rightarrow A'\partial_r\left(\frac{\lambda_0}{2}\sqrt{\frac{B}{A}}C\right) \quad (7.17)$$

$$-\sqrt{\frac{A}{B}}C\lambda_1\left(\frac{B}{2}\left[\frac{A''}{A}+\frac{2C''}{C}\right]\right)\rightarrow A'\partial_r\left(\frac{\lambda_1}{2}\sqrt{\frac{B}{A}}C\right)+C'\partial_r\left(\lambda_1\sqrt{AB}\right) \quad (7.18)$$

$$-\sqrt{\frac{A}{B}}C\lambda_2\left(\frac{B}{2}\frac{C''}{C}\right)\rightarrow C'\partial_r\left(\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{AB}\right) \quad (7.19)$$

olurlar. Buradan Noktasal Lagrangian,

$$\begin{aligned}\mathscr{L} \;=\; & \sqrt{\frac{A}{B}}C\left[\frac{1}{2\kappa}R-\left(\alpha+\frac{\beta}{3}\right)R^2+\beta R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu-\lambda_0\left(R_0{}^0-\hat{R}_0{}^0\right)-\lambda_1\left(R_1{}^1-\hat{R}_1{}^1\right)\right.\\ & \left.-\lambda_2\left(R_2{}^2-\hat{R}_2{}^2\right)\right]+A'\partial_r\left((\lambda_0+\lambda_1)\frac{C}{2}\sqrt{\frac{B}{A}}\right)+C'\partial_r\left((\lambda_1+\frac{\lambda_2}{2})\sqrt{AB}\right) \quad (7.20)\end{aligned}$$

olur. $\hat{R}_0{}^0$, $\hat{R}_1{}^1$ ve $\hat{R}_2{}^2$ kısaltmaları ve gerekli kısmi türevler alınıp Noktasal Lagrangian'a yerleştirilir ve gerekli sadeleştirilmeler yapıldıktan sonra Lagrangian,

$$\begin{aligned}\mathscr{L} \;=\; & \sqrt{\frac{A}{B}}C\left[\left(\alpha+\frac{\beta}{3}\right)R^2-\beta R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu\right]+\lambda_2\sqrt{\frac{A}{B}}+\lambda_1\left[\sqrt{\frac{B}{A}}A'C'+\frac{\sqrt{AB}}{2}\frac{C'^2}{C}\right]\\ & +\frac{C}{2}\sqrt{\frac{B}{A}}(\lambda_0'+\lambda_1')A'+\sqrt{AB}(\lambda_1'+\frac{\lambda_2'}{2})C' \quad (7.21)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi bu Lagrangian B' terimine bağlı değildir. Euler-Lagrange denkleminden hareketle B için hareket denklemi bulunur. Hesaplamalarda kolaylık sağlaması amacıyla Lagrangian şu şekilde kısaltılır:

$$\mathscr{L} \;=\; \frac{1}{\sqrt{B}}\Psi+\sqrt{B}\Omega \quad (7.22)$$

$$\text{burada} \quad \Psi \;=\; C\sqrt{A}\left[\left(\alpha+\frac{\beta}{3}\right)R^2-\beta R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu\right]+\lambda_2\sqrt{A} \quad (7.23)$$

$$\text{ve} \quad \Omega \;=\; \lambda_1\left[\frac{A'C'}{\sqrt{A}}+\frac{\sqrt{A}}{2}\frac{C'^2}{C}\right]+\frac{C}{2\sqrt{A}}(\lambda_0'+\lambda_1')A'+\sqrt{A}(\lambda_1'+\frac{\lambda_2'}{2})C'$$

B için yazılan Euler-Lagrange denkleminden,

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta B}=0 \quad \Rightarrow \quad B=\frac{\Psi}{\Omega} \quad (7.24)$$

eşitliği bulunur. Bulunan B, Lagrangian $\mathscr{L}$'ye yerleştirilirse,

$$\mathscr{L} = 2\sqrt{\Psi\Omega} = \sqrt{L} \tag{7.25}$$

olarak bulunur. Bunlarla beraber yeni kanonik Lagrangian,

$$L = 4\Psi\Omega \tag{7.26}$$

olur. Bu yeni kanonik Lagrangian 5 genelleştirilmiş koordinata ve bunların türevlerine bağlıdır.

$$L = L(A, C, R_0{}^0, R_1{}^1, R_2{}^2; A', C', R'_0{}^0, R'_1{}^1, R'_2{}^2) \tag{7.27}$$

$R'_0{}^0$, $R'_1{}^1$ ve $R'_2{}^2$ türev terimleri λ'_0, λ'_1 ve λ'_2 Lagrange çarpanları türevlerinin içerisinde gizlidir.

7.2 Hessian Matris

(7.26) Kanonik Lagrangian'dan Hessian matrisi ve Hessian determinantı bulunabilir. Bulunan Hessian matris elemanları yardımıyla hesaplanan diferansiyel denklemlerden Noether vektörü bileşenleri ve bu bileşenler yardıymıyla da Noether yükü hesaplanır. Hessian matris elemanları $L_{,ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial q'^i \partial q'^j}$ denklemiyle hesaplanır. (7.26) Lagrangian'de kısaltmalar yerine koyulur ve $L_{,ij}$ bileşenleri hesaplanır. Hesaplanan Hessian matris $L_{,ij}$ bileşenleri şunlardır:

$$L_{,ij} = \frac{\Psi}{\sqrt{A}} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & \lambda_1 & \frac{C}{2}\delta & \frac{C}{2}\delta & C\gamma \\ \hline \lambda_1 & \lambda_1 \frac{A}{C} & A\gamma & A\delta & A(\gamma+\delta) \\ \hline \frac{C}{2}\delta & A\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{C}{2}\delta & A\delta & 0 & 0 & 0 \\ \hline C\gamma & A(\gamma+\delta) & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \tag{7.28}$$

Burada indisler $i, j = \{A, C, R_0{}^0, R_1{}^1, R_2{}^2\}$ ile temsil edilir. Bundan sonraki işlemlerde kısatma amacıyla $R_0{}^0 \equiv R_0, R_1{}^1 \equiv R_1, R_2{}^2 \equiv R_2$ olarak tanımlanmıştır. Ayrıca $L_{,ij}$ matrisinde kısatma amacıyla şu tanımlar kullanılmıştır:

$$\gamma = -4\left(\alpha + \frac{\beta}{3}\right) \quad \text{ve} \quad \delta = 2\beta + \gamma \tag{7.29}$$

Görüldüğü üzere bu Hessian matristen hesaplanan Hessian determinant sıfırdır.

$$\det\left(L_{,ij}\right) = 0 \tag{7.30}$$

Hessian determinantın sıfır olması genelleştirilmiş koordinatlardan en az birinin çevrimsel olduğunu ortaya koyar [56]. Bu sonuç B'den başka çevrimsel koordinat olduğuna işaret eder. Bu durumu çözmek amacıyla daha önceki genelleştirilmiş koordinatlar nokta dönüşümleri yapılarak yeni genelleştirilmiş koordinatlara dönüştürülür ve yeni serbestlik dereceleri bulunur.

7.3 Nokta Dönüşümü

İkinci çevrimsel koordinatı belirlemek ve Hessian determinantın sıfırdan farklı çıkmasını sağlamak için nokta dönüşümleri yapılır. Bu nokta dönüşümleri sonucunda yeni bir çevrimsel koordinat bulunmalıdır ve bu çevrimsel koordinatın elenmesi sonucunda Hessian determinant sıfırdan farklı çıkmalıdır. Bu şartları sağlayacak Nokta dönüşümü:

$$\Lambda_0 = \lambda_0 + \lambda_1 = 2\beta({R_0}^0 + {R_1}^1) - 4\Big(\alpha + \frac{\beta}{3}\Big)R + \frac{1}{\kappa} \tag{7.31}$$

$$\Lambda_1 = \lambda_1 = 2\beta {R_1}^1 - 2\Big(\alpha + \frac{\beta}{3}\Big)R + \frac{1}{2\kappa} \tag{7.32}$$

$$\Lambda_2 = \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 = 2\beta({R_1}^1 + {R_2}^2) - 4\Big(\alpha + \frac{\beta}{3}\Big)R + \frac{1}{\kappa} \tag{7.33}$$

olarak belirlenir. Bu dönüşümün matris formunda ifadesi:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & \delta & 2\gamma \\ \gamma/2 & \delta - \gamma/2 & \gamma \\ \gamma & \delta & \delta + \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\kappa \\ 1/2\kappa \\ 1/\kappa \end{pmatrix} \tag{7.34}$$

Nokta dönüşümün, ters dönüşümlerini verecek olan matris:

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta^2 - \gamma^2} \begin{bmatrix} \delta + \gamma/2 & -\delta & -\gamma \\ -\gamma/2 & \delta + 2\gamma & -\gamma \\ -\gamma/2 & -\delta & \delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\Lambda}_0 \\ \widetilde{\Lambda}_1 \\ \widetilde{\Lambda}_2 \end{pmatrix} \tag{7.35}$$

Burada $\widetilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0 - 1/\kappa$, $\widetilde{\Lambda}_1 = \Lambda_1 - 1/2\kappa$ ve $\widetilde{\Lambda}_2 = \Lambda_2 - 1/\kappa$ kısaltmaları kullanılmıştır. Bu nokta dönüşümleri (7.26) yeni Lagrangian'de yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} L = \quad & 4\left[2(\Lambda_2 - \Lambda_1) + C\left(\Big(\alpha + \frac{\beta}{3}\Big)R^2 - \beta {R_\mu}^\nu {R_\nu}^\mu\right)\right] \\ & \cdot \left[\Lambda_1\left(A'C' + \frac{A}{2}\frac{C'^2}{C}\right) + \frac{C}{2}\Lambda_0' A' + A\Lambda_2' C'\right] \end{aligned} \tag{7.36}$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi bulunan yeni Lagrangian Λ_1' türevine bağlı değildir. Euler-Lagrange denklemi kullanılarak Λ_1 için hareket denklemi:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \Lambda_1} = \left[-2 + C\frac{\partial}{\partial \Lambda_1}\left(\left(\alpha + \frac{\beta}{3}\right)R^2 - \beta R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu\right)\right] \\ &\cdot \left[\Lambda_1\left(A'C' + \frac{A}{2}\frac{C'^2}{C}\right) + \frac{C}{2}\Lambda_0' A' + A\Lambda_2' C'\right] \\ &+ \left[2(\Lambda_2 - \Lambda_1) + C\left(\left(\alpha + \frac{\beta}{3}\right)R^2 - \beta R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu\right)\right] \cdot \left(A'C' + \frac{A}{2}\frac{C'^2}{C}\right) \end{aligned} \tag{7.37}$$

olarak bulunur. Nokta dönüşümü yapıldığı için, (7.37) sonucundaki Weyl-Eddington terimi R_0, R_1 ve R_2 terimleri yerine $\widetilde{\Lambda}_0$, $\widetilde{\Lambda}_1$, $\widetilde{\Lambda}_2$ terimleriyle hesaplanması gerekir. Kısaltma amacıyla şu tanımlama yapılır:

$$W(R_0, R_1, R_2) = \left(\alpha + \frac{\beta}{3}\right)R^2 - \beta R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu = \widetilde{W}(\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2) \tag{7.38}$$

R^2 ve $R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu$ içindeki bileşenler için (7.35) ters dönüşümleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2) = \frac{1}{\delta^2 - \gamma^2} \quad & \left[(\delta + \gamma)\left(\widetilde{\Lambda}_2^2 - \widetilde{\Lambda}_0\widetilde{\Lambda}_1 - 2\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_2 + 2\widetilde{\Lambda}_0\widetilde{\Lambda}_2\right)\right. \\ & \left. -\frac{1}{2}(\delta + \frac{\gamma}{2})\left(\widetilde{\Lambda}_0 - 2\widetilde{\Lambda}_1 + 2\widetilde{\Lambda}_2\right)^2\right] \end{aligned} \tag{7.39}$$

olarak bulunur. (7.37) hareket denklemindeki Λ_1 türevi, $\widetilde{\Lambda}_0$, $\widetilde{\Lambda}_1$ and $\widetilde{\Lambda}_2$ terimlerini içerecek şekilde bulunmalıdır. Zincir kuralı yapılarak Λ_1 türevi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \Lambda_1} &= \frac{\partial}{\partial \Lambda_1}\left(\left(\alpha + \frac{\beta}{3}\right)R^2 - \beta R_\mu^\nu R_\nu^\mu\right) \\ &= \frac{\partial R_0}{\partial \Lambda_1}\frac{\partial W}{\partial R_0} + \frac{\partial R_1}{\partial \Lambda_1}\frac{\partial W}{\partial R_1} + \frac{\partial R_2}{\partial \Lambda_1}\frac{\partial W}{\partial R_2} \\ &= R_0 - R_1 + 2R_2 \end{aligned} \tag{7.40}$$

olarak bulunur. $\widetilde{W}$'nin Λ_1 türevi ise (7.39) denkleminden hareketle,

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \Lambda_1} = \frac{1}{\delta^2 - \gamma^2}\left[\delta\Lambda_0 - (4\delta + 2\gamma)\Lambda_1 + 2\delta\Lambda_2 - \frac{\delta - \gamma}{\kappa}\right] \tag{7.41}$$

$$= \frac{1}{\delta^2 - \gamma^2}\left[\delta\widetilde{\Lambda}_0 - (4\delta + 2\gamma)\widetilde{\Lambda}_1 + 2\delta\widetilde{\Lambda}_2\right] \tag{7.42}$$

olarak bulunur. Bu sonuca göre Λ_1 için hareket denklemi kuadratik bir denklem olur. Sonuç çözülebilir ama çözüm karışık olacaktır. Buraya kadarki yöntem çevrimsel koordinat B için hareket denklemini hesaplayıp daha sonra Nokta dönüşümü yaparak Λ_1 için hareket denklemini bulmaktır. Fakat B'yi elemeden önce Nokta dönüşümlerini uygulayıp, Λ_1 için hareket denklemini çözüp daha sonra B için hareket denklemini çözmek Hessian matris hesaplaması için daha uygun olabilir.

7.4 İkinci Çevrimsel Koordinat

(7.21) Noktasal Lagrangian'daki R_0, R_1, R_2 terimlerine (7.35) Nokta dönüşümleri uygulanarak $A, B, C, \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ terimlerine bağlı $\mathscr{L}$ noktasal Lagrangian bulunur. Dönüşümler sonucunda Lagrangian,

$$\mathscr{L} = \sqrt{\frac{A}{B}} C\widetilde{W} + 2(\Lambda_2 - \Lambda_1)\sqrt{\frac{A}{B}} + \Lambda_1 \left[\sqrt{\frac{B}{A}} A'C' + \frac{\sqrt{AB}}{2}\frac{C'^2}{C}\right] + \frac{C}{2}\sqrt{\frac{B}{A}}\Lambda_0' A' + \sqrt{AB}\Lambda_2' C' \tag{7.43}$$

olur. (7.43) noktasal Lagrangian'ı $\mathscr{L}$, Λ_1' türevine bağlı değildir. Buna göre Euler-Lagrange denkleminden hareketle Λ_1 için hareket denklemi,

$$0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Lambda_1} = \sqrt{\frac{A}{B}} C \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \Lambda_1} - 2\sqrt{\frac{A}{B}} + \left[\sqrt{\frac{B}{A}} A'C' + \frac{\sqrt{AB}}{2}\frac{C'^2}{C}\right] \tag{7.44}$$

olarak bulunur. Denklemdeki $\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \Lambda_1}$ terimi (7.41) denkleminde hesaplanmıştı. Bu sonuç yerine koyulunca, Λ_1 için hareket denklemi,

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{A}{B}} C \frac{1}{\delta^2 - \gamma^2}\left[\delta\Lambda_0 - (4\delta + 2\gamma)\Lambda_1 + 2\delta\Lambda_2 - \frac{\delta - \gamma}{\kappa}\right] \\ &-2\sqrt{\frac{A}{B}} + \sqrt{\frac{B}{A}} A'C' + \frac{\sqrt{AB}}{2}\frac{C'^2}{C} = 0 \end{aligned} \tag{7.45}$$

olarak bulunur ve bulunan denklem düzenlenirse,

$$\Lambda_1 = \frac{1}{4\delta + 2\gamma}\left[\frac{\delta^2 - \gamma^2}{C}\left(\frac{B}{A} A'C' + \frac{B}{2}\frac{C'^2}{C} - 2\right) + \delta\Lambda_0 + 2\delta\Lambda_2 - \frac{\delta - \gamma}{\kappa}\right] \tag{7.46}$$

olarak hesaplanır. Bulunan Λ_1, (7.43) denklemine yerleştirilir. Bundan önce notasyon kolaylığı açısından yeni kısaltmalar tanımlanır:

$$\begin{aligned} &\Lambda_1 = \Lambda_{11} B + \Lambda_{10} \\ &\Lambda_{11} = \frac{\delta^2 - \gamma^2}{4\delta + 2\gamma}\mathbf{X} \quad , \quad \mathbf{X} = \left(\frac{A'}{A}\frac{C'}{C} + \frac{1}{2}\frac{C'^2}{C^2}\right) \end{aligned} \tag{7.47}$$

$$\Lambda_{10} = \frac{\delta}{4\delta + 2\gamma}(\Lambda_0 + 2\Lambda_2) - \frac{\delta^2 - \gamma^2}{2\delta + \gamma}\frac{1}{C} - \frac{\delta - \gamma}{(4\delta + 2\gamma)\kappa} \tag{7.48}$$

(7.47) Λ_1 denkleminde her iki tarafa $\left(-\frac{1}{2\kappa}\right)$ eklemesi yapıldığında daha önce tanımlanan $\widetilde{\Lambda}_1 = \Lambda_{11} B + \widetilde{\Lambda}_{10}$ sonucu bulunur. Tanımlanan kısaltmalarla beraber Lagrangian,

$$\mathscr{L} = C\sqrt{\frac{A}{B}}\left[\widetilde{W} + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_1)\right] + C\sqrt{AB}\,(\Lambda_1 \mathbf{X} + \mathbf{Y}) \tag{7.49}$$

olur. Burada $\mathbf{Y} = \left(\frac{1}{2}\frac{A'}{A}\Lambda_0' + \frac{C'}{C}\Lambda_2'\right)$ olarak tanımlanır. (7.46) Λ_1 denklemi (7.49) denklemine yerleştirilirse,

$$\mathscr{L} = C\sqrt{\frac{A}{B}}\left[\widetilde{W} + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_{11}B - \Lambda_{10})\right] + C\sqrt{AB}\Big((\Lambda_{11}B + \Lambda_{10})\mathbf{X} + \mathbf{Y}\Big) \quad (7.50)$$

olur. Yeni denklemde B' bağımlılığı olmadığından B için hareket denklemi,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial B} = \quad & \frac{B^2}{C\sqrt{AB}}\left[-\frac{1}{2}\left[\widetilde{W} + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_{11}B - \Lambda_{10})\right]\right. \\ & \left. + \frac{B}{2}\Big[(\Lambda_{11}B + \Lambda_{10})\mathbf{X} + \mathbf{Y}\Big] + B\left[\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial B} - \frac{2}{C}\Lambda_{11}\right] + B^2\Lambda_{11}\mathbf{X}\right] \end{aligned} \quad (7.51)$$

olur. Parantez içindeki terim sıfıra eşit olduğu için bu denklemden B hesaplanabilir. (7.51) denkleminde B^2 ve B'ye bağlı terimler ve B'den bağımsız terimler vardır ve her terim için katsayılar ayrı ayrı yazılır. Bunun sonucunda da B denklemi bulunup çözülebilir. (7.51) denkleminde B^2'li terimler:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\,\widetilde{W}\Big|_{B^2} + \frac{B}{2}\Lambda_{11}B\mathbf{X} + B\left[\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \Lambda_1}\frac{\partial \Lambda_1}{\partial B}\right]_B + B^2\Lambda_{11}\mathbf{X} \quad (7.52) \\ = \; & \frac{1}{2}\frac{2\delta+\gamma}{\delta^2-\gamma^2}\Lambda_{11}^2B^2 + \frac{1}{2}\Lambda_{11}B^2\mathbf{X} - \frac{4\delta+2\gamma}{\delta^2-\gamma^2}\Lambda_{11}^2B^2 + \Lambda_{11}B^2\mathbf{X} \\ = \; & -\frac{3}{2}\frac{2\delta+\gamma}{\delta^2-\gamma^2}\Lambda_{11}^2B^2 + \frac{3}{2}\Lambda_{11}B^2\mathbf{X} = \frac{3}{4}\Lambda_{11}\mathbf{X}B^2 \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi B^2'nin katsayısı sıfırdan farklıdır, buna göre çözülecek denklem B için kuadratik denklemdir. (7.51) denkleminde B'li terimler,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\,\widetilde{W}\Big|_B + \frac{1}{C}\Lambda_{11}B + \frac{B}{2}\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X} + \mathbf{Y}\Big] + B\Lambda_{11}\left.\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \Lambda_1}\right|_{B-haric} - \frac{2}{C}\Lambda_{11}B \quad (7.53) \\ & = \frac{1}{2}\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X} + \mathbf{Y}\Big]B \end{aligned}$$

(7.51) denkleminde B'den bağımsız terimler,

$$-\frac{1}{2}\left[\widetilde{W}(\widetilde{\Lambda}_1 \to \widetilde{\Lambda}_{10}) + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_{10})\right] \quad (7.54)$$

olarak bulunur. Burada $\widetilde{W}(\widetilde{\Lambda}_1 \to \widetilde{\Lambda}_{10})$ terimi, (7.39) denklemindeki her $\widetilde{\Lambda}_1$ terimi yerine $\widetilde{\Lambda}_{10}$ koyulduğunu ifade eder.

Tüm bulunan (7.52), (7.53) ve (7.54) ifadeleri birleştirilirse B için hareket denklemi şu şekilde elde edilir:

$$\frac{3}{2}\Lambda_{11}\mathbf{X}B^2 + \Big[\Lambda_{10}\mathbf{X} + \mathbf{Y}\Big]B - \left[\widetilde{W}(\widetilde{\Lambda}_1 \to \widetilde{\Lambda}_{10}) + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_{10})\right] = 0 \quad (7.55)$$

İşlemleri kısaltmak amacıyla şu sembolik tanımlamalar kullanılır:

$$\Psi = \Lambda_{11}\mathbf{X}\,, \quad \Theta = \Big[\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big] \quad \text{ve} \quad \Omega = \left[\widetilde{W}(\widetilde{\Lambda}_1 \to \widetilde{\Lambda}_{10}) + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_{10})\right] \tag{7.56}$$

Buradan kuadratik B denklemi şöyle yazılır:

$$\frac{3}{2}\Psi B^2 + \Theta B - \Omega = 0 \tag{7.57}$$

Bu kuadratik denklemin çözümü için diskriminant formülü kullanılır. Buna göre,

$$B = \frac{-\Theta \pm \sqrt{\Delta}}{3\Psi} \quad \text{burada} \quad \Delta = \Theta^2 + 6\Psi\Omega \tag{7.58}$$

olarak bulunur. Açık halde yazılacak olursa,

$$B = \frac{-\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big] \pm \sqrt{\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big]^2 + 6\Lambda_{11}\mathbf{X}\left[\widetilde{W}(\widetilde{\Lambda}_1 \to \widetilde{\Lambda}_{10}) + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_{10})\right]}}{3\Lambda_{11}\mathbf{X}} \tag{7.59}$$

olur. Bulunan (7.59) denkleminin (7.49) Lagrangian'ine yerleştirilmesi gerekir. Bunu yapmadan önce kolaylık açısından (7.49) denklemi biraz daha sadeleştirilebilir. Buna göre Lagrangian:

$$\mathscr{L} = C\sqrt{\frac{A}{B}}\left[\widetilde{W} + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_1) + B\,(\Lambda_1\mathbf{X}+\mathbf{Y})\right] \tag{7.60}$$

olarak yazılır ve (7.51) denkleminden,

$$\left[\widetilde{W} + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_1)\right] = B\Big[\Lambda_1\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big] + 2B\left[\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial B} - \frac{2}{C}\Lambda_{11}\right] + 2B^2\Lambda_{11}\mathbf{X} \tag{7.61}$$

eşitliği alınır ve Lagrangian'e yerleştirilir. Ayrıca eşitlik içindeki terim,

$$\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial B} = \left.\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial B}\right|_{B-haric} + \left.\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial B}\right|_{B} = \frac{2}{C}\Lambda_{11} - B\Lambda_{11}\mathbf{X} \tag{7.62}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial B} - \frac{2}{C}\Lambda_{11}\right] = -B\Lambda_{11}\mathbf{X} \tag{7.63}$$

olarak yazılabileceğinden (7.60) Lagrangian'ı,

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= C\sqrt{\frac{A}{B}}\left[2B\left[\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial B} - \frac{2}{C}\Lambda_{11}\right] + 2B^2\Lambda_{11}\mathbf{X} + 2B\,(\Lambda_1\mathbf{X}+\mathbf{Y})\right] \qquad (7.64) \\ &= C\sqrt{\frac{A}{B}}\left[-2B^2\Lambda_{11}\mathbf{X} + 2B^2\Lambda_{11}\mathbf{X} + 2B\,(\Lambda_1\mathbf{X}+\mathbf{Y})\right] \\ &= 2C\sqrt{AB}\Big[B\Lambda_{11}\mathbf{X} + (\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y})\Big] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca bulunan Lagrangian sembolik kısaltmalarla da gösterilir:

$$\mathscr{L} = 2C\sqrt{AB}(\Psi B + \Theta) \tag{7.65}$$

Daha önce bulunan (7.59) B denklemi (7.64) Lagrangian'e yerleştirilir:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{2C\sqrt{A}}{\sqrt{3\Lambda_{11}\mathbf{X}}}\Bigg[-\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big] \\
&\quad \pm\sqrt{\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big]^2 + 6\Lambda_{11}\mathbf{X}\Big[\widetilde{W}(\widetilde{\Lambda}_1 \to \widetilde{\Lambda}_{10}) + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_{10})\Big]}\;\Bigg]^{1/2} \\
&\quad \cdot\left[\frac{2\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big] \pm \sqrt{\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big]^2 + 6\Lambda_{11}\mathbf{X}\Big[\widetilde{W}(\widetilde{\Lambda}_1 \to \widetilde{\Lambda}_{10}) + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_{10})\Big]}}{3}\right]
\end{aligned} \tag{7.66}$$

Noktasal Lagrangian ile Kanonik Lagrangian arasında $\mathscr{L} = \frac{2}{\sqrt{27}}\sqrt{\mathbf{L}}$ eşitliği kurulursa Kanonik Lagrangian,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \frac{4C^2A}{27\Lambda_{11}\mathbf{X}}\Bigg[-\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big] \\
&\quad \pm\sqrt{\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big]^2 + 6\Lambda_{11}\mathbf{X}\Big[\widetilde{W}(\widetilde{\Lambda}_1 \to \widetilde{\Lambda}_{10}) + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_{10})\Big]}\;\Bigg]\cdot \\
&\quad \Bigg[5\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big]^2 + 6\Lambda_{11}\mathbf{X}\Big[\widetilde{W}(\widetilde{\Lambda}_1 \to \widetilde{\Lambda}_{10}) + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_{10})\Big] \\
&\quad \pm 4\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big]\sqrt{\Big[\Lambda_{10}\mathbf{X}+\mathbf{Y}\Big]^2 + 6\Lambda_{11}\mathbf{X}\Big[\widetilde{W}(\widetilde{\Lambda}_1 \to \widetilde{\Lambda}_{10}) + \frac{2}{C}(\Lambda_2 - \Lambda_{10})\Big]}\;\Bigg]
\end{aligned} \tag{7.67}$$

olarak bulunur. Daha önceki sembolik kısaltmaları kullanılırsa Kanonik Lagrangian,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mathbf{L} &= \frac{AC^2}{\Psi}\left(-\Theta \pm \sqrt{\Delta}\right)\left(5\Theta^2 + 6\Psi\Omega \pm 4\Theta\sqrt{\Delta}\right) \\
&= \frac{AC^2}{\Psi}\left[-\Theta^3 + 18\Theta\Psi\Omega \pm \Theta^2\sqrt{\Delta} \pm 6\Psi\Omega\sqrt{\Delta}\right] \\
&= \frac{AC^2}{\Psi}\left[-\Theta^3 + 18\Theta\Psi\Omega \pm \Delta^{3/2}\right]
\end{aligned} \tag{7.68}$$

olarak bulunur. Bulunan bu Lagrangian $A, C, \Lambda_0, \Lambda_2$ olmak üzere 4 genelleştirilmiş koordinata ve bunların türevlerine bağlıdır.

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(A, C, \Lambda_0, \Lambda_2, ; A', C', \Lambda_0', \Lambda_2') \tag{7.69}$$

7.5 Yeni Hessian Matris

Hessian matris hesaplamak için (7.68) Lagrangian'ı kullanılır. Küresel simetrik bir uzay-zaman için tanımlanan (7.1) metriği için $C(r) = r^2$ özel hali alınırsa metrik,

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{1}{B(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{7.70}$$

haline gelir. Böylece C genelleştirilmiş koordinat olmaktan çıkar ve Hessian matris 9 elemanlı olur. Ayrıca simetrilerden dolayı eleman sayısı 6'ya düşer. Buna göre daha önce tanımlanan kısatmalarda ve (7.68) Lagrangian'de C yerine r^2 koyulur. Buradan Kanonik Lagrangian,

$$\mathbf{L} = \frac{Ar^4}{\Psi}\left[-\Theta^3 + 18\Theta\Psi\Omega \pm \Delta^{3/2}\right] \tag{7.71}$$

olur ve Hessian matris için bu Kanonik Lagrangian kullanılır. Hessian matris elemanları $L_{,ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial q'^i \partial q'^j}$ denklemiyle hesaplanır. Bunun için (7.71) Lagrangian'de kısatlamalar açılır ve gerekli türevler alınır. Bundan sonraki hesaplamalarda 7.71 denkleminde $+$ işareti seçilmiştir.

$L_{,AA} = \frac{\partial^2 L}{\partial A' \partial A'}$ matris elemanı için hesaplanan sonuç:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L}{\partial A' \partial A'} &= \frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)^2 - \frac{\Theta}{\Psi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right) + \frac{1}{\Psi}\frac{\sqrt{\Delta}}{3}\left(\Theta + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial A'^2}\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\Psi^2}\left(\Theta + \frac{1}{3}\sqrt{\Delta}\right)\left(\Theta - \sqrt{\Delta}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)^2\right]\left(\Theta - \sqrt{\Delta}\right)^2\end{aligned} \tag{7.72}$$

$L_{,A\Lambda_0} = L_{,\Lambda_0 A} = \frac{\partial^2 L}{\partial A' \partial \Lambda_0'}$ matris elemanları için hesaplanan sonuç:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L}{\partial A' \partial \Lambda_0'} &= \frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left[-\frac{\Theta}{2\Psi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_0'}\right) + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_0'}\right)\right. \\ &\quad \left. -\sqrt{\Delta}\left(\frac{2\Theta + \sqrt{\Delta}}{\Theta - \sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial A' \partial \Lambda_0'}\right)\right]\left(\Theta - \sqrt{\Delta}\right)^2\end{aligned} \tag{7.73}$$

$L_{,A\Lambda_2} = L_{,\Lambda_2 A} = \frac{\partial^2 L}{\partial A' \partial \Lambda_2'}$ matris elemanları için hesaplanan sonuç:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial A' \partial \Lambda_2'} = \frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left[-\frac{\Theta}{2\Psi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_2'}\right) + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_2'}\right)\right]\left(\Theta - \sqrt{\Delta}\right)^2 \tag{7.74}$$

$L_{,\Lambda_0\Lambda_0} = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_0' \partial \Lambda_0'}$ matris elemanı için hesaplanan sonuç:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \Lambda_0' \partial \Lambda_0'} = \frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_0'}\right)^2\left(\Theta - \sqrt{\Delta}\right)^2 \tag{7.75}$$

$L_{,\Lambda_0\Lambda_2} = L_{,\Lambda_2\Lambda_0} = \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda_0'\partial\Lambda_2'}$ matris elemanları için hesaplanan sonuç:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\Lambda_2'\partial\Lambda_0'} = \frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_2'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_0'}\right)\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)^2 \tag{7.76}$$

$L_{,\Lambda_2\Lambda_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda_2'\partial\Lambda_2'}$ matris elemanı için hesaplanan sonuç:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\Lambda_2'\partial\Lambda_2'} = \frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_2'}\right)^2\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)^2 \tag{7.77}$$

olarak bulunur. Burada kısaltma amacıyla açılmayan türevlerin açık hali şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Theta}{\partial A'} &= \frac{2\Lambda_{10}}{Ar}+\frac{\Lambda_0'}{2A} \\
\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_0'} &= \frac{A'}{2A} \\
\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_2'} &= \frac{2}{r} \\
\frac{\partial\Psi}{\partial A'} &= \frac{4\Lambda_{11}}{Ar} \\
\frac{\partial^2\Theta}{\partial A'\partial\Lambda_0'} &= \frac{1}{2A} \\
\frac{\partial^2\Psi}{\partial A'^2} &= \frac{8}{A^2r^2}\frac{\delta^2-\gamma^2}{4\delta+2\gamma}
\end{aligned} \tag{7.78}$$

Bulunan Hessian matris elemanlarından bu matrisin determinantı hesaplanabilir. Hessian matrisin determinantı şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\det\left(L_{,ij}\right) = L_{,AA}&[L_{,\Lambda_0\Lambda_0}L_{,\Lambda_2\Lambda_2}-L_{,\Lambda_0\Lambda_2}L_{,\Lambda_2\Lambda_0}] \\
&-L_{,A\Lambda_0}[L_{,\Lambda_0A}L_{,\Lambda_2\Lambda_2}-L_{,\Lambda_0\Lambda_2}L_{,\Lambda_2A}] \\
&+L_{,A\Lambda_2}[L_{,\Lambda_0A}L_{,\Lambda_2\Lambda_0}-L_{,\Lambda_0\Lambda_0}L_{,\Lambda_2A}]
\end{aligned} \tag{7.79}$$

$L_{,\Lambda_0\Lambda_0}L_{,\Lambda_2\Lambda_2}-L_{,\Lambda_0\Lambda_2}L_{,\Lambda_2\Lambda_0}=0$ olduğu için Hessian determinant,

$$\begin{aligned}
\det\left(L_{,ij}\right) = &\quad -L_{,A\Lambda_0}[L_{,\Lambda_0A}L_{,\Lambda_2\Lambda_2}-L_{,\Lambda_0\Lambda_2}L_{,\Lambda_2A}] \\
&\quad +L_{,A\Lambda_2}[L_{,\Lambda_0A}L_{,\Lambda_2\Lambda_0}-L_{,\Lambda_0\Lambda_0}L_{,\Lambda_2A}] \\
= &\quad 2L_{,A\Lambda_0}L_{,\Lambda_0\Lambda_2}L_{,\Lambda_2A}-L_{,A\Lambda_0}^2L_{,\Lambda_2\Lambda_2}-L_{,A\Lambda_2}^2L_{,\Lambda_0\Lambda_0}
\end{aligned} \tag{7.80}$$

olur. Daha önce hesaplanan Hessian matris elemanları (7.80) determinantına yerleştirilirse sonuç,

$$\begin{aligned}
\det\left(L_{,ij}\right) &= -\left(\frac{Ar^4}{\Psi}\right)^3\left(\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\right)^3\Delta\left(2\Theta+\sqrt{\Delta}\right)^2\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial A'\partial\Lambda_0'}\right)^2\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_2'}\right)^2\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)^4 \\
&= -\frac{Ar^{10}}{\Psi^3}\frac{27}{\sqrt{\Delta}}\left(2\Theta+\sqrt{\Delta}\right)^2\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)^4
\end{aligned} \tag{7.81}$$

olarak bulunur. Bulunan bu sonuç sıfırdan farklı olduğu için yeni çevrimsel koordinat yoktur.

Hesaplanan Hessian matris elemanları kullanılarak, Noether vektör bileşenlerinin bulunabileceği (2.85) diferansiyel denklemleri hesaplanabilir. Bu diferansiyel denklemler [ek-B] bölümünde hesaplanmıştır ve bu denklemlerden Noether vektör bileşenleri bulunabilir. Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramı için Noether vektör bileşenlerinin yanı sıra hareket sabiti olan Σ_0 Noether yükü de bulunabilir. Daha önce yapılan hesaplar sonucunda bulunan ve Noether yükünü verecek denklem şu şekildedir:

$$\Sigma_0 = \alpha^i \frac{\partial L}{\partial q'^i} = \alpha_1 \frac{\partial L}{\partial A'} + \alpha_2 \frac{\partial L}{\partial \Lambda_0'} + \alpha_3 \frac{\partial L}{\partial \Lambda_2'} \tag{7.82}$$

Bu denklemde ilgili türevler hesaplanırsa şu sonuçlar bulunur:

$$\frac{\partial L}{\partial A'} = -3\frac{Ar^4}{\Psi}(\Theta - \sqrt{\Delta})(2\Theta + \sqrt{\Delta})\left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial A'}\right) - \frac{1}{6\Psi}(\Theta - \sqrt{\Delta})\left(\frac{\partial \Psi}{\partial A'}\right)\right] \tag{7.83}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Lambda_0'} = -3\frac{Ar^4}{\Psi}(\Theta - \sqrt{\Delta})(2\Theta + \sqrt{\Delta})\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_0'}\right) \tag{7.84}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Lambda_2'} = -3\frac{Ar^4}{\Psi}(\Theta - \sqrt{\Delta})(2\Theta + \sqrt{\Delta})\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2'}\right) \tag{7.85}$$

Hesaplanan sonuçlar Noether yükünde yerine koyulursa sonuç,

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= -3\frac{Ar^4}{\Psi}(\Theta - \sqrt{\Delta})(2\Theta + \sqrt{\Delta})\Bigg[-\alpha_1 \frac{2}{3Ar\mathbf{X}}(\Theta - \sqrt{\Delta}) \\ &\quad + \alpha_1\left(\frac{\Lambda_0'}{2A} + \Lambda_{10}\frac{2}{Ar}\right) + \alpha_2 \frac{A'}{2A} + \alpha_3 \frac{2}{r}\Bigg] \end{aligned} \tag{7.86}$$

olarak bulunur.

8 SONUÇ

Bu tez çalışmasında, alternatif yerçekimi kuramlarından biri olan Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramı çalışılmıştır. Kuram için hesaplamalara geçmeden önce literatür taraması yapılıp altyapı oluşturmak için genel durum olan $f(R)$ yerçekimi kuramı çalışılmıştır. $f(R)$ yerçekimi kuramı için alan denklemleri belirlenmiştir. Kuramın eyleminden hareketle Lagrange çarpanları yöntemi kullanılarak noktasal Lagrangian, metrik elemanları ve eğrilik skaleri cinsinden hesaplanmıştır. Hessian matris elemanları ise noktasal Lagrangian'ın karesi olan kanonik Lagrangian kullanılarak bulunmuştur. Hessian matrisin determinantı hesaplanmıştır. $f(R)$ yerçekimi kuramında korunan büyüklüklerin belirlenmesi için Noether simetrisi kullanılmıştır. Bir Noether vektörü belirleyip, bu vektör yönünde Lie türevi sıfıra eşitlenmiş, Noether vektör bileşenlerinin belirleneceği denklemler ve Noether yükü bulunmuştur. Daha sonra $f(R)$ yerçekimi kuramı için örnekler verilmiş ve kuram için belirlenen ifadeler özel durumlarına indirgenmiştir. Genel Görelilik kuramına indirgenmiş $f(R) = R$ durumu ve $f(R) = R^b$ genel durumu için noktasal Lagrangian, kanonik Lagrangian, Hessian matris elemanları ve Hessian determinant hesaplanıp, ilgili kuramlar için Noether vektör bileşenleri ve Noether yükü belirlenmiştir. Daha önce bahsedildiği gibi gökadaların dönme eğrilerinde Newton dinamiğine uymayan farklılıklar gözlemlenmiştir. Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramı, gökadaların dönme eğrilerini uzay-zamanın geometisi üzerinden açıklar. Einstein-Weyl-Eddington kuramının eylemi kuadratik terimler içerdiği için bu kuramda dördüncü mertebe türevler vardır. Kuramın dördüncü mertebe türevler içermesi, 2 farklı yarıçapa sahip olmasını gerektirir. Bu yarıçaplardan biri Schwarzchild yarıçapıdır, diğeri ise yeni yerçekimsel yarıçaptır. Gökadaların dönme eğrilerini açıklamak üzere Modifiye Newton Dinamiği (MOND) kuramı ortaya çıkmıştır fakat MOND kuramı relativistik bir kuram değildir. Gökadaların dönme eğrilerini açıklaması ve yeni yerçekimsel yarıçapla bağlantılı olması sebebiyle tezin ilerleyen bölümlerinde MOND kuramı çalışılmıştır. MOND kuramı hakkında genel bilgiler verilip, kuramın geçerlilik limitleri belirlenmiştir. MOND kuramı ile $f(R)$ yerçekimi kuramı arasındaki ilişki incelenmiştir. Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramının anlaşılması için kuramın özel hali olan Weyl yerçekimi kuramının incelenmesi gerektiği anlaşılmış ve tezin ilerleyen bölümlerinde Weyl yerçekimi kuramı çalışılmıştır. Weyl yerçekimi kuramı için genel bilgiler verilip kuramın alan denklemleri belirlenmiştir. Tüm bu altyapı kazanıldıktan sonra tezin esas konusu olan Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramına geçilmiştir. Kuram hakkında genel bilgiler verilip kuramın eylemi yazılmıştır. Eylemin varyasyonu alınıp sıfıra eşitlenerek alan denklemleri belirlenmiştir. Küresel simetrik bir uzay-zaman için yazılan metrikle beraber kuramın eylemine Lagrange çarpanları eklenmiş ve kuram için noktasal Lagrangian belirlenmiştir. Çevrimsel koordinat diğer koordinatlar cinsinden hesaplanıp noktasal Lagrangian'a eklenmiş ve kanonik Lagrangian belirlenmiştir. Kanonik Lagrangian kullanılarak Hessian matris ve Hessian determinant hesaplanmıştır. Hesaplar sonucunda Hessian determinant sıfır bulunmuş ve açıkça belli olmayan bir çevrimsel koordinatın daha varolduğu ortaya çıkmıştır. Bu problemi çözmek amacıyla nokta dönüşümü kullanılarak yeni genelleştirilmiş koordinatlar belirlenmiştir. Belirlenen koordinatlarla beraber çevrimsel koordinatlar hesaplanmıştır. Kuram için noktasal Lagrangian, kanonik Lagrangian, Hessian matris ve Hessian determinant belirlenmiştir. Hessian matris elemanları kullanılarak Noether vektör bileşenlerini verecek denklemler belirlenmiş ve Noether yükü yazılmıştır. Noether vektör bileşenleri henüz belirlenememiştir. Bu bileşenlerin belirlenmesi için kuramın eylemindeki katsayılar olan α ve β'nın, $\alpha = 0$ veya $\beta = 0$ limitlerine bakmak gerekir. $\beta = 0$ durumu $R + \alpha R^2$ durumu olduğu için $f(R)$ yerçekimi kuramı için belirlenen Noether vektör bileşenleri ile karşılaştırma yapılabilir. Bileşenlerin belirlenmesi amacıyla Schwarzchild limiti de incelenebilir. İlerleyen çalışmalarda Noether vektör bileşenleri belirlenip, Noether yükü hesaplanabilir. Noether yüküyle MOND kuramı arasında ilişki kurulursa Einstein-Weyl-Eddington yerçekimi kuramında yeni yerçekimsel yarıçap belirlenebilecektir.

A f(R) Yerçekimi Kuramında Noether Vektör Bileşenleri

$f(R)$ yerçekimi kuramında, küresel simetrik metrik için yazılan noktasal Lagrangian'dan hareketle bulunan Hessian matris ve Lie türevinin bu noktasal Lagrangian'a etki etmesi sonucunda hesaplanan diferansiyel denklemlerden Noether vektörü bileşenleri bulunabilir. Daha önce 2.3.1 bölümünde yapılan hesaplar sonucu bulunan diferansiyel denklemler şunlardır:

$$\alpha_1 \frac{\partial L_{,\mu\nu}}{\partial A} + \alpha_2 \frac{\partial L_{,\mu\nu}}{\partial C} + \alpha_3 \frac{\partial L_{,\mu\nu}}{\partial R} + 2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_\mu} L_{,A\nu} + 2\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_\mu} L_{,C\nu} + 2\frac{\partial \alpha_3}{\partial q_\mu} L_{,R\nu} = 0 \quad \text{(A.1)}$$

Bu denklem sisteminde μ ve ν indislerine sırasıyla A, C, R değerleri verilip 6 tane diferansiyel denklem bulunur. (2.77) Hessian matrisinde kısaltma amacıyla $\gamma = \left[Cf + (2-CR)f_R\right]$ olarak tanımlanırsa Hessian matris,

$$L_{,\mu\nu} = \gamma \begin{pmatrix} 0 & f_R & Cf_{RR} \\ f_R & \frac{Af_R}{C} & 2Af_{RR} \\ Cf_{RR} & 2Af_{RR} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(A.2)}$$

olarak yazılır. Kanonik Lagrangian'daki 2 katsayısı diferansiyel denklemlere katkı yapmayacağı için alınmamıştır. Bu Hessian matris için (A.1) denklemleri hesaplanır.

1) $\mu = A$ ve $\nu = A$ için (A.1) denklemi, $L_{,AA} = 0$ olduğu için,

$$2\frac{\partial \alpha_2}{\partial A} L_{,CA} + 2\frac{\partial \alpha_3}{\partial A} L_{,RA} = 0 \quad \text{(A.3)}$$

olur. $L_{,CA} = \gamma f_R$ ve $L_{,RA} = \gamma C f_{RR}$ olduğundan ilk diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial A} f_R + \frac{\partial \alpha_3}{\partial A} C f_{RR} = 0 \quad \text{(A.4)}$$

olarak bulunur.

2) $\mu = C$ ve $\nu = C$ için (A.1) denklemi,

$$\alpha_1 \frac{\partial L_{,CC}}{\partial A} + \alpha_2 \frac{\partial L_{,CC}}{\partial C} + \alpha_3 \frac{\partial L_{,CC}}{\partial R} + 2\frac{\partial \alpha_1}{\partial C} L_{,AC} + 2\frac{\partial \alpha_2}{\partial C} L_{,CC} + 2\frac{\partial \alpha_3}{\partial C} L_{,RC} = 0 \quad (A.5)$$

olur. İlgili Hessian matris elemanları ve türevleri,

$$\begin{aligned} L_{,CC} &= \left[Cf + (2 - CR) f_R\right] \frac{A f_R}{C}, \qquad L_{,AC} = \gamma f_R, \qquad L_{,RC} = 2\gamma A f_{RR} \\ \frac{\partial L_{,CC}}{\partial A} &= \frac{\gamma f_R}{C} \\ \frac{\partial L_{,CC}}{\partial C} &= \frac{A f_R}{C}(f - R f_R) - \frac{\gamma A f_R}{C^2} \\ \frac{\partial L_{,CC}}{\partial R} &= \frac{\gamma A f_{RR}}{C} + \frac{A f_R}{C}(2 - CR) f_{RR} \end{aligned} \quad (A.6)$$

olur ve bulunan sonuçlar yerine yerleştirilince 2.diferansiyel denklem,

$$\frac{A}{C}\left[(2-CR)\alpha_3 f_{RR} - \frac{2\alpha_2 f_R}{C}\right] f_R + \gamma\left[\left(\frac{\alpha_1}{C} + 2\frac{\partial \alpha_1}{\partial C} + 2\frac{\partial \alpha_2}{\partial C}\frac{A}{C}\right) f_R + A\left(\frac{\alpha_3}{C} + 4\frac{\partial \alpha_3}{\partial C}\right) f_{RR}\right] = 0 \quad (A.7)$$

olarak bulunur.

3) $\mu = R$ ve $\nu = R$ için (A.1) denklemi $L_{,RR} = 0$ olduğu için,

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial R} L_{,AR} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial R} L_{,CR} = 0 \quad (A.8)$$

olur. $L_{,AR} = \gamma C f_{RR}$ ve $L_{,CR} = 2\gamma A f_{RR}$ olduğundan 3. diferansiyel denklem,

$$C\frac{\partial \alpha_1}{\partial R} + 2A\frac{\partial \alpha_2}{\partial R} = 0 \quad (A.9)$$

olarak bulunur.

4) $\mu = A$ ve $\nu = C$ ile $\mu = C$ ve $\nu = A$ durumları toplanıp 2'ye bölüneceği için (A.1) denklemi,

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \frac{\partial L_{,AC}}{\partial A} + \alpha_2 \frac{\partial L_{,AC}}{\partial C} + \alpha_3 \frac{\partial L_{,AC}}{\partial R} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial A} L_{,AC} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial A} L_{,CC} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial A} L_{,RC} \\ &+ \frac{\partial \alpha_1}{\partial C} L_{,AA} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial C} L_{,CA} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial C} L_{,RA} = 0 \end{aligned} \quad (A.10)$$

olur. İlgili Hessian matris elemanları ve türevleri,

$$\begin{aligned}
L_{,AA} &= 0, \qquad L_{,AR} = \gamma C f_{RR}, \qquad L_{,CC} = \gamma \frac{A f_R}{C}, \qquad L_{,RC} = 2\gamma A f_{RR} \\
L_{,AC} &= \left[Cf + (2-CR) f_R\right] f_R \\
\frac{\partial L_{,AC}}{\partial A} &= 0 \\
\frac{\partial L_{,AC}}{\partial C} &= f_R\left(f - R f_R\right) \\
\frac{\partial L_{,AC}}{\partial R} &= \gamma f_{RR} + \left(2-CR\right) f_R f_{RR}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

olur ve bulunan sonuçlar yerine yerleştirilince 4.diferansiyel denklem,

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 f_R\left(f - R f_R\right) + \alpha_3\left(2-CR\right) f_R f_{RR} + \gamma\Big[\Big(\alpha_3 + C\frac{\partial \alpha_3}{\partial C} + 2A\frac{\partial \alpha_3}{\partial A}\Big) f_{RR} \\
&+\Big(\frac{\partial \alpha_1}{\partial A} + \frac{A}{C}\frac{\partial \alpha_2}{\partial A} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial C}\Big) f_R\Big] = 0
\end{aligned} \tag{A.12}$$

olarak bulunur.

5) $\mu = A$ ve $\nu = R$ ile $\mu = R$ ve $\nu = A$ durumları toplanıp 2'ye bölüneceği için (A.1) denklemi,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\frac{\partial L_{,AR}}{\partial A} + \alpha_2\frac{\partial L_{,AR}}{\partial C} + \alpha_3\frac{\partial L_{,AR}}{\partial R} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial A} L_{,AR} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial A} L_{,CR} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial A} L_{,RR} \\
&+\frac{\partial \alpha_1}{\partial R} L_{,AA} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial R} L_{,CA} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial R} L_{,RA} = 0
\end{aligned} \tag{A.13}$$

olur. İlgili Hessian matris elemanları ve türevleri,

$$\begin{aligned}
L_{,AA} &= 0, \qquad L_{,AC} = \gamma f_R, \qquad L_{,RC} = 2\gamma A f_{RR} \qquad L_{,RR} = 0 \\
L_{,AR} &= \left[Cf + (2-CR) f_R\right] C f_{RR} \\
\frac{\partial L_{,AR}}{\partial A} &= 0 \\
\frac{\partial L_{,AR}}{\partial C} &= \gamma f_{RR} + C f_{RR}\left(f - R f_R\right) \\
\frac{\partial L_{,AR}}{\partial R} &= \gamma C f_{RRR} + C f_{RR}^2\left(2-CR\right)
\end{aligned} \tag{A.14}$$

olur ve bulunan sonuçlar yerine yerleştirilince 5.diferansiyel denklem,

$$\begin{aligned}
&\left[C\left(2-CR\right)\alpha_3 f_{RR} - 2\alpha_2 f_R\right] f_{RR} \\
&+\gamma\Big[f_R\frac{\partial \alpha_2}{\partial R} + \Big(2\alpha_2 + C\frac{\partial \alpha_1}{\partial A} + 2A\frac{\partial \alpha_2}{\partial A} + C\frac{\partial \alpha_3}{\partial R}\Big) f_{RR} + C\alpha_3 f_{RRR}\Big] = 0
\end{aligned} \tag{A.15}$$

olarak bulunur.

6) $\mu = C$ ve $\nu = R$ ile $\mu = R$ ve $\nu = C$ durumları toplanıp 2'ye bölüneceği için (A.1) denklemi,

$$\alpha_1 \frac{\partial L_{,CR}}{\partial A} + \alpha_2 \frac{\partial L_{,CR}}{\partial C} + \alpha_3 \frac{\partial L_{,CR}}{\partial R} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial C} L_{,AR} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial C} L_{,CR} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial C} L_{,RR} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial R} L_{,AC} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial R} L_{,CC} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial R} L_{,RC} = 0 \tag{A.16}$$

olur. İlgili Hessian matris elemanları ve türevleri,

$$\begin{aligned} L_{,AC} &= \gamma f_R, \quad L_{,AR} = \gamma C f_{RR}, \quad L_{,CC} = \gamma \frac{A f_R}{C}, \quad L_{,RC} = 2\gamma A f_{RR}, \quad L_{,RR} = 0 \\ L_{,CR} &= \left[(Cf + (2 - CR) f_R \right] 2A f_{RR} \\ \frac{\partial L_{,CR}}{\partial A} &= 2\gamma f_{RR} \\ \frac{\partial L_{,CR}}{\partial C} &= 2A f_{RR} \left(f - R f_R \right) \\ \frac{\partial L_{,CR}}{\partial R} &= 2A\gamma f_{RRR} + 2A f_{RR}^2 \left(2 - CR \right) \end{aligned} \tag{A.17}$$

olur ve bulunan sonuçlar yerine yerleştirilince 6.diferansiyel denklem,

$$2A\left[\left(2 - CR\right)\alpha_3 f_{RR} + \left(f - R f_R\right)\alpha_2\right] f_{RR} + \gamma\Big[\Big(\frac{\partial \alpha_1}{\partial R} + \frac{A}{C}\frac{\partial \alpha_2}{\partial R}\Big) f_R + \Big(2\alpha_1 + C\frac{\partial \alpha_1}{\partial C} + 2A\frac{\partial \alpha_2}{\partial C} + 2A\frac{\partial \alpha_3}{\partial R}\Big) f_{RR} + 2A\alpha_3 f_{RRR}\Big] = 0 \tag{A.18}$$

olarak bulunur.

B Einstein-Weyl-Eddington Yerçekimi Kuramında Noether Vektör Bileşenleri

Einstein-Weyl Eddington yerçekimi kuramında, küresel simetrik metrik için yazılan noktasal Lagrangian'dan hareketle bulunan Hessian matris ve Lie türevinin bu noktasal Lagrangian'a etki etmesi sonucunda hesaplanan diferansiyel denklemlerden Noether vektörü bileşenleri bulunabilir. α vektör alanı bileşeni olmak üzere Noether vektörü,

$$\vec{\mathbf{N}} = \alpha^i(\vec{q})\frac{\partial}{\partial q^i} \tag{B.1}$$

olarak tanımlanır. Daha önce 2.3.1 bölümünde genel durum için bulunan hesaplar sonucunda Noether vektör bileşenleri şu denklemle bulunur:

$$\alpha^k \frac{\partial L_{,ij}}{\partial q^k} + 2\frac{\partial \alpha^k}{\partial q^i} L_{,kj} = 0 \quad \text{burada} \quad L_{,ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial q'^i \partial q'^j} \tag{B.2}$$

$q_1 = A$, $q_2 = \Lambda_0$, $q_3 = \Lambda_2$ olarak tanımlanırsa, Noether vektör bileşenleri $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ olur. Burada A genelleştirilmiş koordinatına karşı α_1, Λ_0 genelleştirilmiş koordinatına karşı α_2 ve Λ_2 genelleştirilmiş koordinatına karşı α_3 bileşenleri karşılık gelmektedir. Ayrıca k indisi üzerinden toplam açıldığında,

$$\alpha_1 \frac{\partial L_{,ij}}{\partial A} + \alpha_2 \frac{\partial L_{,ij}}{\partial \Lambda_0} + \alpha_3 \frac{\partial L_{,ij}}{\partial \Lambda_2} + 2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q^i} L_{,Aj} + 2\frac{\partial \alpha_2}{\partial q^i} L_{,\Lambda_0 j} + 2\frac{\partial \alpha_3}{\partial q^i} L_{,\Lambda_2 j} = 0 \tag{B.3}$$

olarak bulunur. Burada 9 tane diferansiyel denklem vardır ama $L_{,ij} = L_{,ji}$ simetrisinden dolayı denklem sayısı 6 olur. Daha önce bulunan Hessian matris elemanları kullanılarak bu diferansiyel denklemler bulunabilir. Hesaplanan Hessian matris elemanlarının birleştirilmiş hali şu şekildedir:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial A'\partial A'} &= \frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)^2-\frac{\Theta}{\Psi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)+\frac{1}{\Psi}\frac{\sqrt{\Delta}}{3}\left(\Theta+\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial A'^2}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{4\Psi^2}\left(\Theta+\frac{1}{3}\sqrt{\Delta}\right)\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)^2\right]\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)^2\\
\frac{\partial^2 L}{\partial \Lambda_0'\partial \Lambda_0'} &= \frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_0'}\right)^2\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)^2\\
\frac{\partial^2 L}{\partial \Lambda_2'\partial \Lambda_2'} &= \frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_2'}\right)^2\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)^2\\
\frac{\partial^2 L}{\partial A'\partial \Lambda_0'} &= \frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left[-\frac{\Theta}{2\Psi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_0'}\right)+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_0'}\right)\right.\\
&\quad\left.-\sqrt{\Delta}\left(\frac{2\Theta+\sqrt{\Delta}}{\Theta-\sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial A'\partial \Lambda_0'}\right)\right]\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)^2\\
\frac{\partial^2 L}{\partial A'\partial \Lambda_2'} &= \frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left[-\frac{\Theta}{2\Psi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_2'}\right)+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_2'}\right)\right]\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)^2\\
\frac{\partial^2 L}{\partial \Lambda_2'\partial \Lambda_0'} &= \frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_2'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_0'}\right)\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)^2 \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}
$$

(B.3) denklemleri için Hessian matris elemanlarının q^i türevleri yani A , Λ_0 ve Λ_2 türevleri bulunmalıdır. Hessian matris elemanlarının ortak çarpanı ayrı bir kısaltma olarak yazılır.

$$
\xi=\frac{Ar^4}{\Psi}\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)^2 \qquad \text{(B.5)}
$$

Bu ξ kısaltmasının türevleri şunlardır:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial A} &= \xi\left[\frac{1}{A}-\left(1-\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\right)\left(\frac{\partial\ln\Psi}{\partial A}\right)-\frac{\Theta+2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A}\right)\right]\\
\frac{\partial\xi}{\partial \Lambda_0} &= \xi\left[\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial\ln\Omega}{\partial \Lambda_0}\right)-\frac{\Theta+2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_0}\right)\right]\\
\frac{\partial\xi}{\partial \Lambda_2} &= \xi\left[\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial\ln\Omega}{\partial \Lambda_2}\right)-\frac{\Theta+2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \Lambda_2}\right)\right] \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}
$$

1) $i=A$ ve $j=A$ için (B.3) denklemi,

$$
\alpha_1\frac{\partial L_{,AA}}{\partial A}+\alpha_2\frac{\partial L_{,AA}}{\partial \Lambda_0}+\alpha_3\frac{\partial L_{,AA}}{\partial \Lambda_2}+2\frac{\partial\alpha_1}{\partial A}L_{,AA}+2\frac{\partial\alpha_2}{\partial A}L_{,\Lambda_0 A}+2\frac{\partial\alpha_3}{\partial A}L_{,\Lambda_2 A}=0 \qquad \text{(B.7)}
$$

olur ve ilgili türevler yerine koyulursa,

$$
\begin{aligned}
& \alpha_1\left[\frac{1}{A}-\left(1-\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\right)\left(\frac{\partial\ln\Psi}{\partial A}\right)-\frac{\Theta+2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A}\right)\right]L_{,AA} \\
+ \quad & \alpha_1\xi\frac{\partial}{\partial A}\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)^2-\frac{\Theta}{\Psi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)+\frac{1}{\Psi}\frac{\sqrt{\Delta}}{3}\left(\Theta+\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial A'^2}\right)\right. \\
& \left.+\frac{1}{4\Psi^2}\left(\Theta+\frac{1}{3}\sqrt{\Delta}\right)\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)^2\right] \\
+ \quad & \alpha_2\left[\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial\ln\Omega}{\partial\Lambda_0}\right)-\frac{\Theta+2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_0}\right)\right]L_{,AA} \\
+ \quad & \alpha_2\xi\frac{\partial}{\partial\Lambda_0}\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)^2-\frac{\Theta}{\Psi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)+\frac{1}{\Psi}\frac{\sqrt{\Delta}}{3}\left(\Theta+\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial A'^2}\right)\right. \\
& \left.+\frac{1}{4\Psi^2}\left(\Theta+\frac{1}{3}\sqrt{\Delta}\right)\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)^2\right] \\
+ \quad & \alpha_3\left[\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial\ln\Omega}{\partial\Lambda_2}\right)-\frac{\Theta+2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_2}\right)\right]L_{,AA} \\
+ \quad & \alpha_3\xi\frac{\partial}{\partial\Lambda_2}\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)^2-\frac{\Theta}{\Psi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A'}\right)+\frac{1}{\Psi}\frac{\sqrt{\Delta}}{3}\left(\Theta+\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial A'^2}\right)\right. \\
& \left.+\frac{1}{4\Psi^2}\left(\Theta+\frac{1}{3}\sqrt{\Delta}\right)\left(\Theta-\sqrt{\Delta}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial A'}\right)^2\right] \\
+ \quad & 2\frac{\partial\alpha_1}{\partial A}L_{,AA}+2\frac{\partial\alpha_2}{\partial A}L_{,\Lambda_0 A}+2\frac{\partial\alpha_3}{\partial A}L_{,\Lambda_2 A}=0
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

olarak bulunur.

2) $i=\Lambda_0$ ve $j=\Lambda_0$ için (B.3) denklemi,

$$
\alpha_1\frac{\partial L_{,\Lambda_0\Lambda_0}}{\partial A}+\alpha_2\frac{\partial L_{,\Lambda_0\Lambda_0}}{\partial\Lambda_0}+\alpha_3\frac{\partial L_{,\Lambda_0\Lambda_0}}{\partial\Lambda_2}+2\frac{\partial\alpha_1}{\partial\Lambda_0}L_{,A\Lambda_0}+2\frac{\partial\alpha_2}{\partial\Lambda_0}L_{,\Lambda_0\Lambda_0}+2\frac{\partial\alpha_3}{\partial\Lambda_0}L_{,\Lambda_2\Lambda_0}=0
\tag{B.9}
$$

Buradan ilgili türevler yerine koyulursa,

$$
\begin{aligned}
& \alpha_1\left[-\frac{1}{A}-\left(1-\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\right)\left(\frac{\partial\ln\Psi}{\partial A}\right)-\frac{\Theta+2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A}\right)\right]L_{,\Lambda_0\Lambda_0} \\
+ \quad & \alpha_2\left[\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial\ln\Omega}{\partial\Lambda_0}\right)-\frac{\Theta+2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_0}\right)\right]L_{,\Lambda_0\Lambda_0} \\
+ \quad & \alpha_3\left[\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial\ln\Omega}{\partial\Lambda_2}\right)-\frac{\Theta+2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_2}\right)\right]L_{,\Lambda_0\Lambda_0} \\
+ \quad & 2\frac{\partial\alpha_1}{\partial\Lambda_0}L_{,A\Lambda_0}+2\frac{\partial\alpha_2}{\partial\Lambda_0}L_{,\Lambda_0\Lambda_0}+2\frac{\partial\alpha_3}{\partial\Lambda_0}L_{,\Lambda_2\Lambda_0}=0
\end{aligned}
\tag{B.10}
$$

olarak bulunur.

3) $i=\Lambda_2$ ve $j=\Lambda_2$ için (B.3) denklemi,

$$\alpha_1\frac{\partial L_{,\Lambda_2\Lambda_2}}{\partial A}+\alpha_2\frac{\partial L_{,\Lambda_2\Lambda_2}}{\partial\Lambda_0}+\alpha_3\frac{\partial L_{,\Lambda_2\Lambda_2}}{\partial\Lambda_2}+2\frac{\partial\alpha_1}{\partial\Lambda_2}L_{,A\Lambda_2}+2\frac{\partial\alpha_2}{\partial\Lambda_2}L_{,\Lambda_0\Lambda_2}+2\frac{\partial\alpha_3}{\partial\Lambda_2}L_{,\Lambda_2\Lambda_2}=0 \tag{B.11}$$

olur ve ilgili türevler yerine koyulursa,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\left[\frac{1}{A}-\left(1-\frac{\left(\Theta+\sqrt{\Delta}\right)^2}{2\Delta}\right)\left(\frac{\partial\ln\Psi}{\partial A}\right)-\frac{\Theta+2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial A}\right)\right]L_{,\Lambda_2\Lambda_2}\\
+\ &\alpha_2\left[\frac{\left(\Theta+\sqrt{\Delta}\right)^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial\ln\Omega}{\partial\Lambda_0}\right)-\frac{\Theta+2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_0}\right)\right]L_{,\Lambda_2\Lambda_2}\\
+\ &\alpha_3\left[\frac{\left(\Theta+\sqrt{\Delta}\right)^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial\ln\Omega}{\partial\Lambda_2}\right)-\frac{\Theta+2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_2}\right)\right]L_{,\Lambda_2\Lambda_2}\\
+\ &2\frac{\partial\alpha_1}{\partial\Lambda_2}L_{,A\Lambda_2}+2\frac{\partial\alpha_2}{\partial\Lambda_2}L_{,\Lambda_0\Lambda_2}+2\frac{\partial\alpha_3}{\partial\Lambda_2}L_{,\Lambda_2\Lambda_2}=0
\end{aligned} \tag{B.12}$$

olarak bulunur.

4) $i=A$ ve $j=\Lambda_0$ ile $i=\Lambda_0$ ve $j=A$ durumları toplanıp 2'ye bölüneceği için (B.3) denklemi,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\frac{\partial L_{,A\Lambda_0}}{\partial A}+\alpha_2\frac{\partial L_{,A\Lambda_0}}{\partial\Lambda_0}+\alpha_3\frac{\partial L_{,A\Lambda_0}}{\partial\Lambda_2}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial A}L_{,A\Lambda_0}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial A}L_{,\Lambda_0\Lambda_0}+\frac{\partial\alpha_3}{\partial A}L_{,\Lambda_2\Lambda_0}\\
&+\frac{\partial\alpha_1}{\partial\Lambda_0}L_{,AA}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial\Lambda_0}L_{,\Lambda_0A}+\frac{\partial\alpha_3}{\partial\Lambda_0}L_{,\Lambda_2A}=0
\end{aligned} \tag{B.13}$$

olur ve ilgili türevler yerine koyulursa,

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \left[\frac{1}{A} - \left(1 - \frac{\left(\Theta + \sqrt{\Delta}\right)^2}{2\Delta}\right)\left(\frac{\partial \ln \Psi}{\partial A}\right) - \frac{\Theta + 2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial A}\right)\right] L_{,A\Lambda_0} \qquad \text{(B.14)}\\
+ \quad &\alpha_1 \xi \frac{\partial}{\partial A}\left[-\frac{\Theta}{2\Psi}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_0'}\right) + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_0'}\right)\right.\\
&\left. - \sqrt{\Delta}\left(\frac{2\Theta + \sqrt{\Delta}}{\Theta - \sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial A' \partial \Lambda_0'}\right)\right]\\
+ \quad &\alpha_2 \left[\frac{\left(\Theta + \sqrt{\Delta}\right)^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \Lambda_0}\right) - \frac{\Theta + 2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_0}\right)\right] L_{,A\Lambda_0}\\
+ \quad &\alpha_2 \xi \frac{\partial}{\partial \Lambda_0}\left[-\frac{\Theta}{2\Psi}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_0'}\right) + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_0'}\right)\right.\\
&\left. - \sqrt{\Delta}\left(\frac{2\Theta + \sqrt{\Delta}}{\Theta - \sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial A' \partial \Lambda_0'}\right)\right]\\
+ \quad &\alpha_3 \left[\frac{\left(\Theta + \sqrt{\Delta}\right)^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \Lambda_2}\right) - \frac{\Theta + 2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2}\right)\right] L_{,A\Lambda_0}\\
+ \quad &\alpha_3 \xi \frac{\partial}{\partial \Lambda_2}\left[-\frac{\Theta}{2\Psi}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_0'}\right) + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_0'}\right)\right.\\
&\left. - \sqrt{\Delta}\left(\frac{2\Theta + \sqrt{\Delta}}{\Theta - \sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial A' \partial \Lambda_0'}\right)\right]\\
+ \quad &\frac{\partial \alpha_1}{\partial A} L_{,A\Lambda_0} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial A} L_{,\Lambda_0\Lambda_0} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial A} L_{,\Lambda_2\Lambda_0} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \Lambda_0} L_{,AA} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Lambda_0} L_{,\Lambda_0 A} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \Lambda_0} L_{,\Lambda_2 A} = 0
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

5) $i = A$ ve $j = \Lambda_2$ ile $i = \Lambda_2$ ve $j = A$ durumları toplanıp 2'ye bölüneceği için (B.3) denklemi,

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \frac{\partial L_{,A\Lambda_2}}{\partial A} + \alpha_2 \frac{\partial L_{,A\Lambda_2}}{\partial \Lambda_0} + \alpha_3 \frac{\partial L_{,A\Lambda_2}}{\partial \Lambda_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial A} L_{,A\Lambda_2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial A} L_{,\Lambda_0\Lambda_2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial A} L_{,\Lambda_2\Lambda_2}\\
&+ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \Lambda_2} L_{,AA} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Lambda_2} L_{,\Lambda_0 A} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \Lambda_2} L_{,\Lambda_2 A} = 0 \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}
$$

olur ve ilgili türevler yerine koyulursa,

$$
\begin{aligned}
& \alpha_1 \left[\frac{1}{A} - \left(1 - \frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\right)\left(\frac{\partial \ln \Psi}{\partial A}\right) - \frac{\Theta + 2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial A}\right)\right] L_{,A\Lambda_2} \qquad \text{(B.16)} \\
+ \;& \alpha_1 \xi \left[-\frac{1}{2\Psi}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial A}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2'}\right) + \frac{\Theta}{2\Psi^2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial A}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2'}\right)\right. \\
& \left. -\frac{\Theta}{2\Psi}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial A \partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2'}\right) + \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial A \partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2'}\right)\right] \\
+ \;& \alpha_2 \left[\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \Lambda_0}\right) - \frac{\Theta + 2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_0}\right)\right] L_{,A\Lambda_2} \\
+ \;& \alpha_2 \xi \left[-\frac{1}{2\Psi}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_0}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2'}\right) + \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \Lambda_0 \partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2'}\right)\right] \\
+ \;& \alpha_3 \left[\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \Lambda_2}\right) - \frac{\Theta + 2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2}\right)\right] L_{,A\Lambda_2} \\
+ \;& \alpha_3 \xi \left[-\frac{1}{2\Psi}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2}\right)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2'}\right) + \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \Lambda_2 \partial A'}\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2'}\right)\right] \\
+ \;& \frac{\partial \alpha_1}{\partial A} L_{,A\Lambda_2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial A} L_{,\Lambda_0\Lambda_2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial A} L_{,\Lambda_2\Lambda_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \Lambda_2} L_{,AA} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Lambda_2} L_{,\Lambda_0 A} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \Lambda_2} L_{,\Lambda_2 A} = 0
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

6) $i = \Lambda_0$ ve $j = \lambda_2$ ile $i = \Lambda_2$ ve $j = \Lambda_0$ durumları toplanıp 2'ye bölüneceği için için (B.3) denklemi,

$$
\begin{aligned}
& \alpha_1 \frac{\partial L_{,\Lambda_0\Lambda_2}}{\partial A} + \alpha_2 \frac{\partial L_{,\Lambda_0\Lambda_2}}{\partial \Lambda_0} + \alpha_3 \frac{\partial L_{,\Lambda_0\Lambda_2}}{\partial \Lambda_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \Lambda_0} L_{,A\Lambda_2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Lambda_0} L_{,\Lambda_0\Lambda_2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \Lambda_0} L_{,\Lambda_2\Lambda_2} \\
& + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \Lambda_2} L_{,A\Lambda_0} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Lambda_2} L_{,\Lambda_0\Lambda_0} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \Lambda_2} L_{,\Lambda_2\Lambda_0} = 0 \qquad \text{(B.17)}
\end{aligned}
$$

olur ve ilgili türevler yerine koyulursa,

$$
\begin{aligned}
& \alpha_1 \left[-\left(1 - \frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\right)\left(\frac{\partial \ln \Psi}{\partial A}\right) - \frac{\Theta + 2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial A}\right)\right] L_{,\Lambda_0\Lambda_2} \qquad \text{(B.18)} \\
+ \;& \alpha_2 \left[\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \Lambda_0}\right) - \frac{\Theta + 2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_0}\right)\right] L_{,\Lambda_0\Lambda_2} \\
+ \;& \alpha_3 \left[\frac{(\Theta+\sqrt{\Delta})^2}{2\Delta}\left(\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \Lambda_2}\right) - \frac{\Theta + 2\sqrt{\Delta}}{\Delta}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda_2}\right)\right] L_{,\Lambda_0\Lambda_2} \\
+ \;& \frac{\partial \alpha_1}{\partial \Lambda_0} L_{,A\Lambda_2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Lambda_0} L_{,\Lambda_0\Lambda_2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \Lambda_0} L_{,\Lambda_2\Lambda_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \Lambda_2} L_{,A\Lambda_0} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Lambda_2} L_{,\Lambda_0\Lambda_0} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \Lambda_2} L_{,\Lambda_2\Lambda_0} = 0
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Burada kısaltma amacıyla açılmayan türevlerin açık hali şu şekildedir:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Theta}{\partial A} &= -\frac{A'}{A^2}\left(\frac{2\Lambda_{10}}{r}+\frac{\Lambda_0'}{2}\right)\\
\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_0} &= \frac{\delta}{4\delta+2\gamma}\mathbf{X}\\
\frac{\partial\Theta}{\partial\Lambda_2} &= \frac{\delta}{2\delta+\gamma}\mathbf{X}\\
\frac{\partial\Psi}{\partial A} &= -\frac{4A'\Lambda_{11}}{A^2 r}\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda_0} &= \frac{1}{4\delta+2\gamma}\left[\widetilde{\Lambda}_2\frac{2\delta+2\gamma}{\delta-\gamma}-\widetilde{\Lambda}_0\frac{3\delta+\gamma}{\delta-\gamma}-\frac{2\delta}{r^2}\right]\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda_2} &= \frac{1}{4\delta+2\gamma}\left[\widetilde{\Lambda}_0\frac{2\delta+2\gamma}{\delta-\gamma}-\widetilde{\Lambda}_2\frac{4\delta}{\delta-\gamma}+\frac{4\delta+4\gamma}{r^2}\right]\\
\frac{\partial^2\Psi}{\partial A\partial A'} &= -\frac{4}{A^2 r}\left(\Lambda_{11}+\frac{A'}{Ar}\frac{\delta^2-\gamma^2}{2\delta+\gamma}\right)\\
\frac{\partial^2\Theta}{\partial A\partial A'} &= -\frac{1}{A^2}\left(\frac{2\Lambda_{10}}{r}+\frac{\Lambda_0'}{2}\right)\\
\frac{\partial^2\Theta}{\partial\Lambda_0\partial A'} &= \frac{2}{Ar}\frac{\delta}{4\delta+2\gamma}\\
\frac{\partial^2\Theta}{\partial\Lambda_2\partial A'} &= \frac{2}{Ar}\frac{\delta}{2\delta+\gamma}
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

Bulunan tüm diferansiyel denklemler kullanılarak α_1, α_2 ve α_3 Noether vektör bileşenleri bulunabilir.

KAYNAKLAR

[1] A. Einstein, ”On the electrodynamics of moving bodies,” Annalen Phys. **17**, 891-921 (1905) doi:10.1002/andp.200590006

[2] A. Einstein, ”The Foundation of the General Theory of Relativity,” Annalen Phys. **49**, no.7, 769-822 (1916) doi:10.1002/andp.200590044

[3] K. Schwarzschild, ”On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory,” Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1916**, 189-196 (1916) [arXiv:physics/9905030 [physics]].

[4] A. Friedman, ”On the Curvature of space,” Z. Phys. **10**, 377-386 (1922) doi:10.1007/BF01332580

[5] G Lemaître, ”Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques,” Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, A47, p. 49-59 1927.

[6] E. Hubble, ”A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae,” Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168-173 (1929) doi:10.1073/pnas.15.3.168

[7] H. P. Robertson, ”Kinematics and World-Structure,” Astrophys. J. **82**, 284-301 (1935) doi:10.1086/143681

[8] Walker, A. G. ”On Milne’s theory of world-structure” Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, 42 (1): 90-127 (1937).

[9] Richard Feynman, Feynman Lectures on Gravitation, 1962.

[10] F. Zwicky, ”Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln,” Helv. Phys. Acta **6**, 110-127 (1933) doi:10.1007/s10714-008-0707-4

[11] F. Zwicky, ”On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae,” Astrophys. J. **86**, 217-246 (1937) doi:10.1086/143864

[12] Oort, J. H., ”The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems”, Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, Vol. 6, p.249,1932

[13] Oort, J. H., ”Some Problems Concerning the Structure and Dynamics of the Galactic System and the Elliptical Nebulae NGC 3115 and 4494.” Astrophysical Journal, vol. 91, p.273, 1940

[14] V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr., ”Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions,” Astrophys. J. **159**, 379-403 (1970) doi:10.1086/150317

[15] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni and A. Troisi, ”Can higher order curvature theories explain rotation curves of galaxies?,” Phys. Lett. A **326**, 292-296 (2004) doi:10.1016/j.physleta.2004.04.081 [arXiv:gr-qc/0404114 [gr-qc]].

[16] C. G. Boehmer, T. Harko and F. S. N. Lobo, ”Dark matter as a geometric effect in f(R) gravity,” Astropart. Phys. **29**, 386-392 (2008) doi:10.1016/j.astropartphys.2008.04.003 [arXiv:0709.0046 [gr-qc]].

[17] S. Capozziello, P. Jovanović, V. B. Jovanović and D. Borka, ”Addressing the missing matter problem in galaxies through a new fundamental gravitational radius,” JCAP **06**, 044 (2017) doi:10.1088/1475-7516/2017/06/044 [arXiv:1702.03430 [gr-qc]].

[18] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team], ”Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” Astron. J. **116**, 1009-1038 (1998) doi:10.1086/300499 [arXiv:astro-ph/9805201 [astro-ph]].

[19] H. Weyl, ”Gravitation and electricity,” Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1918**, 465 (1918)

[20] H. Weyl, ”A New Extension of Relativity Theory,” Annalen Phys. **59**, 101-133 (1919) doi:10.1002/andp.19193641002

[21] H. Weyl, "Reine Infinitesimalgeometrie," Math. Z. **2**, no.3-4, 384-411 (1918) doi:10.1007/BF01199420

[22] H. J. Schmidt, "The Newtonian limit of fourth order gravity," Astron. Nachr. **307**, 339-340 (1986) [arXiv:gr-qc/0106037 [gr-qc]].

[23] P. D. Mannheim, "Some exact solutions to conformal Weyl gravity," PRINT-91-0078.

[24] P. D. Mannheim, "Conformal gravity, cosmology and Newton's law," UCONN-91-2.

[25] P. D. Mannheim, "Making the Case for Conformal Gravity," Found. Phys. **42**, 388-420 (2012) doi:10.1007/s10701-011-9608-6 [arXiv:1101.2186 [hep-th]].

[26] J. T. Wheeler, "Weyl gravity as general relativity," Phys. Rev. D **90**, no.2, 025027 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.90.025027 [arXiv:1310.0526 [gr-qc]].

[27] O Bergmann, "Scalar Field Theory as a Theory of Gravitation" American Journal of Physics, Volume 24, Issue 1, pp. 38-42 (1956). 10.1119/1.1934129

[28] N. Rosen, "Bimetric Theory of Gravitation," NATO Sci. Ser. B **27**, 271-294 (1977) doi:10.1007/978-1-4684-0853-9_13

[29] A. De Felice and S. Tsujikawa, "f(R) theories," Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010) doi:10.12942/lrr-2010-3 [arXiv:1002.4928 [gr-qc]].

[30] D. Lovelock, "The Einstein tensor and its generalizations," J. Math. Phys. **12**, 498-501 (1971) doi:10.1063/1.1665613

[31] C. Brans and R. H. Dicke, "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation," Phys. Rev. **124**, 925-935 (1961) doi:10.1103/PhysRev.124.925

[32] J. D. Bekenstein, "Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm," Phys. Rev. D **70**, 083509 (2004) [erratum: Phys. Rev. D **71**, 069901 (2005)] doi:10.1103/PhysRevD.70.083509 [arXiv:astro-ph/0403694 [astro-ph]].

[33] K. S. Stelle, "Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity," Phys. Rev. D **16**, 953-969 (1977) doi:10.1103/PhysRevD.16.953

[34] K. S. Stelle, ”Classical Gravity with Higher Derivatives,” Gen. Rel. Grav. **9**, 353-371 (1978) doi:10.1007/BF00760427

[35] A. Yale and T. Padmanabhan, ”Structure of Lanczos-Lovelock Lagrangians in Critical Dimensions,” Gen. Rel. Grav. **43**, 1549-1570 (2011) doi:10.1007/s10714-011-1146-1 [arXiv:1008.5154 [gr-qc]].

[36] B. Holdom and J. Ren, ”QCD analogy for quantum gravity,” Phys. Rev. D **93**, no.12, 124030 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.124030 [arXiv:1512.05305 [hep-th]].

[37] C. Deliduman, O. Kaşıkçı and B. Yapışkan, ”Flat galactic rotation curves from geometry in Weyl gravity,” Astrophys. Space Sci. **365**, no.3, 51 (2020) doi:10.1007/s10509-020-03764-y [arXiv:1511.07731 [gr-qc]].

[38] E. Noether, ”Invariant Variation Problems,” Gott. Nachr. **1918**, 235-257 (1918) doi:10.1080/00411457108231446 [arXiv:physics/0503066 [physics]].

[39] S. M. Carroll, A. De Felice, V. Duvvuri, D. A. Easson, M. Trodden and M. S. Turner, ”he Cosmology of generalized modified gravity models,” Phys. Rev. D **71**, 063513 (2005) doi:10.1103/PhysRevD.71.063513 [arXiv:astro-ph/0410031 [astro-ph]].

[40] H. J. Schmidt, ”Fourth order gravity: Equations, history, and applications to cosmology,” eConf **C0602061**, 12 (2006) doi:10.1142/S0219887807001977 [arXiv:gr-qc/0602017 [gr-qc]].

[41] M. Borunda, B. Janssen and M. Bastero-Gil, ”Palatini versus metric formulation in higher curvature gravity,” JCAP **11**, 008 (2008) doi:10.1088/1475-7516/2008/11/008 [arXiv:0804.4440 [hep-th]].

[42] Palatini, A. ”Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton.” Rend. Circ. Matem. Palermo 43, 203–212 (1919). https://doi.org/10.1007/BF03014670

[43] A. S. Arapoglu, C. Deliduman and K. Y. Eksi, ”Constraints on Perturbative f(R) Gravity via Neutron Stars,” JCAP **07**, 020 (2011) doi:10.1088/1475-7516/2011/07/020 [arXiv:1003.3179 [gr-qc]].

[44] M. K. Cheoun, C. Deliduman, C. Güngör, V. Keleş, C. Y. Ryu, T. Kajino and G. J. Mathews, ”Neutron stars in a perturbative $f(R)$ gravity model with strong magnetic fields,” JCAP **10**, 021 (2013) doi:10.1088/1475-7516/2013/10/021 [arXiv:1304.1871 [astro-ph.HE]].

[45] V. Borka Jovanović, S. Capozziello, P. Jovanović and D. Borka, ”Recovering the fundamental plane of galaxies by $f(R)$ gravity,” Phys. Dark Univ. **14**, 73-83 (2016) doi:10.1016/j.dark.2016.10.003 [arXiv:1610.03336 [astro-ph.GA]].

[46] Wolfgang Rindler, Relativity: Special,General and Cosmological, 2006.

[47] George B. Arfken, Hans J. Weber, Mathematical Methods For Physics.

[48] M. Forger and H. Romer, ”Currents and the energy momentum tensor in classical field theory: A Fresh look at an old problem,” Annals Phys. **309**, 306-389 (2004) doi:10.1016/j.aop.2003.08.011 [arXiv:hep-th/0307199 [hep-th]].

[49] Sean M. Carroll, Lecture Notes on General Relativity, 1997.

[50] David Lovelock and Hanno Rund Tensors, Differential Forms and Variational Principles, 1975.

[51] Charles W.Misner, Kip S.Thorne, Gravitation, 1973.

[52] T. Padmanabhan, Gravitation Foundations and Frontiers-Cambridge University Press, 2010.

[53] V. Faraoni and S. Capozziello, ”Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics,” doi:10.1007/978-94-007-0165-6

[54] K. Schwarzschild, ”On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein’s theory,” Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1916**, 424-434 (1916) [arXiv:physics/9912033 [physics.hist-ph]].

[55] S. Capozziello, A. Stabile and A. Troisi, ”Spherically symmetric solutions in f(R)-gravity via Noether Symmetry Approach,” Class. Quant. Grav. **24**, 2153-2166 (2007) doi:10.1088/0264-9381/24/8/013 [arXiv:gr-qc/0703067 [gr-qc]].

[56] Arnold V, Mathematical Methods of Classical Mechanics (Berlin: Springer), 1978.

[57] P.J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Second Edition, Graduate Texts in Math., vol. 107, Springer–Verlag, New York 1993.

[58] Y. Kosmann-Schwarzbach, The Noether Theorems. Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century, Springer, New York, 2011.

[59] G. Marmo, E. Saletan, A. Simoni, B. Vitale, Dynamical Systems A Differential Geometric Approach to Symmetry and Reduction 1985.

[60] S. Capozziello and A. De Felice, "f(R) cosmology by Noether's symmetry," JCAP **08**, 016 (2008) doi:10.1088/1475-7516/2008/08/016 [arXiv:0804.2163 [gr-qc]].

[61] Morandi G, Ferrario C, Lo Vecchio G, Marmo G and Rubano C, "The inverse problem in the calculus of variations and the geometry of the tangent bundle" Physics Reports, Volume 188, Issue 3-4, p. 147-284. (1990) 10.1016/0370-1573(90)90137-Q

[62] S. Capozziello and M. De Laurentis, "Extended Theories of Gravity," Phys. Rept. **509**, 167-321 (2011) doi:10.1016/j.physrep.2011.09.003 [arXiv:1108.6266 [gr-qc]].

[63] A. Einstein, "Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity," Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1917**, 142-152 (1917)

[64] M. Milgrom, "A Modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis," Astrophys. J. **270**, 365-370 (1983) doi:10.1086/161130

[65] M. Milgrom, "A Modification of the Newtonian dynamics: Implications for galaxies," Astrophys. J. **270**, 371-383 (1983) doi:10.1086/161131

[66] M. Milgrom, "The MOND paradigm," [arXiv:0801.3133 [astro-ph]].

[67] R. B. Tully and J. R. Fisher, "A New method of determining distances to galaxies," Astron. Astrophys. **54**, 661-673 (1977)

[68] M. Milgrom, ”Testing the MOND Paradigm of Modified Dynamics with Galaxy-Galaxy Gravitational Lensing,” Phys. Rev. Lett. **111**, no.4, 041105 (2013) doi:10.1103/PhysRevLett.111.041105 [arXiv:1305.3516 [astro-ph.CO]].

[69] T. Bernal, S. Capozziello, G. Cristofano and M. De Laurentis, ”MOND’s acceleration scale as a fundamental quantity,” Mod. Phys. Lett. A **26**, 2677-2687 (2011) doi:10.1142/S0217732311037042 [arXiv:1110.2580 [gr-qc]].

[70] M. Milgrom, ”MOND: Time for a Change of Mind?,” [arXiv:0908.3842 [astro-ph.CO]].

[71] S. Mendoza, X. Hernandez, J. C. Hidalgo and T. Bernal, ”A natural approach to extended Newtonian gravity: tests and predictions across astrophysical scales,” Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **411**, 226-234 (2011) doi:10.1111/j.1365-2966.2010.17685.x [arXiv:1006.5037 [astro-ph.GA]].

[72] L.D.Landau, E.M Lifshitz, The Classical Theory of Fields,1959.

[73] T. Bernal, S. Capozziello, J. C. Hidalgo and S. Mendoza, ”Recovering MOND from extended metric theories of gravity,” Eur. Phys. J. C **71**, 1794 (2011) doi:10.1140/epjc/s10052-011-1794-z [arXiv:1108.5588 [astro-ph.CO]].

[74] E. E. Flanagan, ”Fourth order Weyl gravity,” Phys. Rev. D **74**, 023002 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.74.023002 [arXiv:astro-ph/0605504 [astro-ph]].

[75] Ronald Adler, Maurice Bazin, Menahem Schifferi; Introduction to General Relativity, 1975.

[76] C. Deliduman, O. Kaşıkçı and B. Yapışkan, ”Astrophysics with Weyl gravity,” Int. J. Mod. Phys. A **33**, no.34, 1845011 (2018) doi:10.1142/S0217751X18450112

[77] O. Kaşıkçı and C. Deliduman, ”Gravitational Lensing in Weyl Gravity,” Phys. Rev. D **100**, no.2, 024019 (2019) doi:10.1103/PhysRevD.100.024019 [arXiv:1812.01076 [gr-qc]].

[78] Mikio NAKAHARA; Geometry, Topology and Physics, 1990.

[79] Sean Carroll, An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry 2004.

[80] Bach, R. ”Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs.” Math Z 9, 110–135 (1921). https://doi.org/10.1007/BF01378338.

[81] P. R. Phillips, ”Attraction and Repulsion in Conformal Gravity,” Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **448**, no.1, 681-683 (2015) doi:10.1093/mnras/stv022 [arXiv:1502.03003 [gr-qc]].

[82] P. D. Mannheim, ”Schwarzschild limit of conformal gravity in the presence of macroscopic scalar fields,” Phys. Rev. D **75**, 124006 (2007) doi:10.1103/PhysRevD.75.124006 [arXiv:gr-qc/0703037 [gr-qc]].

[83] D. Psaltis, ”Probes and Tests of Strong-Field Gravity with Observations in the Electromagnetic Spectrum,” Living Rev. Rel. **11**, 9 (2008) doi:10.12942/lrr-2008-9 [arXiv:0806.1531 [astro-ph]].

[84] Arthur Eddington, The Mathematical Theory of Relativity, 1930.

[85] M. Banados and P. G. Ferreira, ”Eddington’s theory of gravity and its progeny,” Phys. Rev. Lett. **105**, 011101 (2010) [erratum: Phys. Rev. Lett. **113**, no.11, 119901 (2014)] doi:10.1103/PhysRevLett.105.011101 [arXiv:1006.1769 [astro-ph.CO]].

[86] H. Nariai and K. Tomita, ”On the removal of initial singularity in a big-bang universe in terms of a renormalized theory of gravitation. 2. criteria for obtaining a physically reasonable model,” Prog. Theor. Phys. **46**, 776-786 (1971) doi:10.1143/PTP.46.776

[87] K. Tomita, T. Azuma and H. Nariai, ”ON ANISOTROPIC AND HOMOGENEOUS COSMOLOGICAL MODELS IN THE RENORMALIZED THEORY OF GRAVITATION,” RRK 78-10.

[88] V. Müller and H.-J. Schmidt, Gen. Rel. Grav. **17** (1985) 769.

[89] H.-J. Schmidt and V. Müller, Gen. Rel. Grav. **17** (1985) 971.

[90] L. Parker and J. Z. Simon, ”Einstein equation with quantum corrections reduced to second order,” Phys. Rev. D **47**, 1339-1355 (1993) doi:10.1103/PhysRevD.47.1339 [arXiv:gr-qc/9211002 [gr-qc]].