T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ CHERN YALITKANLARINDA TEMEL DURUM DEJENERELİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeki ZEYBEK

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Rifat Onur UMUCALILAR

Haziran 2021

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ CHERN YALITKANLARINDA TEMEL DURUM DEJENERELİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeki ZEYBEK

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Rifat Onur UMUCALILAR

Haziran 2021

TEŞEKKÜR

Bir bilim insanı olma amacıyla çıktığım bu yolda, bana araştırma yapmanın inceliklerini öğreten, karşılaştığımız problemlerle yüzleşirken kendisinden düşünmeyi öğrendiğim, gerek akademik gerekse güncel hayatta her zaman bana destek olan ve birçok konuda kendime güvenmemi sağlayan değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Rifat Onur Umucalılar'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Bu yolculukta edindiğim bütün akademik ve sosyal beceriler gösterdiği ilgi ve alaka olmadan var olamazlardı.

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni hep destekleyen ve hayallerimin peşinde koşmama olanak sağlayan aileme ve beni fizik bilimi ile tanıştırıp yanına Padawan'ı olarak alan, bilimsel hayatımın temelini atan, değerli dostum Ömer Faruk Başoğlu'na en derin şükranlarımı sunuyorum. Mimar Sinan Güzel Sanatlar Fizik bölümünde olan hocalarıma, verdikleri üst seviye eğitimden ve bilim insanı yetiştirme konusunda sağladıkları rehberlikten ötürü en içten duygularımla teşekkür ediyorum.

Bu tez çalışması, 2504-TÜBİTAK-CNR "Uluslararası İkili İşbirliği Programı" dahilindeki "119N192" nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

Zeki ZEYBEK

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR i

TABLO LİSTESİ iii

ŞEKİL LİSTESİ iv

SEMBOL LİSTESİ vii

ÖZET ix

SUMMARY x

1 GİRİŞ 1

2 KUANTUM HALL ETKİSİ 4
2.1 Tam Sayılı Kuantum Hall Etkisi ve Landau Seviyeleri 5
2.2 Kesirli Kuantum Hall Etkisi 9

3 ÖRGÜ MODELİ: HARPER-HOFSTADTER HAMİLTONYENİ 13
3.1 Örgüde Tek-Parçacık Problemi 13
3.2 Optik Örgülerde Kesirli Kuantum Hall Fazı 20

4 KESİRLİ CHERN YALITKANLARINDA KUAZİDEŞİK UYARILMASI 28
4.1 Dejenere Kuazi-Deşik Manifoldu 29
4.2 Genelleştirilmiş Kuazi-Deşik Sayma Prensibi 34
4.2.1 Genelleştirilmiş Pauli Dışlama İlkesi 34
4.2.2 Küre Üzerinde Kuazi-Deşik Sayması 35
4.2.3 Torus Üzerinde Kuazi-Deşik Sayması 37
4.3 Sert Bozon Durumu 40
4.4 Sonlu Etkileşim Durumu 44

5 SONUÇ 52

KAYNAKLAR 54

A En Düşük Bant Yaklaştırması 60

B En Düşük Landau Seviyesi Yaklaştırması 63

C Çok-Parçacık Chern Sayısının Nümerik Hesaplanması 65

TABLO LİSTESİ

4.1 $N = 2$ parçacıklı sert-bozon sistemi için çok-parçacık Chern sayısı hesabı sunulmuştur. N_d burada delokalize olan akı sayısını belirtir. Aynı ana doluluk oranına karşılık gelen farklı Laughlin kuazi-deşik uyarılmalarını oluşturan durumların Chern sayısı ve dejenerelikleri verilmşltir. $C/\mathscr{D}$ ile grubu oluşturan durum başına düşen Chern sayıları verilmiştir 43

ŞEKİL LİSTESİ

2.1 Hall etkisi düzeneğinin temsili. Yatay direncin ve Hall direncinin klasik olarak manyetik alanın değişmesine göre gösterdikleri profil. [20] kaynağından tekrar çizilmiştir. 5
2.2 Tam Sayılı Kuantum Hall etkisi. Klasik profile kıyasla dirençler kuantize olup, belirli bir manyetik alan aralığında atlama yapmadan önce kuantizasyonlarını sürdürürler. [21] kaynağından alınmıştır. 6
2.3 Kesirli Kuantum Hall etkisi. Klasik profile kıyasla dirençler kuantize olup, belirli bir manyetik alan aralığında atlama yapmadan önce kuantizasyonlarını sürdürürler. Fakat bu kez kuantizasyonlar kesirli sayılarda olurlar. [4] kaynağından alınmıştır. 9

3.1 Kare örgü üzerinde kinetik atlamalar verilmiştir. Manyetik alan altında bir plaket etrafında parçacığın tur atması ile alınan Aharonov-Bohm fazı Peierls fazı ile ifade edilir. 14
3.2 Hofstadter Kelebeği. Enerji spektrumu p ve q karşılıklı asal olmak üzere, $\phi = p/q$ değişkenine bağlı şekilde çizilmiştir. Enerjinin maksimum ve minimum noktalarından itibaren bantlar çizilmiştir. 19
3.3 Kare örgü üzerinde torus sınır koşulları verilmiştir. Sadece birer yatay ve dikey kısım temsil edilmiştir. Bu uçtan uca atlamalar bütün örgüyü kapsayacak şekilde modele ilave edilir. 23
3.4 $L_x = 4, L_y = 8$ örgü üzerinde, $N = 2$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/8$ olan sistemin enerji spektrumu. Özdeğerler küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. 25
3.5 $L_x = 6, L_y = 10$ örgü üzerinde, $N = 3$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/10$ olan sistemin enerji spektrumu. Özdeğerler küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. 25

4.1 $L_x = 11, L_y = 10$ örgü üzerinde, $N = 5$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/10$ olan sistemin safsızlık potansiyeli varlığında ve yokluğundaki enerji spektrumu. Özdeğerler küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. Etkileşim ve safsızlık şiddeti $U = 2t$ ve $V = 2t$ olarak alınmıştır. 31

4.2 $L_x = 11, L_y = 10$ örgü üzerinde, $N = 5$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/10$ olan sistemin safsızlık potansiyeli varlığında (c ve d iki lokalize dejenere durum) ve yokluğundaki (a ve b iki delokalize durum) yoğunluk profilleri. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. Etkileşim ve safsızlık şiddeti $U = 2t$ ve $V = 2t$ olarak alınmıştır. Çakılı durumlarda safsızlık potansiyeli merkezde olacak şekilde konulmuştur. 32
4.3 $L_x = 11, L_y = 10$ örgü üzerinde, $N = 5$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/10$ olan sistemin safsızlık potansiyeli varlığındaki yoğunluk profili ve yoğunluk seyrelmesi. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. Etkileşim ve safsızlık şiddeti $U = 2t$ ve $V = 2t$ olarak alınmıştır. Çakılı durumlarda safsızlık potansiyeli merkezde olacak şekilde konulmuştur. Seyrelme $1/2$ noktasında doygunluğa ulaşmıştır. 33
4.4 $L_x = 10, L_y = 20$ örgü üzerinde, $N = 2$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/20$ olan sistemin enerji spektrumu. Özdeğerler küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. Gömülü figürde ise kuazi-deşik manifoldunun tümünün üst enerji seviyelerden ayrılması verilmiştir. 41
4.5 $L_x = 10, L_y = 20$ örgü üzerinde, $N = 2$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/20$ olan sistemin enerji spektrumu. Özdeğerler küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. Sistemin doluluk oranı farklı tip Laughlin kuazi-deşik uyarılmaları olarak düşünülüp, bunlara denk gelen durumlar Chern sayısı C ile birbirinden ayrılır. Tüm durumlar için durum başına düşen Chern sayısı $1/5$'tir. . 44
4.6 $L_x = 6, L_y = 12$ örgü üzerinde, $N = 2$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/12$ sistemin $V = 0$ safsızlık potansiyeli olmadığındaki enerji spektrumu ve $L_x = 7, L_y = 12$ örgü üzerinde, $N = 2$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/12$ olan sistemin $V = 5t$ safsızlık potansiyeline maruz bırakılan durumdaki enerji spektrumu. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. 45
4.7 $L_x = 13, L_y = 18$ örgü üzerinde, $N = 4$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/18$ olan sistemin $V = 0$ safsızlık potansiyeli olmadığındaki enerji spektrumu ve $L_x = 14, L_y = 18$ örgü üzerinde, $N = 4$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/18$ sistemin $V = 5t$ safsızlık potansiyeline maruz bırakılan durumdaki enerji spektrumu. Etkileşim şiddeti $U = t$ olarak alınmıştır. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. N_ϕ manyetik akı sayısını temsil eder. 46
4.8 $L_x = 14, L_y = 18$ örgü üzerinde, $N = 4$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/18$ olan sistemin safsızlık potansiyeli varlığındaki yoğunluk profili ve yoğunluk seyrelmesi. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. Etkileşim ve safsızlık şiddeti $U = t$ ve $V = 5t$ olarak alınmıştır. Çakılı durumlarda safsızlık potansiyeli merkez olacak şekilde konulmuştur. Seyrelme $4/13$ noktasında doygunluğa ulaşmıştır. 47

4.9 $N = 3$ parçacıklı ve sırasıyla $N/N_\phi = 3/13$ ve $N/N_\phi = 3/14$ manyetik akılı, $\phi = 1/25$ ve $\phi = 1/30$ akı yoğunluklu modellerin yük seyrelmesi profili verilmiştir. Kesik çizgiler bu iki durum için lokalize kuazi-deşiklerin ($N_l = 1$) yükünün doygunluğa ulaştığı $3/12$ ve $3/13$ değerlerine karşılık gelir. 49
4.10 (a) $N/N_\phi = 3/12$ ve (b) $N/N_\phi = 3/13$ model sistemlerinin çeşitli $\phi = p/q$ akı yoğunlukları için peşpeşe durumların farklarının en büyük on tanesi logaritmik ölçekte verilmiştir. Manifold içinde kuazi-deşik uyarılmalarına ek olarak gelen atlamalar belirtilmiştir. 50

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{E}$	: Elektrik alan
$\mathbf{B}$	: Manyetik alan
τ	: Saçınım süresi
e	: Elektron yükü
$\mathbf{J}$	: Akım yoğunluğu
n	: Parçacık yoğunluğu
I	: Akım
V_H	: Hall voltajı
ω_B	: Siklotron frekansı
σ	: İletkenlik tensörü
ρ	: Direnç tensörü
ν	: Doluluk oranı (faktörü)
$\hbar$	: İndirgenmiş Planck sabiti
$\mathbf{p}$	: Kanonik momentum operatörü
$\mathbf{A}$	: Vektör potansiyel
h	: Plank sabiti
$\mathbf{\Pi}$	: Mekanik momentum operatörü
∂	: Kısmi türev
l_B	: Manyetik uzunluk
$a^\dagger, a$	: Yaratma ve yok etme operatörü
H	: Hamiltonyen operatörü
a	: Örgü sabiti
$\mathscr{P}_{\mathcal{LLL}}$	: En düşük Landau seviyesine izdüşüm operatörü
T_x, T_y	: x ve y koordinatlarında öteleme operatörü
θ_x, θ_y	: Bükme açıları
$\mathscr{A}$	: Berry bağlantısı
$\mathscr{F}$	: Alan şiddeti
C	: Chern sayısı

Φ_0	: Manyetik akı kuantumu
Δ_x, Δ_y	: Ayrık uzayda türevler
M_x, M_y	: Manyetik öteleme operatörleri
ϕ	: Hücre başına düşen manyetik akı kuantumu
E_F	: Fermi Enerjisi
σ_H	: Kuantum Hall iletkenliği
N	: Parçacık sayısı
N_ϕ	: Toplam manyetik akı
N_{kd}	: Toplam Kuazi-deşik sayısı
N_d	: Delokalize Kuazi-deşik sayısı
N_l	: Lokalize Kuazi-deşik sayısı

KESİRLİ CHERN YALITKANLARINDA TEMEL DURUM DEJENERELİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)
Zeki ZEYBEK

MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2021

Kesirli Kuantum Hall etkisinin deneysel olarak keşfedilişi ile Landau faz geçişi teorisinin geçerli olmadığı fazların varlığı ortaya koyulmuştur. Bu fazlar yerel bir düzen parametresi yerine global olarak topolojik invaryantlar ile karakterize edilirler. Buna ek olarak bu sistemlerin yüklü uyarılmış durumları anyonik istatistiğe sahip olup yükleri kesirli şekilde ifade edilir. Kesirli Chern Yalıtkanı sistemleri, sürekli-ortamda olan katı hal Kesirli Kuantum Hall sistemlerinin örgü analogu olarak düşünülürler ve topolojik fazlar bulundururlar. Bu sebeple Kesirli Chern yalıtkanlarının, kesirli yük ve anyonik istatistik gösteren uyarılmış durumlarının çalışılması büyük önem taşır. Bu çalışmaların kuantum bilgi işlemesi ve sistemlerde topolojik düzenin doğrulanması gibi konulara ışık tutacağı düşünülmektedir.

Bu tez çalışmasında bir Chern yalıtkanı modeli olan Harper-Hofstadter modelinin kuazi-deşik uyarılmalarını çalıştık. Laughlin $\nu = 1/r$ kuazi-deşiklerinin bulunduğu dejenere manifoldun barındırdığı durum sayısını verebilmek için kapalı formda bir formül türettik. Çok-parçacık Chern sayısının dejenere manifoltta bulunan farklı Laughlin kuazi-deşik durumlarını birbirinden ayırt etmek için kullanılabileceğini önerdik. Yoğunluk hesaplamaları yaparak, çakılı olmayan manyetik akı kuantumu sayısının, aynı parçacık sayılı sistemlerin dejenerelik sayısını, lokalize veya delokalize kuazi-deşik olmasına bakmaksızın bulmada yegane parametre olduğunu gösterdik ve aynı zamanda çakılı durumlarda kuazi-deşiğin yükünü belirlediğini gösterdik. Sistemin boyutu büyüdükçe kuazi-deşik uyarılmaları dışında ortaya çıkan ayrılmaları açıklamak için kombinatorik bir yapı türetildi.

Anahtar Kelimeler: Topolojik faz, Topolojik yalıtkan, Kuazi-deşik uyarılması, Topolojik düzen, Kesirli Kuantum Hall etkisi

Sayfa Adedi: 80 Sayfa

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Rifat Onur UMUCALILAR

GROUND STATE DEGENERACY IN FRACTIONAL CHERN INSULATORS
(M.Sc. Thesis)

Zeki ZEYBEK

MIMAR SINAN FINE ARTS UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
June 2021

SUMMARY

Discovery of the Fractional Quantum Hall effect indicated that there exist phases whose physical mechanism cannot be understood by the usual Landau paradigm of phase transitions and that rather than a local order parameter, a global quantity called topological invariant must be used for classification. Charged excitations of these phases exhibit anyonic statistics and carry fractional charges. Fractional Chern Insulators harbor topological phases and are considered to be the lattice analog of Fractional Quantum Hall systems in continuum. Therefore characterization of their excitations is of great importance in terms of many aspects such as quantum information processing or validating topological order in a given system.

In this thesis, we studied quasi-hole excitations of the Harper-Hofstadter model, which is basically a Chern insulator model. We derived a closed formula to account for the degenerate manifold of Laughlin $\nu = 1/r$ quasi-holes. We also proposed that the many-body Chern number can be used to distinguish among different Laughlin quasi-hole states in the degenerate manifold. Upon density calculations we have shown that the degeneracy for systems with identical particle number and the excess charge in the pinned case are determined by the number of unpinned magnetic flux regardless of whether these systems has localized or delocalized quasi-holes. A combinatorial structure is proposed in order to understand the groupings formed in addition to quasi-hole excitations inside the quasi-hole manifold.

Key Words: Topological phase, Topological insulator, Quasi-hole excitation, Topological order, Fractional Quantum Hall effect

Page Number: 80 Pages

Supervisor: Assoc. Prof. Rifat Onur UMUCALILAR

1 GİRİŞ

Eğitim basamaklarının en temel adımlarında karşımıza çıkan maddenin halleri konsepti fizik biliminin bir alt alanı olan yoğun madde fiziğiyle beraber epey sofistike tekniklerle işlenir ve ileri teknolojik gelişmeleri mümkün kılmak yoluyla günlük yaşantımıza doğrudan etkisi vardır. Dolayısıyla katı ve sıvı fazları fizikte meydana gelen modern gelişmeler ile farklı perspektiflerden çalışmak, daha önce eşi görülmemiş zengin konseptleri beraberinde getirir. İlgilendiğimiz sistem birçok atomun bir araya gelerek oluşturduğu çok büyük bir yapıya sahip olduğu için, sistemi oluşturan parçacıkların tekil fiziği ana sistemin fiziğini anlatmak için yeterli değildir. Halbuki ilk bakışta aslında olay çok basit gözükebilir; sonuçta bütün materyaller elektron, proton ve nötronlardan oluşmaktadır. Fakat birçok atomun bir araya nasıl geldiğini ve birbirleri arasındaki ilişkilerle ne tür düzenlerin ortaya çıktığını, bu temel parçacıkların sahip olduğu fizikle doğrudan anlamak mümkün değildir. O sebeple sistemin parçalarını oluşturan parçacıkların kollektif fiziğini düşünmek faydalı olacaktır. Nobel ödüllü fizikçi P.W. Anderson'un [1] literatüre kattığı ve elde olan durumu çok güzel açıklayan söz öbeğinin dediği gibi "More is different" (Çok, farklıdır); çok-parçacıklılık farklı perspektifleri beraberinde getirmiştir.

Faz geçişleriyle ilgili belirli durumları açıklayabilen Landau faz geçişleri teorisi [2] bu çok-parçacıklı etkenleri temel alan bir bakış açısıydı. Bu teoride temel alınan anlayış simetrilerdir. Fazların birbirlerinden farkının aslında sahip oldukları simetrilerin farklı olmasından kaynaklandığını temel alır. Bu açıdan faz geçişi sistemin simetrisini değiştiren bir mekanizma olarak düşünülebilir. Simetri etkimeleri altında aşikar olmayan bir şekilde değişen düzen parametreleri üzerinden, fazlar ve faz geçişleri hakkında bir süre boyunca karşılaşılan durumları açıklayabilecek standart bir teori kurulmuştur [3]. Bu anlatılanlara bir örnek vermek için manyetik faz geçişlerini ele alabiliriz. Düzensiz bir sistem pek çok sürekli simetri dönüşümü altında invaryant kalır. Mesela bir gazı ele alalım, gaz içinde düzensiz hareket eden atomların oluşturduğu sistem sü-

rekli ötelemeler altında ve dönme altında invaryant kalır. Manyetik faz geçişi örneği için sistemde belirli bir pozisyona çakılmış spinleri düşünerek, net manyetizasyonu düzen parametresi olarak belirleyelim. Rastgele yönlere işaret eden spinlerden oluşan bir sistemde manyetik bir düzensizlik vardır ve dolayısıyla manyetizasyon sıfırdır. Bu nedenle sistemde dönme simetrisi vardır; hangi yönelimden bakarsak bakalım tercih edilen bir manyetik moment vektörü yönü olmadığı için uzayın her noktasında durum dönme altında aynıdır. Fakat bir ferromanyetik durumu düşündüğümüzde net bir manyetizasyon olmalıdır ve spinler belli bir yöne işaret etmelidirler. Dolayısıyla dönme simetrisi kırılır çünkü manyetik moment vektörü belirli bir yönü işaret eder.

Kesirli Kuantum Hall (KKH) etkisinin deneysel olarak gösterilmesiyle [4] faz geçişlerini karakterize etmek için çok farklı yöntemlerin keşfedilmesi gerekti. Çünkü KKH etkisi barındırdığı fazları, Landau'nun geliştirdiği faz geçişleri teorisi ile açıklanamayacak bir içsel düzene borçluydu. Bun şöyle açabiliriz; Hall etkisinde sistemin kitlesel (iç) kısmı yalıtkan bir davranış gösterirken kenarları (düzeneğin sınırları) iletkenlik karakterini benimser. Fakat bu durumdaki kitlesel yalıtkanlık bir örgü sistemine dizilmiş atomlardan oluşan sistemde elektron yoğunluğunun her bir atom etrafında sıkıca bağlı olduğu yalıtkan fazından farklıdır. Landau'nun teorisinde olmazsa olmaz nicelik olan düzen parametresi konsepti burada kullanışlı deildir. Çünkü bu iki yalıtkan fazı birbirlerinden ayıracak lokal bir düzen parametresi ilişkilendiremiyoruz. Haliyle bu çeşit içsel bir düzeni herhangi bir simetri kırılması ile açıklayamıyoruz. Bunun yerine sistemi bütünselliğiyle karakterize eden lokal düzen parametrisinin bir nevi rolünü üstlenecek, global bir parametre olan topolojik invaryant niceliğini kullanacağız. Topolojik düzen [5, 6] ile korunan bu fazlar çeşitli ilginç fiziksel fenomenlerin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Sistemin bir torus üzerine konulduğunda temel durum dejenereliklerinin olması, kesirli yük ve anyonik istatistiksel karakter taşıyan kuazi-deşik ve kuazi-parçacık uyarılmaları bunlara örnek verilebilir. Özellikle KKH etkisinin keşfi ile, parçacıkların yalnızca fermiyonik ya da bosonik karaktere sahip olduğu sistemlerin çalışıldığı bir durumdan, iki boyutta mümkün olan anyonik parçacıkların [7] getirdiği yeni karakteristiklerle bezenmiş sistemlerin çalışıldığı duruma yönelim oldu. Özellikle topolojik kuantum hesaplama konseptinin ortaya atılmasından sonra, dışsal etkilere dayanıklı kuantum durumlarını bu sistemler ile gerçekleştirmeye yönelik teorik çalışmalar yapılmaya başlandı.

Şimdiye kadar bahsettiğimiz topolojik fizik sinyalleri veren sistemler, iki boyutta dik manyetik alana maruz bırakılan elektronik katı hal sistemleriydi. Bu düzenekten daha farklı ve topolojik konseptleri barındıran modelleri analog sistemlerde çalışabiliriz. Aşırı-soğuk atom [8] ve fotonik sistemler [9] ile yoğun madde sistemlerinin simülasyonunun (kuantum simülatör) yapılmasında kaydedilen ilerlemeler ve bu düzenekleri daha kolay kontrol ve manipüle edebilme becerimiz sayesinde güçlü-ilintili elektronik yoğun madde sistemlerini bu analog sistemlerde çalışmak cezbedici hale gelmiştir. Dolayısıyla KKH fiziğinin örgü analogunu bu tarz aşırı-soğuk atom ve foton sistemlerinde çalışmak ve çeşitli uygulamalarda nasıl karakterize edebileceğimizi bilmek önem arzetmektedir. Örneğin daha önce de bahsettiğimiz gibi topolojik düzene sahip fazlar anyon [7, 10] uyarılmaları barındırırlar [11, 12]. Bu fazların kuantum bilgi işleme açısından dışsal etkenlere karşı dayanıklı olduğu da gösterilmiştir [13]. O halde düzgün bir şekilde anyonik uyarılmaları manipüle edebilirsek kuantum bilgi işlemesini etkili bir şekilde gerçekleştirebiliriz. Katı hal sistemlerinde bu tarz anyonik uyarılmaları çalışmak için belirli yöntemler önerilmiştir [14–16]; fakat problemin istenilen şekilde çalışılabilmesi epey zordur ve aktif olarak deney önerileri sunulmaktadır [17]. Bu sebeple KKH fazının örgü analogu olarak düşünülen Kesirli Chern Yalıtkanlarını aşırı-soğuk atom ve foton sistemlerinde çalışmak büyük avantaj doğurur.

Bu tez çalışmasında Harper-Hofstadter modeli ile Kesirli Chern Yalıtkanı sistemlerinin kuazi-deşik uyarılmaları çalışılacaktır. Topolojik fazların barındırıldığı bu durumlarda ortaya çıkan temel durum dejenerelikleri karakterize edilip, durum sayıları kapalı bir formülle ifade edilecektir. Yoğunluk profillerine bakılarak kuazi-deşik uyarılması sinyalleri aranacaktır ve çok-parçacık Chern sayısı ile durumların topolojik düzeni incelenecektir. Quazi-deşik uyarılmalarının çakılı ve serbest olduğu durumların karakteristikleri temel durum dejenerelikleri ile ilişkilendirilecektir.

2 KUANTUM HALL ETKİSİ

E. Hall bir iletkeni manyetik ve elektrik alana maruz bırakmanın bu iki alana dik yönde bir akım meydana getirdiğini gerçekleştirdiği çalışmayla ortaya koymuştur [18]. Buna ek olarak, sadece manyetik alana maruz bırakılan malzemenin düzlemine paralel yönde bir I akımı uygulanması da düzlemin normaline dik bir yönde V_H voltaj düşmesine sebebiyet verir. Şekil-2.1 bahsi geçen durumların gözlendiği temel deneysel düzeneği göstermektedir. Klasik Hall etkisi olarak isimlendirilen bu fiziksel durumun dinamiği klasik mekanik kullanılarak açıklanabilir; düzenekteki yük taşınma işleminin klasik mekaniksel denklemlerle açıklanıp, yük taşıyıcılarının adeta birer katı bilyeymiş gibi varsayıldığı modele Drude model [19] denir ve modelin öngördüğü hareket denklemi

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -e(\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{m\mathbf{v}}{\tau} \tag{2.1}$$

şeklindedir. Bu denklemde, $\mathbf{v}$ parçacıkların hızını, m kütleyi, $\mathbf{B} = B\hat{z}$ manyetik alanı, e elektron yükünü ve $\mathbf{E}$ elektrik alanı temsil eder. Lorentz kuvvetine ek olarak doğrusal bir sürtünme terimi ile düzenekteki düzensizlikler modellenmeye çalışılınır; τ saçınım süresini temsil eder. Bu denklemin denge çözümleri ile ilgileniyoruz çünkü bu fiziksel süreç boyunca denge durumuna ulaşılınca belirli gözlemlenebilirler deneysel olarak ölçülüp teorik hesaplarla karşılaştırılabilir. Akım yoğunluğunu parçacıkların hızı ile

$$\mathbf{J} = -ne\mathbf{v}$$

şeklinde ilişkilendirebiliriz. Bu tanımda, n parçacık yoğunluğudur. Dinamiği barındıran 2.1 denklemi matris formunda

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_B\tau \\ -\omega_B\tau & 1 \end{pmatrix} \mathbf{J} = \frac{e^2 n\tau}{m}\mathbf{E}$$

şeklinde ifade edebiliriz; burada $\omega_B = \frac{eB}{m}$ siklotron frekansıdır. Bu ifadede yer alan matrisin tersini her iki tarafla çarpıp klasik elektromanyetizmadan bildiğimiz Ohm yasasına ulaşırız:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

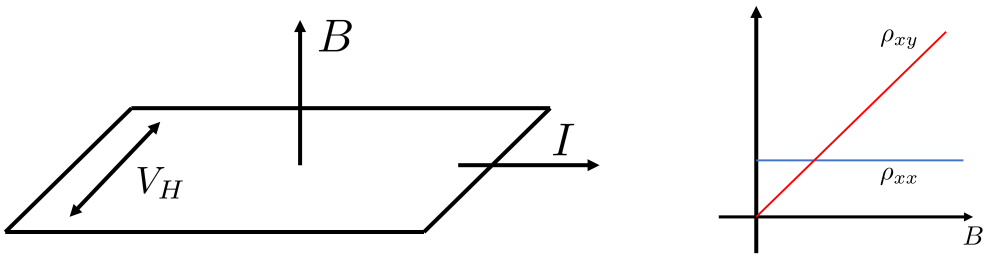
Dolayısıyla burada σ iletkenlik tensörünü temsil eder. Bu şekilde Drude modeli ile özdirenç ρ hakkında bilgi alabiliriz:

$$\rho = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{yy} \end{pmatrix}.$$

ilişkisi vardır. Yukarıdaki denklemleri kullanarak Hall özdirenci ρ_{xy} ve yataydaki direnç ρ_{xx}

$$\rho_{xx} = \frac{m}{ne^2\tau} \text{ ve } \rho_{xy} = \frac{B}{ne}$$

ile verilir. Şekil-2.1'de, ifadelerin manyetik alana olan bağlılıkları görülebilir.

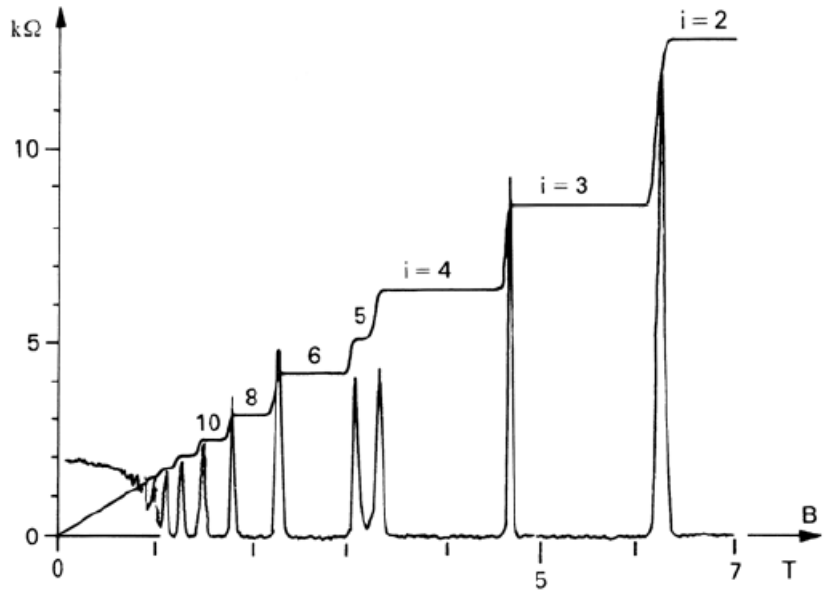


Şekil 2.1: Hall etkisi düzeneğinin temsili. Yatay direncin ve Hall direncinin klasik olarak manyetik alanın değişmesine göre gösterdikleri profil. [20] kaynağından tekrar çizilmiştir.

2.1 Tam Sayılı Kuantum Hall Etkisi ve Landau Seviyeleri

Kuantum etkilerin baskın olduğu fiziksel rejimlerde, klasik fizik ile yapılan çıkarımların sistemin davranışını isabetli bir şekilde temsil etmediği sayısız örnek verilebilir. K. von Klitzing tarafından 1980 yılında gerçekleştirilen deney [21] sonucu elde edilen sonuçlar bu durumlara yeni bir örnek oluşturup çok zengin bir fiziksel alanın kapısını aralayacaktı.

Şekil-2.2 bize özdirencin manyetik alanın fonksiyonu olarak nasıl değiştiğini göstermektedir. Hem yatay özdirenç ρ_{xx} hem de Hall özdirenci ρ_{xy} klasik tahminlerin aksine davranışlar sergilemektedirler. Bu şekilde iki boyutlu elektron gazının çok düşük sıcaklıklarda, kuvvetli bir manyetik alana maruz kalması klasik fizikten uzaklaşıldığı bir fenomene işaret etmiştir. Hall özdirenci belirli manyetik alan aralığında kuantize



Şekil 2.2: Tam Sayılı Kuantum Hall etkisi. Klasik profile kıyasla dirençler kuantize olup, belirli bir manyetik alan aralığında atlama yapmadan önce kuantizasyonlarını sürdürürler. [21] kaynağından alınmıştır.

bir değer alıp bir platoya oturup yatay olarak bir sabitlik göstermektedir ve değerlerinde ani atlamalar görülmektedir. Bu platolardaki Hall özdirenci ν bir tamsayı olmak üzere,

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2}\frac{1}{\nu} \tag{2.2}$$

şeklinde değer alır. ρ_{xx} ise plato boyunca sıfır değerindeyken platolar arası zıplamalarda aniden büyük değerler alarak atlamalar gösterir. Hall dirençlerindeki bu kuantize değerlerin tam sayı doğası deneylerle çok yüksek bir isabetlilikle gösterilmiştir; görece hata 10^{-9} mertebesinde seyretmektedir [22–24]. Bir diğer önemli husus ise bu elde edilen sonuçların hiçbir şekilde materyale bağımlılığının olmamasıdır: deneyin gerçekleştirildiği düzenek ile gelen düzensizlik ve kirlilik yoğunluğu (yeterince düşük olma şartıyla) fenomeni belirleyen kriterler değillerdir. Bu şekilde mikroskopik detaylara bağlı olmayan bir nicelik daha genel yapılar ile anlaşılabilir. Matematiksel açıdan bakarsak bu konsept tam anlamıyla matematiksel objelerin global özellikleriyle ilgilenen topoloji alanı ile bir köprü kurmaktadır. Bunun son zamanlarda alanda çok dikkat toplamış topolojik invaryant [25] fikrinin bir örneği olduğunu göreceğiz.

Elimizdeki çok-parçacık problemine kuantum mekaniksel açıdan yaklaşabilmek için tek bir elektronun manyetik alan altındaki durumunu incelemek faydalı olacaktır.

Bu problem Landau kuantizasyonu olarak bilinir [26]. İki boyutlu (x, y) düzlemine hareketi kısıtlı ve dikey bir manyetik $\mathbf{B} = B\hat{z}$ alanına maruz bırakılan rölativistik olmayan bir elektronun Hamiltonyeni

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 \tag{2.3}$$

ile verilir; m elektron kütlesini, $-e$ elektron yükünü ve $\mathbf{A}$ ise $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ manyetik alanını üreten vektör potansiyelini temsil eder. Sistem fiziksel olarak düzlemde her iki eksende öteleme simetrisi gösterse de, vektör potansiyelin lokalliğinden ötürü öteleme simetrisi kırılmıştır. Vektör potansiyelin formuna göre belirli eksenlerde bu simetri tekrar kazanılabilir, bu ayara bağlı bir durumdur. Kanonik momentum $\mathbf{p}$ operatörünün de ayara bağlı olduğu unutulmamalıdır. Pozisyon ve momentum operatörleri her zamanki kuantum mekaniksel komütasyon bağıntılarını sağlarlar: $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$. Fizik ayardan bağımsız olmalıdır ve ölçülen nicelikler ayar bağımsızlığı sağlamalıdırlar. Bu sebeple klasik mekanikte gördüğümüz hız ile orantılı ölçülebilen momentumu, yani mekanik momentumu

$$\mathbf{\Pi} = (\Pi_x, \Pi_y) = \mathbf{p} + e\mathbf{A} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu operatör ayardan bağımsızdır ve bileşenleri cinsinden 2.3 denklemi

$$H = \frac{1}{2m}(\Pi_x^2 + \Pi_y^2) \tag{2.5}$$

ile ifade edilir. Mekanik momentum operatörünün komütasyonu

$$\begin{aligned}
[\Pi_x, \Pi_y] &= e([p_x, A_y]) - [p_y, A_x]) \\
&= e(\partial_x A_y[p_x, x] + \partial_y A_y[p_x, y] - \partial_x A_x[p_y, x] - \partial_y A_x[p_y, y] \\
&= -ie\hbar(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\
&= -ie\hbar(\nabla \times \mathbf{A})_z \\
&= -ie\hbar B \\
&= -i\frac{\hbar^2}{l_B^2}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

sonucunu verir ve bu problemle ilgili karakteristik bir uzunluk birimi olan manyetik uzunluğu

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlarız. Bu tanımı fiziksel açıdan daha sezgisel ve motive edilebilir hale getirmek için klasik resmi aklımıza getirebiliriz. Klasik olarak manyetik alana maruz kalan bir elektronun yörüngesinde sapmalar meydana gelir ve dairesel hareket yapmaya başlar. Fakat kuantum mekaniksel resimde Heisenberg Belirsizlik İlkesi'nden fiziksel nicelikler üzerine belirli sınırlamalar getirilir. Manyetik alan altında oluşan siklotron yörüngesinin bu belirsizlik ilkesini ihlal etmeden alabileceği en küçük yarıçap manyetik uzunluktur. 2.5 Hamiltonyeni kanonik olarak birbirine eşlenik olan kuadratik operatörlerin toplamı şeklinde yazılabildiği için enerji seviyeleri harmonik salınıcı problemini çözerken kullandığımız cebirsel metot ile bulunabilir. Alçaltma, yükseltme operatörlerini

$$a = \frac{l_B}{\hbar\sqrt{2}}(\Pi_x - i\Pi_y) \;\; a^\dagger = \frac{l_B}{\hbar\sqrt{2}}(\Pi_x + i\Pi_y) \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlayıp arzu ettiğimiz $[a, a^\dagger] = 1$ ilişkisini sağlayabiliriz. Bu operatörler ile 2.5 Hamiltonyenini tekrardan yazıp

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar^2}{ml_B^2}\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \\ &= \hbar\omega_B\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $\omega_B = \frac{\hbar}{ml_B^2}$ siklotron frekansını manyetik uzunluk cinsinden elde ettik. Sistemin enerji seviyeleri

$$E_n = \hbar\omega_B\left(n + \frac{1}{2}\right) \;\; n \in \mathbf{N} \tag{2.10}$$

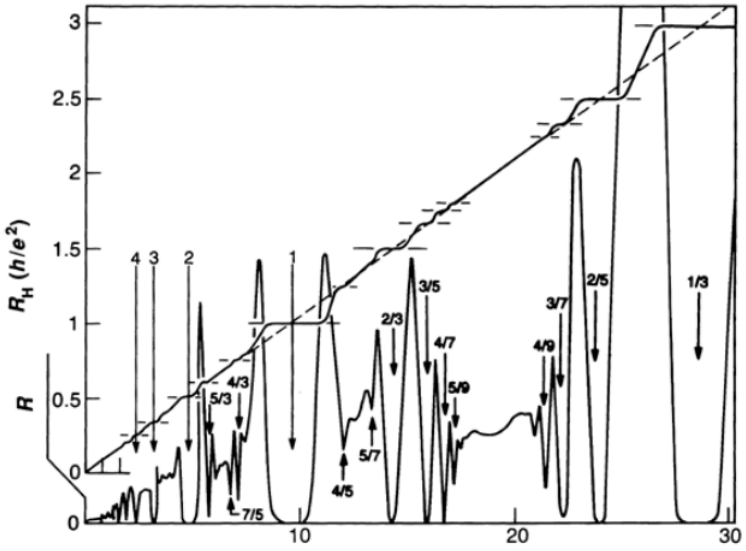
ile verilir. Ayrık seviyeler arası enerji farkı hep aynı olup $\Delta E = \hbar\omega_B$'dır. Bu ayrık enerji seviyelerine Landau seviyeleri denir ve $n = 0$ en düşük Landau seviyesi (LLL) ile adlandırılır. Bu seviyeler dejenere olup, dejenerelik sayısı $N_\phi = BA/\Phi_0$ ile verilir. B dik manyetik alanın büyüklüğü, A düzeneğin toplam alanı, Φ_0 ise temel manyetik akı kuantumudur. Bu tek-parçacık dejenereliği sistemin barındırdığı toplam manyetik akı kuantumu sayısına eşittir [27].

Tam Sayılı Kuantum Hall etkisi elektronlar arası etkileşimi hesaba katmadan açıklanabilir. Buna göre tek-parçacık Landau seviyelerine parçacıklar yerleştirilir ve dolu Landau seviyelerinin sayısı 2.2 denklemindeki ν tam sayısına denk gelir. Fiziksel olarak bu şekilde belirli manyetik alan aralıklarında kuantizeliğin sürdürülebilmesi sis-

temdeki düzensizlikle açıklanabilir [28]. Buna ek olarak iletkenliğin topolojik bir invaryant olan Chern sayısı ile ilişkilendirilmesi kuantizeliğin orijinini topolojik sebeplere bağlamış olur [20].

2.2 Kesirli Kuantum Hall Etkisi

Bir önceki bölümde (2.1) Hall platolarını sistemdeki düzensizlikle ilişkili olduğunu belirtmiştik. Bu düzensizlik miktarı belirli bir alt sınırın altına indiğinde tam sayı platoları iyice silik bir hale gelip kaybolmaya başlarlar. Fakat ilginc bir şekilde tam sayılı platoların dışında kesirli platoların bu rejimlerde ortaya çıktığı gözlemlenmiştir [4].



Şekil 2.3: Kesirli Kuantum Hall etkisi. Klasik profile kıyasla dirençler kuantize olup, belirli bir manyetik alan aralığında atlama yapmadan önce kuantizasyonlarını sürdürürler. Fakat bu kez kuantizasyonlar kesirli sayılarda olurlar. [4] kaynağından alınmıştır.

2.3'te Kesirli Kuantum Hall etkisini görebiliriz ve dirençler yine, denlem 2.2 formunda olurlar fakat kuantizasyon parametresi ν kesirli değerler alır: $1/3, 1/5$ gibi. Etkileşimsiz elektron modeli ile 2.1 bölümünde Tam Sayılı Kuantum Hall etkisini açıklayabildik fakat bu kez artık elektronların birbirleri ile yaptığı etkileşimi de hesaba katmak zorundayız. Landau seviyeleri dejenere olduğu için kısmi bir şekilde doldurma yapmak dejenereliği iyice arttıracaktır, çünkü Pauli ilkesin yok saymadan çok farklı şekillerde kısmi bir şekilde Landau seviyelerini doldurabiliriz. Elektronlar arası Coulomb etkileşimini pertürbasyon olarak görüp etkileşim enerjisini uyarılma enerjisiyle $\hbar\omega_B$ karşılaştırarak sistemi değerlendirebiliriz. Fakat deneylerden düzensizliğin getirdiği bir enerji ölçeğinin de rol oynadığını farkediyoruz ve düzensizlik azaldıkça kesirli

kuantizasyonları gözlemliyoruz. Dolayısıyla $\hbar\omega_B >> V_{etkileşim} >> V_{düzensizlik}$ ilişkisinin geçerli olduğunu düşünebiliriz. 2.1 bölümünde en alt Landau seviyesini Pauli ilkesi kısıtlamalarıyla doldurduğumuzda dejenere olmayan bir çok-parçacık durumu elde ediyorduk. Fakat kısmi doldurma çok dejenereli bir durum sunuyor ve bu sebeple dejenere pertürbasyon teorisini zorunlu kılıyor. Bu kadar fazla dejenerelik olan durumda dejenere pertürbasyon teorisi yaparken başvurduğumuz diyagonalizasyon işlemleri baş edilemeyecek şekle gelir. Buna ek işlerimizi kolaylaştırması açısından ve çalışmamızla doğrudan bağlantısı olduğundan problemimizi en alt seviye Landau seviyesindeki kısmi dolumlara sınırlayacağız. Dolayısıyla yine manyetik alanı kuvvetli alıp kinetik dinamiği en alt Landau seviyesine kısıtlayacağız. O halde etkileşimi de bu seviyeye yansıtmalıyız [29, 30]. Kinetik terim parçacıklar üzerinden direkt toplam alınarak bir sabit üreteceği için, asıl dinamik, yansıtılmıs etkileşim kısmında olacaktır. O halde problem boyutsuz olarak

$$H = \mathscr{P}_{\mathcal{LLL}} \sum_{i<j} \frac{1}{|\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}|} \mathscr{P}_{\mathcal{LLL}} \tag{2.11}$$

şekline indirgenir. Burada karmaşık kısmı yansıma operatörü $\mathscr{P}_{\mathcal{LLL}}$ getirmektedir, hatta bir nevi Hamiltonyenin kuantum mekaniksel doğasını ortaya koyuyor diyebiliriz çünkü Coulomb etkisinin içinde birbirleriyle komütasyon ilişkisi sıfır olmayan operatörler bulunmuyor. Problemin hem analitik hem de nümerik zorluğundan ötürü fiziksel argümanlarla tahmini dalga fonksiyonları üretmek yoluna başvurulmuştur. $\frac{1}{\nu} = r$ tek sayı formundaki durumları açıklamak için Laughlin dalga fonksiyonunu (normalizasyonu hariç)

$$\Psi^r(\{z_i\}_i^N) = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^r e^{-\sum_i |z_i|^2/4l_B^2} \tag{2.12}$$

şeklinde yazmıştır [11]. Burada $z = x + iy$ kompleks koordinatı belirtmektedir. Bu dalga fonksiyonu tek sayı r durumları için antisimetriktir. Daha ilerideki bölümlerde aynı dalga fonksiyonunun r çift sayı durumlarını bozonik sistemlerde nümerik hesap yaparken kullanacağız. Göreli koordinatları içeren ilk faktör korelasyonları dahil etmek için vardır; bir nevi bu terim elektronlar birbirlerine yaklaştıklarında yok olan bir durum elde etmeye yarar. Üstel faktör de sistemin merkezinden keyfi bir şekilde uzaklaşmaları engeller niteliktedir.

$\nu = 1/r$ sistemlerinin uyarılmış durumlarına gelirsek iki türlü yüklü uyarılma ile karşılaşırız: kuazi-deşik ve kuazi-parçacık uyarılmaları $1/r$ temel durumu üzerinde bu-

lunan düşük enerjili uyarılmış durumlardır. Laughlin kuazi-deşik uyarılması için dalga fonksiyonu tahminini

$$\Psi^r(\{z_i\}_i^N;\eta) = \prod_i (z_i - \eta) \prod_{j<k} (z_j - z_k)^r e^{-\sum_i |z_i|^2/4l_B^2} \tag{2.13}$$

şeklinde yapmıştır [11]. Bu η pozisyonuna çakılmış bir kuazi-deşik durumunu ifade eder. η pozisyonuna doğru gidildikçe elektron yoğunluğu sıfıra gider, haliyle elektron yoğunluğu yok olur. Dolayısıyla bir deşik yaratmış oluruz. Kuazi-deşiklerin kesirli yük taşıdıkları bu dalga fonksiyonundan hareketle görülebilir ve yükleri $+e/r$ şeklindedir, burada elektron yükünü $-e$ olarak aldık. Bunu sezgisel olarak şöyle görebiliriz; farz edelimki r tane kuazi-deşik η konumuna çakılsın. O halde dalga fonksiyonu

$$\Psi^r(\{z_i\}_i^N;\eta) = \prod_i (z_i - \eta)^r \prod_{j<k} (z_j - z_k)^r e^{-\sum_i |z_i|^2/4l_B^2} \tag{2.14}$$

halini alır. Eğer η bir dinamik değişken olsaydı (yani sistemin bir serbestlik derecesi, konum ya da momentum gibi), o halde ilk terimi direkt ikinci terimin içine atıp ekstra bir elektronlu, $\nu = 1/r$ Laughlin fonksiyonu haline getirirdik bunu. Fakat η bir parametredir ve sürekli aynı yerde değişmeden çakılıdır. Dolayısıyla bu dalga fonksiyonu η pozisyonunda bir elektron eksik olan durumu temsil eder. O halde r tane kuazi-deşik bir elektron yoksunluğu ile denktir, bu demek oluyor ki bir kuazi-deşik bir elektronun $1/r$ kadar yokluğunu sağlar ve yükü $+e/r$'dir. Sisteme kuazi-deşik çakılması ekstra manyetik akı gerektireceğinden ν değişir ve sistemin kapladığı alan büyür [28]. Belirli bir şekilde sistemi büyütüp tek-parçacık durumlarının kapladığı alanı arttırmak kuazi-deşik popüle etmek için gereklidir

Topoloji ve Hall iletkenliği arasında bir ilişki olduğunu daha önceki bölümde (2.1) söylemiştik; bu kısımda daha açık bir şekilde bunun temelini oluşturmaya çalışacağız. İleriki bölümlerde örgü sistemlerinde topolojik argümanlar benzer şekillerde kurulacaktır. Chern sayısı olarak bilinen topolojik invaryantın Hall iletkenliği ile direkt ilişkili olduğunu Thouless-Kohmoto-Nightingale-Nijs (TKNN) ortaya koymuştur [31]. Bu ilişki sayesinde Tam Sayılı Kuantum Hall etkisi durumlarında topolojinin tek-parçacık problemiyle ilişkili olan fazların nasıl daha zengin yapılara olanak verdiğini görürüz. Fakat bu durumda etkileşimler ihmal edilmiştir ve bu özel durum için topolojik argümanlar (3) bölümünde detaylı bir şekilde işlenilecektir. Bu invaryantın çok-parçacık etkileşimlerinin olduğu durumda hesaplanma şeklini Niu-Thouless-Wu (NTW) vermiştir [32]. Dolayısıyla Kesirli Kuantum Hall durumlarını

topolojik açıdan değerlendirmek için Chern sayısını kullanabiliriz. Sistemimizi bir torus üzerine koyalım. Bu durum periyodik sınır koşulları uygulamamızı gerektirir ve en genel durumda (manyetik alandan dolayı) basit bir uç uca özdeşleştirmeden ziyade ekstra bir faz söz konusu olur. Yani T_x ve T_y öteleme operatörleri olmak üzere $T_x\psi(x,y) = \psi(x+L_x,y) = \psi(x,y)$, $T_y\psi(x,y) = \psi(x,y+L_y) = \psi(x,y)$ yerine bu operatörlerin uygun fazlarla çarpılmış halleri olan M_x ve M_y manyetik öteleme operatörleri uygulanarak $M_x\psi(x,y) = e^{i\theta_x}\psi(x,y)$, $M_y\psi(x,y) = e^{i\theta_y}\psi(x,y)$ sınır koşulları elde edilir. Burada θ_x ve θ_y fiziksel alana ek olarak tanımlanabilecek başka ayarlardan gelecek olan bükme açılarıdır. Burada görüldüğü gibi torus sınır koşullarından ötürü sistemi karakterize etmek için 2 tane parametreye bir bağlılık gerekli hale gelmiştir. O halde (θ_x, θ_y) ile bir parametre uzayı oluşturabiliriz. Haliyle bu parametrelerin değişimi ile ilgili bir Berry fazı [33] hesabı düşünülebilir. O halde Berry bağlantısını

$$\mathcal{A}_i = -i \left\langle \psi_0 \left| \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right| \psi_0 \right\rangle \tag{2.15}$$

ile ifade ederiz, burada $|\psi_0\rangle$ temel durumu temsil eder. Buradan hareketle ilişkili alan şiddetini

$$\mathcal{F}_{xy} = \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial \theta_y} - \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial \theta_x} = -i\left[\frac{\partial}{\partial \theta_y}\left\langle \psi_0 \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta_x} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial \theta_x}\left\langle \psi_0 \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta_y} \right\rangle\right.\right] \tag{2.16}$$

şeklinde yazarız ve bu (NTW) [32]'de doğrusal tepki teorisi ile gösterildiği gibi Hall iletkenliğine

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{\hbar}\mathcal{F}_{xy} \tag{2.17}$$

şekilinde denktir. Bütün sınır koşulu açı değerleri üzerinden ortalama alınırsa

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{\hbar}\int_{\mathbf{T}^2_\theta} \frac{d^2\theta}{(2\pi)^2}\mathcal{F}_{xy} \tag{2.18}$$

elde edilir. Bu sayede Chern sayısını

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}^2_\theta} d^2\theta \mathcal{F}_{xy} \tag{2.19}$$

olarak yazarız ve her zaman için C bir tam sayıdır.

3 ÖRGÜ MODELİ: HARPER-HOFSTADTER HAMİLTONYENİ

Katı hal fiziğinden bildiğimiz gibi periyodik bir potansiyel içeren elektron sistemlerinin enerji spektrumları kuantize olmuş ayrık seviyelerin aralıklı bantlar oluşturmasından meydana gelmektedir [34, 35]. Manyetik alan varlığında ise spektrum tekrar bir ayrılma yaşayarak çok dejenere Landau seviyelerini oluşturur. Manyetik alan ile örgü sisteminin periyodik yapısı birlikte enerji spektrumunda Hofstadter Kelebeği [36, 37] yapısını gösterirler. Bu bölümün ilk kısmında bu tek-parçacık durumu incelenip ilerleyen bölümler için taban oluşturulacaktır ve ayrıca sistem topolojik açıdan değerlendirilip örgü yapılardaki etkileşimsiz durumlar için topolojik invaryant konsepti açıklanacaktır. İkinci bölümde ise güçlü ilintili topolojik fazların optik örgülerde incelenmesi yapılacaktır ve etkileşimli durumlar için topolojik invaryant konsepti genelleştirilecektir.

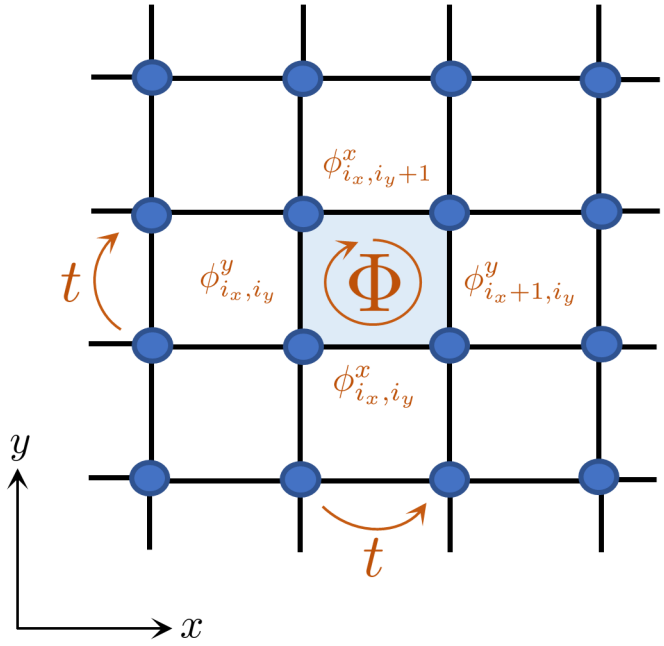
3.1 Örgüde Tek-Parçacık Problemi

Sıkı-bağlanma şartları altında elektronların periyodik potansiyele maruz bırakıldığı etkileşim içeren sistemlerin dinamiği Hubbard [38] modeli ile çalışılanabilir. Düşük sıcaklıklarda bütün parçacıklar öncelikli olarak en alt enerji bandını popüle ederler ve Hubbard modelinin temel durumları ($T = 0K$) bu rejimleri iyi bir isabetlilikle tasvir edebilir. Etkileşimler yok sayıldığında Hubbard modeli sıkı-bağlanma modeline indirgenir ve iki boyutta:

$$H_0 = -t \sum_{\langle ij \rangle} \left(c_i^\dagger c_j + \text{h.c.} \right), \tag{3.1}$$

Hamiltonyeni ile ifade edilir. Burada $c_i^\dagger$ ve c_j örgüdeki i ve j noktalarındaki yaratma ve yok etme operatörleridir, burada $i = (i_x, i_y); j = (j_x, j_y)$ örgü üzerindeki noktaların örgü sabiti a cinsinden koordinatlarıdır. Toplam sadece en yakın komşulu örgü noktaları arasında atlama yapılmasına olanak tanır. Burada denklem 3.1, sadece örgü nokta-

ları arasında atlamaya karşılık gelen kinetik terimi içermektedir. Elektron bant teorisi ile analoji kurmaya çalışırsak bu Hamiltonyen şöyle düşünülebilir. Sıkı-bağlanma şartını koşalım ve elektronlar örgüyü oluşturan atomların orbitallerini doldursunlar. Örgü yapısını korumak ve sürekli-ortam durumundan uzaklaşmak için atomik orbitallerin dalga fonksiyonlarının birbirleriyle sıfıra yakın bir iç çarpım verdiklerini varsayalım. Bu durumda t parametresi ise örgü üzerinde bir noktadan başka bir noktaya tünellemeyi temsil eden bir örtüşme integrali ile verilir.



Şekil 3.1: Kare örgü üzerinde kinetik atlamalar verilmiştir. Manyetik alan altında bir plaket etrafında parçacığın tur atması ile alınan Aharonov-Bohm fazı Peierls fazı ile ifade edilir.

Manyetik alan varlığında ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$), parçacıkların sahip oldukları Aharonov-Bohm fazını [39] kinetik terime ekleyebilmek için örgü noktaları arasındaki atlamayı temsil eden yaratma ve yok etme operatörlerinin yanına Peierls fazı [40] gelir ve kinetik terimin matris elemanlarının karmaşık sayı değerleri almasına olanak sağlanır. Temsili olarak şekil-3.1'de bu süreçleri görebiliriz. Buradaki Peierls fazı eklentisi bir elektronun kapalı bir yol etrafında dikey manyetik alan altındayken kaptığı Aharonov-Bohm fazını üretebilmesi içindir. Bu eklenti sonrasında Hamiltonyen

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle} \left(e^{i2\pi\phi_{ij}} c_i^\dagger c_j + \text{h.c.} \right), \tag{3.2}$$

formunu alır. Burada ϕ_{ij} iki örgü noktası arasında zıplama yaparken alınacak faz ile ilgili bilgiyi taşır ve bu ayar bağımlı bir niceliktir: $\phi_{ij} = \frac{e}{\hbar}\int_{\mathbf{r_i}}^{\mathbf{r_j}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$. Aharonov-Bohm fazı ile analoji kurarak birim hücre başına düşen akıyı

$$\Phi_{AB} = \frac{e}{\hbar}\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi\frac{\Phi_B}{\Phi_0}, \tag{3.3}$$

$$\Phi_B = \sum_{\square}\phi_{ij} \tag{3.4}$$

birim hücredeki manyetik akı kuantumu şeklinde tanımlayabiliriz. Şekil-3.1'de olduğu gibi, burada verilen toplama işlemi bir birim hücre üzerinden yapılır ve sonucu o birim hücrenin barındırdığı manyetik kuantum akısı sayıdır. Dolayısıyla ϕ niceliği aslında boyutsuz manyetik alan şiddetinin rejimini belirleyen faktördür. $\Phi_0 = \frac{h}{e}$ manyetik akı kuantumudur. Manyetik akı kuantumunu en temel akı kuantumu olarak düşünebiliriz belirsizlik ilkesi çerçevesinde; bu nicelik $2\pi l_B^2$ alanın içindeki manyetik akı olarak adlandırılabilir.

Elimizdeki Hamiltonyen 3.2 kesikli öteleme simetrisini kırdığı için direkt 3.1 Hamiltonyenindeki gibi momentum bazına geçip durum karışması yaşamadan diyagonal forma getirebilmemiz söz konusu değildir. Çünkü kristal örgü momentumunun varolma sebebi direkt ayrık öteleme simetrisinin bulunmasıydı. Manyetik alanın varlığı bizi vektör potansiyeli için bir ayar seçmeye zorladığından açık bir şekilde simetri kırılacaktır (Fiziksel olarak dik ve homojen manyetik alan varlığı hem rotasyonel hem öteleme simetrisini korusa bile Hamiltonyene bu alanlar vektör potansiyel cinsinden sokulur). Dolayısıyla burada her bir ötelemede (ayara bağlı) parçacık belirli bir faz aldığı için öteleme operatörleri ve Hamiltonyen maksimum ortak özduruma sahip operatör kümesi oluşturmaz. Bu nedenle manyetik alan varlığında Brillouin bölgesini uygun şekilde değerlendirmeliyiz ve bu bizi manyetik öteleme operatörleri tanımlayıp manyetik öteleme grubu oluşturmaya sevk eder [41, 42]. 3.1 Hamiltonyenini açık şekilde yazarsak kinetik terim aslında düzlemde x ve y yönünde parçacık ötelemelerini simgeler:

$$\begin{aligned} H_0 &= T_x^0 + T_y^0 + \text{h.c.} \\ &= \sum_{i_x,i_y} c^\dagger_{i_x+1,i_y} c_{i_x,i_y} + \sum_{i_x,i_y} c^\dagger_{i_x,i_{y+1}} c_{i_x,i_y} + \text{h.c.} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dolayısıyla $[T_x, H] = [T_y, H] = [T_x, T_y] = 0$ ve Brillouin bölgesi iyi tanımlanmıştır ve Hamiltonyeni Bloch formuna getirip diyagonalize edebiliriz. Aynı şekilde manyetik

alan varlığındaki 3.2 Hamiltonyenini bir önceki durumla analoji kurarak daha açık yazarsak, naif bir şekilde

$$\begin{aligned} H &= T_x + T_y + \text{h.c} \\ &= \sum_{i_x,i_y} c^\dagger_{i_x+1,i_y} c_{i_x,i_y} e^{i\phi^x_{i_x,i_y}} + \sum_{i_x,i_y} c^\dagger_{i_x,i_y+1} c_{i_x,i_y} e^{i\phi^y_{i_x,i_y}} + \text{h.c} \end{aligned} \tag{3.6}$$

tanımlayabiliriz. Bu durumda Hamiltonyenin öteleme simetrisini koruyamadığını $[T_x, T_y] \neq 0$ komütasyon ilişkisinden görebiliriz. Bunu açıkça gösterebilmek için T_x ve T_y operatörlerinin örgü noktasındaki $|\psi_{m,n}\rangle$ $(i_x = m, i_y = n)$ deneme durumuna nasıl etki ettiğine bakalım:

$$\begin{aligned} T_y |\psi_{m,n}\rangle &= T_y c^\dagger_{m,n} |0\rangle \\ &= \sum_{i_x,i_y} c^\dagger_{i_x,i_y+1} c_{i_x,i_y} e^{i\phi^y_{i_x,i_y}} c^\dagger_{m,n} |0\rangle \\ &= \sum_{i_x,i_y} e^{i\phi^y_{i_x,i_y}} c^\dagger_{i_x,i_y+1} \left(\delta_{mi_x}\delta_{ni_y} + c^\dagger_{m,n} c_{i_x,i_y} \right) |0\rangle \\ &= \sum_{i_x,i_y} e^{i\phi^y_{i_x,i_y}} c^\dagger_{i_x,i_y+1} \delta_{mi_x}\delta_{ni_y} |0\rangle \\ &= c^\dagger_{m,n+1} e^{i\phi^y_{m,n}} |0\rangle \end{aligned} \tag{3.7}$$

Buradan hareketle T_x ve T_y operatörlerinin sırasıyla aynı duruma etkiyerek komütasyonlarının

$$\begin{aligned} T_x T_y |\psi_{m,n}\rangle &= T_x c^\dagger_{m,n+1} e^{i\phi^y_{m,n}} |0\rangle = e^{i\phi^x_{m,n+1} + i\phi^y_{m,n}} c^\dagger_{m+1,n+1} |0\rangle \\ T_y T_x |\psi_{m,n}\rangle &= T_y c^\dagger_{m+1,n} e^{i\phi^x_{m,n}} |0\rangle = e^{i\phi^y_{m+1,n} + i\phi^x_{m,n}} c^\dagger_{m+1,n+1} |0\rangle \\ T_y T_x &= e^{i\phi^y_{m+1,n} + i\phi^x_{m,n} - i\phi^x_{m,n+1} - i\phi^y_{m,n}} T_x T_y \end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde olduğu görülür. Komütasyonu bozan faz faktörünü ϕ_{ij}'nin tanımını (3.4) kullanarak anlayabiliriz. 3.8 denkleminden de anlaşılacağı üzere toplam bir duruma birim hücreyi tur attıracak şekilde öteleme uygulandığında belirli bir faz birikir, üstel fonksiyonda görüleceği gibi. Bu tam olarak fazların örgü üzerindeki rotasyoneline denk gelir. Sürekli ortamda olmadığımız için rotasyonel operatörünü buna göre tanımlamalıyız:

$$\Delta_x \phi_{m,n} = \phi_{m+1,n} - \phi_{m,n}, \quad \Delta_y \phi_{m,n} = \phi_{m,n+1} - \phi_{m,n}$$

$$\nabla_{mn}\phi = \Delta_x \phi^y_{m,n} - \Delta_y \phi^x_{m,n} = \phi^y_{m+1,n} - \phi^y_{m,n} - \phi^x_{m,n+1} - \phi^x_{m,n}$$

3.4'yi kullanıp eşitliğin iki tarafına karşılık gelecek şekilde yazarsak

$$\nabla_{mn}\phi = \phi^{y}_{m+1,n} - \phi^{y}_{m,n} - \phi^{x}_{m,n+1} - \phi^{x}_{m,n} = \frac{e}{\hbar}\int_{\text{birim hücre}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$
$$= 2\pi\frac{e}{h}\int Bda = 2\pi\phi_{mn}$$

Buradan hareketle denklem 3.8

$$T_yT_x = e^{i2\pi\phi_{i_xi_y}}T_xT_y \tag{3.9}$$

şeklini alır. Dolayısıyla Hamiltonyenle komütasyon ilişkisinin sıfır olmasını istediğimiz yeni öteleme operatörleri tanımlamalıyız [42]. Belli bir homojen manyetik alan altında bu operatörlerin alacağı şekli yazalım. Landau ayarında ($A_x = -By = -2\pi\phi i_y$) ϕ her plaket için homojen akı olsun, bunu kullanarak operatörler

$$T_xT_y = e^{i2\pi\phi}T_yT_x \tag{3.10}$$

ilişkisini sağlarlar. O halde bu operatörler $\phi = p/q$ için, p ve q karşılıklı asal olduğu sürece komütasyonu sağlarlar. Dolayısıyla manyetik öteleme operatörleri $M_x = T_x$ ve $M_y = (T_y)^q$ şeklinde tanımlanırsa

$$M_xM_y = M_yM_x \tag{3.11}$$

olduğu görülür. Fazları bu şekilde ayarlayıp Landau ayarını kullandıktan sonra Hamiltonyenimizin son hali

$$H = -t\left(\sum_{i_x,i_y} e^{-i2\pi i_y\phi}c^{\dagger}_{i_x+1,i_y}c_{i_x,i_y} + \sum_{i_x,i_y} c^{\dagger}_{i_x,i_y+1}c_{i_x,i_y} + \text{h.c}\right) \tag{3.12}$$

ile verilir. Bu şekilde örgü düzleminde x yönünde atlamalar fazdan ötürü y koordinatına bağlı olarak karmaşık sayı değeri alabilir, y yönündeki atlamalarda faz birikmez. Ayarı nasıl seçtiğimize göre değişebilir bu resim. Fakat plaket başına biriken toplam fazdan ötürü ortaya çıkan birim hücre başına düşen manyetik kuantum akısı ayar değişmezdir. 3.12 Harper-Hofstadter Hamiltonyenidir. Öteleme operatörünün bu ayarda y yönünde q kadar hücre taradıktan sonra fazın birim değer alması sağlandığından yeni bir hücre tanımlaması gerekiyor. Bu tanımlamalara manyetik hücre denip yeni bölgeye manyetik Brillouin bölgesi denir ve $k_x \in [-\pi/a, \pi/a), k_y \in [-\pi/(qa), \pi/(qa))$ ile tanımlanır, a örgü sabitidir. Bloch teoremi kullanılarak oluşturulan bir deneme fonksiyonu yazılıp Schrödinger denkleminde yerine yazıldığında bir fark denklemi ortaya çıkar ve bunu matris formuna sokup problemi $q \times q$ boyutundaki bir matrisin özdeğer problemine dönüştürmüş oluruz.

$$\Psi_{i_x,i_y} = e^{ik_x i_x a} e^{ik_y i_y a} \psi_{i_y},\ \psi_{i_y+q} = \psi_{i_y} \tag{3.13}$$

ile verilen deneme fonksiyonu manyetik birim hücre boyunca olan tek-parçacık dalga fonksiyonu üzerinden yazılmıştır. Bunun sebebi öteleme operatörlerinin özvektörü olabilmeleridir. Ψ_{i_x,i_y} fonksiyonunu 3.12 Hamiltonyeni için Schrödinger denklemine soktuğumuzda

$$E\Psi_{i_x,i_y} = -t(e^{-i2\pi\phi i_y}\Psi_{i_x+1,i_y} + e^{i2\pi\phi i_y}\Psi_{i_x-1,i_y} + \Psi_{i_x,i_y+1} + \Psi_{i_x,i_y-1}) \tag{3.14}$$

elde ederiz. 3.13'deki tanımı kullanıp denklem 3.14'ü tekrar yazdığımızda

$$E\psi_{i_y} = -t\Big(2\cos(k_x a - 2\pi\phi i_y)\psi_{i_y} + e^{ik_y a}\psi_{i_y+1} + e^{-ik_y a}\psi_{i_y-1}\Big) \tag{3.15}$$

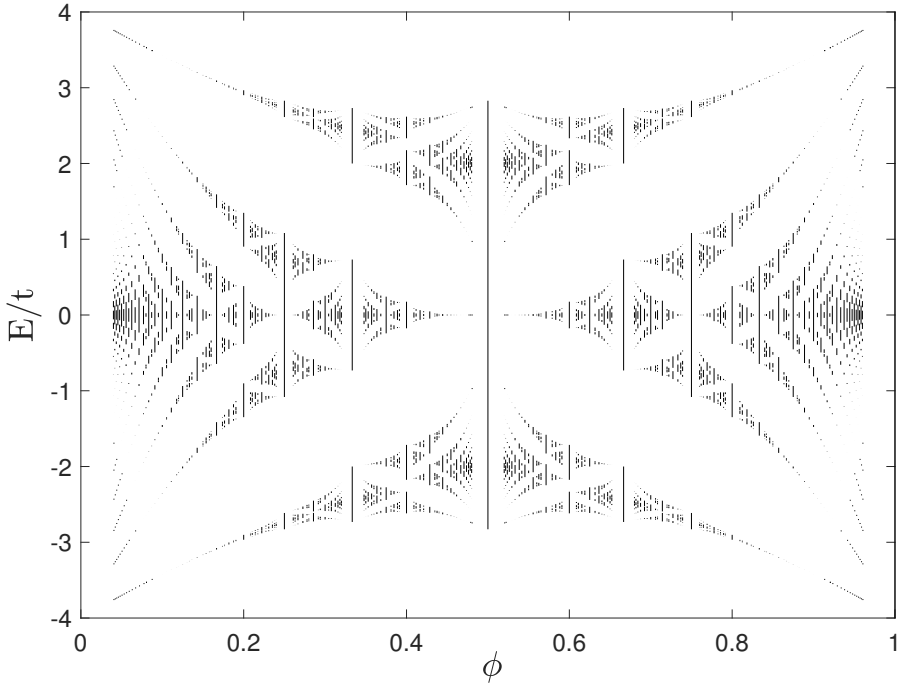
bulunur. Elimizde sadece q tane biricik çözüm olduğu için (çünkü $n+q=n$ manyetik birim hücrede bizi başa döndürür), bu çoklu fark denklemini matris formuna getirip özdeğer ve özvektörleri hesaplayabiliriz. Matris formunda

$$H(k_x,k_y)\begin{pmatrix}\psi_0\\ \vdots\\ \psi_{i_y}\\ \vdots\\ \psi_{q-1}\end{pmatrix} = E(k_x,k_y)\begin{pmatrix}\psi_0\\ \vdots\\ \psi_{i_y}\\ \vdots\\ \psi_{q-1}\end{pmatrix} \tag{3.16}$$

$$H(k_x,k_y) = -t\begin{pmatrix} C_0 & e^{ik_y a} & 0 & \cdots & e^{-ik_y a}\\ e^{-ik_y a} & C_1 & e^{ik_y a} & \cdots & 0\\ 0 & e^{-ik_y a} & C_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ e^{ik_y a} & 0 & 0 & \cdots & C_{q-1}\end{pmatrix} \tag{3.17}$$

ile ifade edilir ve $C_{i_y} = 2\cos(k_x a - i_y 2\pi\phi)$ şeklindedir. Verilen bir $\phi = p/q$ için $q \times q$ boyutunda bir matris elde edildiği için spektrum q tane banda ayrılır ve bu spektrum ϕ 'nin fonksiyonu olarak karşılıklı asal p ve q için çizilirse Şekil-3.2'de olduğu gibi Hofstadter Kelebeği elde ederiz. Burada biz nümerik hesabımızı yaparken daha efektif olmak için sadece bantların sınırlarını hesaplayarak grafiği çizdirdik [43].

Daha önce bahsettiğimiz örgü sistemlerde Chern sayısı ve topolojik invaryant konusunu tek-parçacık Hofstadter-Hubbard modeli üzerinden işleyeceğiz. Temel anlamda topoloji kavramının örgü yapılarında önemli bir yere sahip olmasının altında, kristal



Şekil 3.2: Hofstadter Kelebeği. Enerji spektrumu p ve q karşılıklı asal olmak üzere, $\phi = p/q$ değişkenine bağlı şekilde çizilmiştir. Enerjinin maksimum ve minimum noktalarından itibaren bantlar çizilmiştir.

momentum niceliğinin torus $\mathbf{T^2}$ topolojisine sahip Brillouin bölgesinde yaşaması yatar. Brillouin bölgesinin $\mathbf{T^2}$ rolu ayni sistemleri için topolojik bakışları konuşurken karşımıza çıkan $\mathbf{T^2_\Phi}$ parametre uzayına benzerdir. Bu şekilde Brillouin bölgesi tanımlanabilen etkileşimsiz, bantlar arası ayrık sistemlerde ve Fermi enerjisinin bu yasak enerji aralığında bulunması durumunda her bir banda tam sayı değerli bir topolojik $C \in \mathbf{Z}$ invaryant atayabiliriz [20]. Bu topolojik invaryantların fiziksel olarak Kuantum Hall düzeneklerinde elde edilen kuantize olmuş iletkenlik ile direkt ilişkisi olduğu gösterilmiştir [31]. Bu ilişki

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h} \sum_{E_i < E_F} \nu_i \tag{3.18}$$

ile verilir. ν_i, E_i enerjili i bandının Chern sayısıdır ve bu toplam E_F Fermi enerjisine kadar devam ettirilir. Kuantum Hall düzeneğinin Fermi enerjisi yukarıda bahsettiğimiz bantlar arası bir ayrıklıktaysa düzenek materyalin iç kısmında yalıtkandır. Hall iletkenliğine katkı düzeneğin kenarlarında yaşayan kiral ve ayrık olmayan kenar durumlarından gelir. Bu kenar durumlarının varlığı, düzeneğin iç kısmının sahip olduğu topolojik yapının rolünü ortaya koyar. Bu bağlantı Thouless, Kohmoto, Nightingale ve

den Nijs tarafından belirtilmiştir [31] ve TKNN invaryantı olarak literatüre geçmiştir. Bir n bandına bu şekilde atfedilen Chern sayısı o bandın öz durumları $|u_n(\mathbf{k})\rangle$ tarafından verilir,($|u_n(\mathbf{k})\rangle$ 3.17 matrisinin özvektörleridir):

$$\nu_n = \frac{i}{2\pi}\int_{BBB}\left(\left\langle\frac{\partial u_n(\mathbf{k})}{\partial k_x}\,\middle|\,\frac{\partial u_n(\mathbf{k})}{\partial k_y}\right\rangle - \left\langle\frac{\partial u_n(\mathbf{k})}{\partial k_y}\,\middle|\,\frac{\partial u_n(\mathbf{k})}{\partial k_x}\right\rangle\right). \tag{3.19}$$

Bu hesap aslında Berry eğriliğinin parametre uzayı üzerinden değil de birinci Brillouin bölgesi (BBB) üzerinden integralidir. Bu durumda momentumlar parametre ve BBB konfigürasyon uzayı, Hofstadter-Harper bant özvektörleri de anlık özdurumlar olarak düşünülmelidir.

3.2 Optik Örgülerde Kesirli Kuantum Hall Fazı

Bu bölümde katı hal örgü sistemlerinde gözlemlenmesi deneysel olarak çok zor olan Kuantum Hall etkisinin alternatif olarak optik örgü sistemlerinde çalışılabileceğini ve belirli nümerik çalışmalarla örgü sistemlerine has hangi rejimlerde Kuantum Hall etkisi durumlarının erişilebilir olduğunu göreceğiz.

Atomların oluşturduğu aşırı-soğuk gazlar, kuantum mekaniksel etkilerin termal etkilere nazaran daha baskın olduğu rejimlerde gerçekleşen çok-parçacık fenomenlerini incelemek için çok kullanışlı bir düzenek haline gelmiştir [8]. Güçlü ilintili elektron durumlarının geleneksel olarak çalışıldığı yoğun madde sistemleri deneysel olarak daha zorlayıcı ve kontrol edilmesi zahmetli olduğu için bu platformlar egzotik kuantum çok-parçacık fenomenlerini çalışmak için idealdir [44]. Bu bağlamda Kesirli Kuantum Hall gibi güçlü ilintili durumların dönmeye maruz bırakılan aşırı-soğuk gaz sistemlerinde çalışılması öne sürülmüştür. Tezimin bu kısmında Kesirli Kuantum Hall durumunu optik örgü sistemlerinde [45, 46] inceleyeceğim. Literatürde Kuantum Hall etkilerinin örgü sistemlerinde çalışılması Chern yalıtkanları [47] başlığı altında incelendiği için bu bölüm ilerideki kısımlarda karşılaşacağımız örgü sistemlerinde uyarılma durumları için bir taban oluşturacaktır.

Kesirli Kuantum Hall etkisi uzayda pozisyon serbestlik dereceleri iki boyuta sınırlandırılmış ve güçlü dik manyetik alana maruz bırakılan elektron sistemlerinde meydana gelir. Bu sistemi karakterize eden değişkenleri, N parçacık sayısı, N_ϕ manyetik akı sayısı (manyetik akı kuantumu Φ_0 cinsinden) ve $\nu = N/N_\phi$ doluluk faktörü (Landau seviyesinin doluluğu) şeklinde sıralayabiliriz. Doluluk faktörü ν'ye bağlı olarak

bu sistemin temel durumu güçlü ilintili olup sıkıştırılamazlık, anyon uyarılmaları, kesirli istatistik gibi zengin fiziksel davranışları gösterebilir [12]. Bu bölümdeki çalışmamızda biz $\nu = 1/r, r \in \mathbf{Z}^+$ doluluk faktörünün temel durumlarını inceleyeceğiz. Bu temel durumlar sıkıştırılamaz bir kuantum sıvısı oluşturup diğer yüksek enerjili uyarılmış durumlardan bir enerji aralığı ile ayrılmışlardır ve Landau ayarında daha önce de bahsettiğimiz Laughlin dalga fonksiyonu [11]:

$$\Psi^r(\{z_i\}_i^N) = \prod_{j<k}(z_j - z_k)^r \prod_{j=1}^{N} e^{-y_i^2/2} \tag{3.20}$$

bu $\nu = 1/r$ durumlarını gayet iyi tarif edebilen bir tahmini dalga fonksiyonudur. r fermiyonik durumlarda gerekli olan antisimetri şartını sağlayabilmek açısından tek sayı değerleri almalıdır. Bu bölümdeki çalışmada örgü üzerinde bozonik sistemleri inceleceğiz ve simetrik dalga fonksiyonuna sahip olmak için r çift sayı değerleri almalıdır. Bir önceki bölümde bahsettiğimiz gibi manyetik alana maruz kalmış örgü sistemini Harper-Hofstadter(HH) Hamiltonyeni Landau ayarında

$$H = -t\left(\sum_{i_x,i_y} e^{-i2\pi i_y \phi} c^\dagger_{i_x+1,i_y} c_{i_x,i_y} + \sum_{i_x,i_y} c^\dagger_{i_x,i_{y+1}} c_{i_x,i_y} + \text{h.c} \right) \tag{3.21}$$

ile ifade edeceğiz. Bozonik durumlarla ilgilendiğimiz için operatörler bozonik komütasyon ilişkileini sağlamalıdırlar. Örgü üzerinde parçacıklar arası sonlu etkileşim durumlarını incelemek için bir etkileşim Hamiltonyeni H_I eklenebilir, bu etkileşimli model Harper-Hofstadter-Hubbard modeli olarak adlandırılır. Bu bölümde sert bozon yaklaşımını kullanarak bozonik ve fermiyonik sistem arasında bire bir ilişkiyi kurmaya çalışacağız. Dolayısıyla ilk etapta sonlu etkileşim terimi koymadan işlemlerimize devam edeceğiz. Bu zamana kadar üzerinde durduğumuz sistemlerde elektronları düşünerek hareket ettik. Fakat şimdi atomik sistemlerden söz ettiğimiz için manyetik alanın nötr parçacıklar için nasıl oluşturup analog etkiyi elde edeceğimiz sorunu ortaya çıkıyor. Olayın özü bir şekilde plaket etrafında tur atılınca bir faz elde edilmesidir. Bunu sağlayabilmek için lazer yardımıyla örgü noktaları arasında atlanma sağlanması gibi çeşitli öneriler sunulup belirli başarılar elde edilmiştir [48].

Fiziksel olarak gerçekçi büyük bir sistemin iç kısmındaki durumları isabetli çalışabilmek için, kenar durumlarını göz ardı eden periyodik sınır koşullarını sisteme dahil etmeliyiz. Bu şekilde oluşturulan sınır koşulları sonsuz sistemleri efektif şekilde simüle edebilmek için gereken etkenlerdir [49]. Gerçekte hiçbir sistem elbette sonsuz değildir fakat bu yaklaşımı kullanarak sistemin kitlesel dinamiğini gayet isabetli bir şekilde

tarif edebiliriz. Sistemi bir torusun üzerinde düşünüp ona uygun eklemeler yapacağız. Bunun bir önemli getirisi de sistemin topolojik özelliklerini inceleyebileceğimiz bir ortam hazırlamış olmasıdır. 2.2 bölümünde yaptığımız, Hall sistemini torus üzerine koyma durumunun alternatif halini örgü üzerinde yapacağız. Torus üzerinde genelleştirilmiş sınır koşullarını sürekli-ortam tek-parçacık öteleme prensiplerinden çıkarabiliriz [45]. 2.1 Hamiltonyeni açık formunda genel bir q yükü için

$$H = \frac{1}{2m}\left[(-i\hbar\partial_x - qA_x)^2 + (-i\hbar\partial_y - qA_y)^2\right] \tag{3.22}$$

ile verilir ve ayar bağımlı bir potansiyel öteleme simetrisini kırdığı için bu Hamiltonyen uygun manyetik öteleme altında invaryanttır. Manyetik öteleme operatörü psödo-momentum operatörü $\mathbf{k}$ ile

$$t(\mathbf{a}) = e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}/\hbar} \tag{3.23}$$

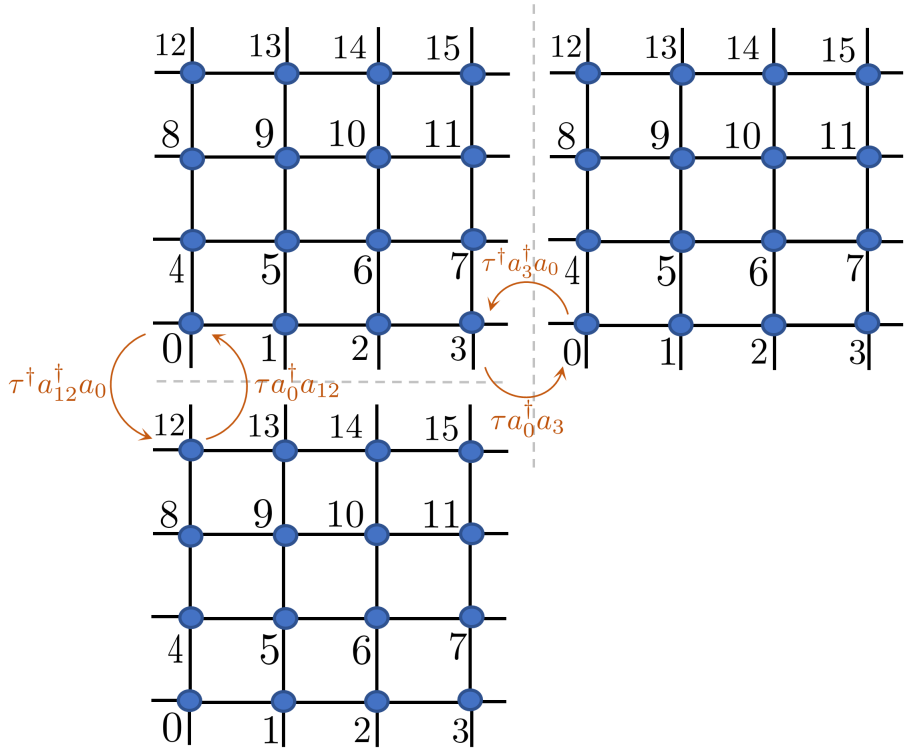
tanımlanır ve psödo-momentum operatörü

$$\begin{aligned} k_x &= -ih\partial_x - qA_x - qBy \\ k_y &= -ih\partial_y - qA_y - qBx \end{aligned} \tag{3.24}$$

şeklindedir. Landau ayarına göre psödo-momentum operatörünü düzenleyip genelleştirilmiş sınır koşulları

$$\begin{aligned} t(L_x\mathbf{x})\psi(x,y) &= e^{i\theta_x}\psi(x,y) \\ t(L_y\mathbf{y})\psi(x,y) &= e^{i\theta_y}\psi(x,y) \end{aligned} \tag{3.25}$$

ile ifade edilir. Burada genelleştirme bir ekstra faz faktörü ile sağlanır. Sonuçta beklenen değerler aynı çıktığı için durumlar hala özdeşlerdir. Torus yüzeyine dik olan manyetik akı sistemin yüzeyine etkiyen dik manyetik alandan ötürüdür. Fakat burada oluşan fiziksel akıya ek olarak torusun katı kısmının içinde (x-döngüsü) ve torusun deliğinin içinden (y-döngüsü) akıları da olabilir. Bu ekstra akılar sınırlardaki θ_x ve θ_y bükme açılarını getirdiğini farz edelim. 3.25'te verilen bu sınır koşulları 3.21'in içine ek atlama terimleri gelmesine sebep olur. Şekil-3.3'te olduğu gibi bu uç uca özdeşleştirme ile sınır koşulları sisteme dahil edilmiş olunur. Şekil-3.3'te örgü konfigürasyonu, $L_x = 4, L_y = 4$ şeklinde verilen bir sistemde temsili olarak sınır koşullarının bir çifti gösterilmiştir. Burada τ değişkeni hem manyetik alandan ötürü olan fazı hem de sınırlarda gelen bükme fazını içerir. Bu şekilde sınır koşulları da sisteme dahil edildikten



Şekil 3.3: Kare örgü üzerinde torus sınır koşulları verilmiştir. Sadece birer yatay ve dikey kısım temsil edilmiştir. Bu uçtan uca atlamalar bütün örgüyü kapsayacak şekilde modele ilave edilir.

sonra sıradaki işlem enerji özdurumlarını bulmaktır.

Güçlü-ilintili çok-parçacık sistemlerinin analitik çalışılması büyük zorluklar teşkil ettiği için nümerik hesaplar büyük bir önem arz etmektedirler. Bizim problemimizde de bu sebeple simülasyonlar yoluyla elimizdeki Hamiltonyen'in spektrumunu elde etmeye çalışacağız, çünkü ileride gerçekleştireceğimiz dalga fonksiyonu örtüşme hesabı için sistemin özvektörleri elimizde olmalıdırlar. Nümerik metot olarak problemimize uygun Tam Diyagonalizasyon protokolünü uygulayacağız. Bu metot temelde uygulanması açısından gayet basittir ve birkaç temel madde ile özetlenebilir:

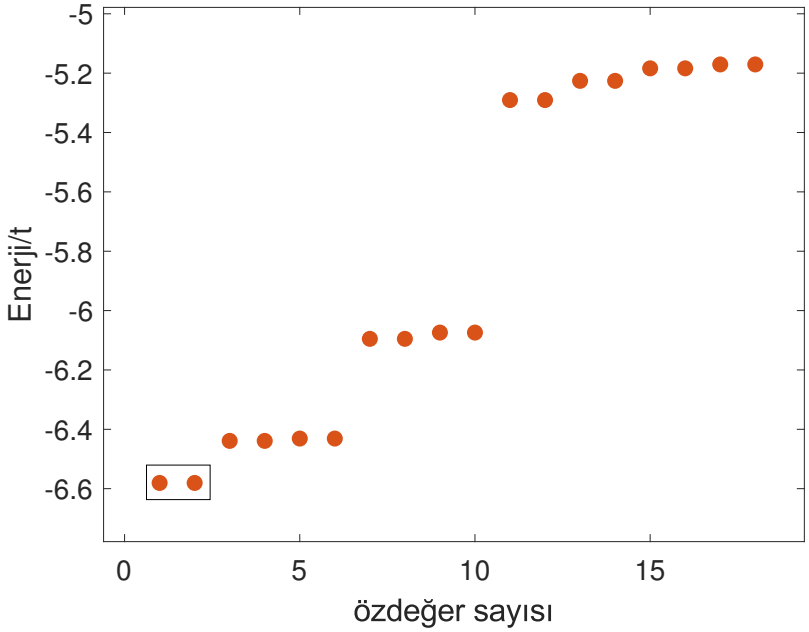
1. Sistemi tanımlayan N ve N_ϕ parametrelerine özelliklerine bağlı şekilde uygun $S(N, N_\phi)$ bir Hilbert uzayı kurulmalıdır. Bu adımda sayı bazı ya da eldeki sistemle maksimum ortak özduruma sahip kümenin içindeki operatörlerin özvektörleri kullanılabilir.

2. Hamiltonyenin içerisindeki terimlerin kullanılan bazdaki matris elemanları bulunur ve bu sayede Hamiltonyen matris formunda ifade edilmiş olur.

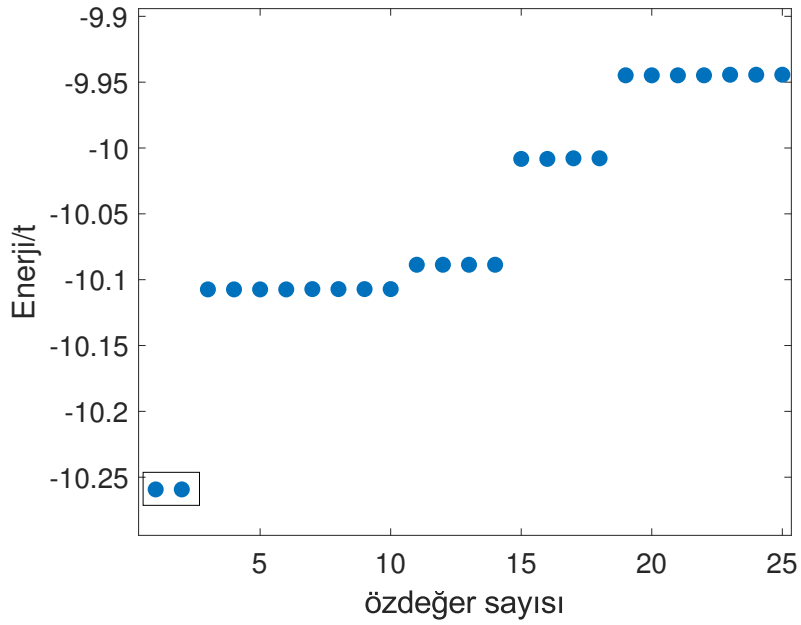
3. Uygun bir diyagonalizasyon prosedürü (Lanczos algoritması [50]) ile özdurum ve özvektörler bulunur.

Bu maddelere özel durumlarda daha efektif hesaplar yapmak için değişiklikler uygulanabilir. Matrisin seyrek olması durumunda farklı prosedürler ve simetriler ile blok diyagonel formlara getirme de düşünülebilir. Biz spektrum hesaplamalarında sert bozon durumları için parçacık sayısını $N = 2, 3$ olarak tuttuk ve $\nu = 1/2$ Laughlin durumları üzerine sistemleri yapılandırdık. Nümerik simülasyon ile periyodik sınır koşuluna maruz kalan sistemimizin spektrumlarından sürekli-ortam durumlarında elde edilen izole olmuş ve aralıklı temel durumlar [45] şekil-3.4 ve 3.5'te görüldüğü gibi tekrar üretilip doğrulanmıştır. Şekil-3.4 ve 3.5'te görülen bu izole dejenere durumları eğer Kesirli Kuantum Hall etkisinde olduğu gibi yerel tedirgemelere karşı dayanıklılarsa ve topolojik bir sebeple temel durum dejenereliği oluştuysa [5] hiçbir yerel ölçüm ile bu dejenere durumları birbirinden ayıramayız. Örgü sisteminin durumlarının $\nu = 1/r$ durumları için isabetli olan Laughlin varyasyonel dalga fonksiyonu ile ne kadar uyumlu olduğunu anlamak için örtüşme hesabı gerçekleştireceğiz.

Bu hesap için öncelikle Laughlin dalga fonksiyonunu torus sınır koşulları çerçevesinde tekrar ifade edip örgü sistemine uygun bir şekilde yapılandırmalıyız. Landau aya-



Şekil 3.4: $L_x = 4, L_y = 8$ örgü üzerinde, $N = 2$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/8$ olan sistemin enerji spektrumu. Özdeğerler küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır.



Şekil 3.5: $L_x = 6, L_y = 10$ örgü üzerinde, $N = 3$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/10$ olan sistemin enerji spektrumu. Özdeğerler küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır.

rında, $\mathbf{A} = -By\hat{\mathbf{x}}$, sürekli-ortam için torus üzerinde Laughlin dalga fonksiyonu [51]

$$\Psi^{(l)}(z_1, \cdots, z_N) = f_{rel}(z_1, \cdots, z_N) F^{(l)}_{CM}(Z) e^{-\pi\phi \sum_j y_j^2} \tag{3.26}$$

$$f_{rel}(z_1, \cdots, z_N) = \prod_{j<k}^{N} \left(\vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left(\frac{z_j - z_k}{L_x} \middle| i\frac{L_y}{L_x} \right) \right)^2 \tag{3.27}$$

$$F^{(l)}_{CM}(Z) = \begin{bmatrix} l/2 + (N_\phi - 2)/4 \\ -(N_\phi - 2)/2 \end{bmatrix} \left(\frac{2\sum_i z_i}{L_x} \middle| 2i\frac{L_y}{L_x} \right) \tag{3.28}$$

şeklinde verilir. Burada $z_k = x_k + iy_k$ kompleks düzlemde k parçacığının örgü birimi a cinsinden koordinatıdır, $Z = \sum_i z_i$, ϕ plaket başına düşen manyetik akı kuantasıdır. 3.27 dalga fonksiyonunun göreli kısmını temsil eder ve 3.28 kütle merkezi hareketinin dahil edilmesi için gerekli olan terimdir. Haldane'in öteleme simetrisi argümanlarına gçre [52] torus üzerinde $\nu = 1/2$ halinde, $F_{CM}(Z)$ iki kez dejeneredir ve $l = 0, 1$ iki dejenere temel durumu temsil ederler. 3.26 fonskiyonunun barındırdığı ifadeler ϑ fonksiyonları ile yazılır ve

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \left(z \middle| \tau \right) = \sum_k e^{i\pi\tau(k+a)^2 + 2\pi i(k+a)(z+b)} \tag{3.29}$$

şeklindedir [53], toplam bütün tamsayılar üzerinden alınır. Fakat örgü üzerinde olduğumuz için nümerik sonuçlarımız bize sonlu bileşene sahip vektörler çıkaracaklar. Dolayısıyla Laughlin fonksiyonunu örgü üzerinde yazabilmeliyiz. Örgü üzerindeki noktaları kompleks düzlem üzerine koyduğumuzu düşünelim bu durumda her bir örgü noktası (x, y) ile ifade edilebilir. Nümerik sonuçlarımızı sayı bazında elde ettiğimiz için örgü noktası üzerindeki doluluk durumları cinsinden özvektörlerimizi elde ederiz ve bu sayı bazları, $\{|n_\beta\rangle\}$ cinsinden nümerik enerji öz vektörümüzü

$$H|\Psi_n\rangle = E_n|\Psi_n\rangle\,; \quad |\Psi_n\rangle = \sum_\beta g^n_\beta |n_\beta\rangle\,; \;\; |n_\beta\rangle = |n_1 n_2 n_3 \cdots n_M\rangle^\beta \tag{3.30}$$

şeklinde düşünebiliriz ve burada g^n_β, $|\Psi_n\rangle$ özvektörünün β bileşenidir. Laughlin durumlarını örgü üzerindeki doluluk durumları bazında açtığımızı düşünürsek; pozisyon dalga fonksiyonunun örgü noktalarındaki değerleri, oluşturulacak vektörün bileşenlerini verir:

$$|\Psi_L\rangle = \sum_\beta c_\beta |n_\beta\rangle\,; \;\; c_\beta = \Psi_L(z_1, \cdots, z_N) = \Psi_L(n_\beta(\{z\}_i^N)) \tag{3.31}$$

Burada doldurma $|n_\beta\rangle$ konfigürasyonundan yola çıkılarak $\{z\}_i^N$ koordinatlarının örgü üzerindeki değerleri bulunur ve argüman olarak Laughlin dalga fonksiyonuna verilir. Bunu bir örnekle açıklamak gerekirse, 3 tane örgü noktası olan doğrusal bir örgü üzerinde 2 parçacık düşünelim; bu durumda bizim sert bozon sayı bazı setimiz $\{|110\rangle, |101\rangle, |011\rangle\}$ şeklindedir. Burada $|110\rangle$ bir parçacığın örgünün $(x = 0)$ noktasında ve diğer parçacığın örgünün $(x = 1)$ noktasında olduğu pozisyon durumunu belirtir. Dolayısıyla koordinat bilgilerini elimizde bulundurarak 3.26 içine argüman olarak verip $|110\rangle$ baz vektörünün Laughlin dalga fonksiyonu içindeki ağırlığını bulmuş oluruz. Bir diğer nokta ise Laughlin durumu dejenere olduğu için dejenere durumlar iki boyutlu bir özuzay oluştururlar. Bu sebeple bu iki dejenere durumunun keyfi bir doğrusal süperpozisyonu yine geçerli bir özvektör olacaktır. Buradaki serbestliği örtüşme hesabı yaparken örtüşmeyi maksimum hale getirecek şekilde gerçekleştiririz. Örtüşmeyi

$$|\langle\Psi_{GS}|\Psi_L\rangle|^2 \tag{3.32}$$

ile ifade ederiz. $\nu = 1/2$ doluluk oranı için yapılan hesaplarımızda örtüşmeyi $|\langle\Psi_{GS}|\Psi_L\rangle|^2 \approx 0.99$ olarak gözlemledik ve bu şekilde sert-bozon durumlarında torus üzerindeki Laughlin dalga fonksiyonunun bozonik Kesirli Kuantum Hall durumları için isabetli bir tahmini durum [45, 46] olduğu sonucuna varırırız.

2.2 bölümünde üstünde durduğumuz Chern sayısının çok-parçacıklı sistemlere genelleştirilmesi [32] ile topolojik invaryansı sistemimizi sınıflandırmak için kullanabiliriz. Topolojik düzen sistemlerin sahip olabileceği bir özellik konumunda olduğu için örtüşme hesabından daha kesin bilgi barındırır. Nümerik olarak, [ek-C]'de belirtildiği gibi [54,55], elde edilen dejenere temel durumların çok-parçacık Chern sayısı hesabını gerçekleştirdik. Beklenildiği gibi değerleri $C = 1$ olarak elde ettik [45] ve topolojik düzenin bu sistemde Kesirli Kuantum Hall durumlarınınkiyle benzer olduğunu gösterebilmiş olduk. Dejenere durumların iletkenliğe eşit katkı verdiğini varsayarak durum başına düşen Chern sayısının $1/2$ olduğunu söyleyebiliriz.

4 KESİRLİ CHERN YALITKANLARINDA KUAZİDEŞİK UYARILMASI

Fiziksel sistemlerde topolojik fazların araştırılmasına olan ilgi, Kuantum Hall etkisinin ve genel anlamda topolojik yalıtkanların keşfedilişinden beri inanılmaz bir artış göstermiştir [4,47]. Bu denli yoğun ilgi iletkenlik kuantizasyonu, kesirli istatistik gösteren anyon fiziği [12] gibi daha önce benzeri görülmemiş fenomenlerin açıklanmasına ve çeşitli potansiyel uygulamalarının keşfedilmesine yol açmıştır. Bu bağlamda kaydedilen son gelişmelerin teknolojik açıdan da ilerlemeye sebebiyet vereceği düşünülmektedir. Bu gelişmeler özellikle kuantum bilgisayar/hesaplama [13, 56] teknolojisi için gelecek vaadetmektedir.

Aşırı-soğuk atom [8] ve foton [57] sistemlerinde meydana gelen gelişmeler ile Kesirli Kuantum Hall (KKH) fazı ve Kesirli Chern Yalıtkanı gibi güçlü-ilintili topolojik fazlar barındıran elektron sistemlerinin alternatif sistemlerde çalışılabilmesi mümkün olmuştur. Buna ek olarak, aşırı-soğuk atom ve foton sistemlerinde sahip olunan deneysel kontrol edilebilirlik ve daha esnek şekilde değişiklikler yapmanın mümkün olmasından ötürü bu sistemler çok etkili birer kuantum simülatörü [44] konumundadırlar. Son zamanlarda topolojik kuantum fazları örgü modellerinde de çalışılmaktadır. Fakat bu tür analog sistemlerde çalışırken sistemdeki fazın topolojik faz olup olmadığını anlama problemi ile karşılaşırız. Bu durumun üstesinden gelebilmek için sistemin ortaya koyduğu belirli karakteristikleri incelemek gerekir. Bunlara örnek olarak kesirli yüklü uyarılma durumlarının olması, uyarılma durumlarının benzerliği ve temel durumlardan yola çıkılarak hesaplanan dolanıklılık spektrumu analizlerinin eşleşmesi verilebilir [58, 59]. Torus üzerine yerleştirilen KKH sistemlerinde kuazi-deşik durumlarının sayılması, uyarılmaları çalışabilmek açısından önemlidir. Çünkü elimizde olan analog sistemin uyarılmalarının sayısıyla, Laughlin tipi $\nu = 1/r$ KKH sistemlerinin uyarılmalarının sayısının denk olması, analog sistemin fazının topolojik açıdan içsel bir düzene sahip olduğunun kuvvetli bir göstergesidir. Bu sayede analog sistemin barındırdığı du-

rumun aslında bir KKH durumu olduğu çıkarsanır [60]. Belirli çalışmalarda bazı Laughlin tipi kuazi-deşiklerin saymalarının ince-torus limiti ya da genelleştirilmiş Pauli ilkesi ile yapılabileceği gösterilmiştir [61, 62].

Bu bölümde torus periyodik sınır koşullarına maruz bırakılmış, dik manyetik alan altında örgü üzerindeki bozonları çalışacağız ve bu sistemde ortaya çıkacak uyarılma durumlarının sayısını en genel Laughlin doldurma oranı $1/r$ için vereceğiz. Laughlin tipi uyarılmaların çeşitli doluluk oranlarında özelliklerini anlamak için dikkatimizi dejenere kuazi-deşik manifolduna vereceğiz. Çok-parçacık Chern saysını belirli durum gruplanmaları için hesaplayarak farklı durumların hangi Laughlin uyarılmalarına karşılık gelebileceğini göstereceğiz. Buna ek olarak çakılı Laughlin kuazi-deşiklerinin sahip olduğu kesirli yüklerin sadece çakılı olmayan kuantum akısı ile ilgili olduğunu yük seyrelmesi hesabı ile göstereceğiz.

4.1 Dejenere Kuazi-Deşik Manifoldu

Bu bölümde bozonik Harper-Hofstadter modelini kullanarak Laughlin kuazi-deşik uyarılmalarını çalışmak için giriş yapacağız. Örgü sistemimizde kuazi-deşikler oluşturmak için yapmamız gerekenleri belirleyeceğiz. Nümerik hesaplarla kuazi-deşik uyarılmalarını belirlemeye çalışacağız ve enerji spektrumlarını inceleyip dejenere kuazi-deşik manifoldunu tanımlayacağız.

(L_x, L_y) boyutlu kare örgü üzerinde dik bir manyetik alana ve torus periyodik (manyetik-3.2) sınır koşullarına maruz bırakılan, N tane bozonik parçacıklı sistem düşünelim. Manyetik akı yoğunlu, p ve q karşılıklı asal sayılar olmak üzere $\phi = p/q$ olsun. Örgü üzerindeki toplam manyetik akı $N_\phi = L_x L_y \phi$ ile verilir. Bu sistemin doluluk oranı $\nu = N/N_\phi$ ile verilir ve aynı örgü noktasındaki etkileşimleri de katarsak model

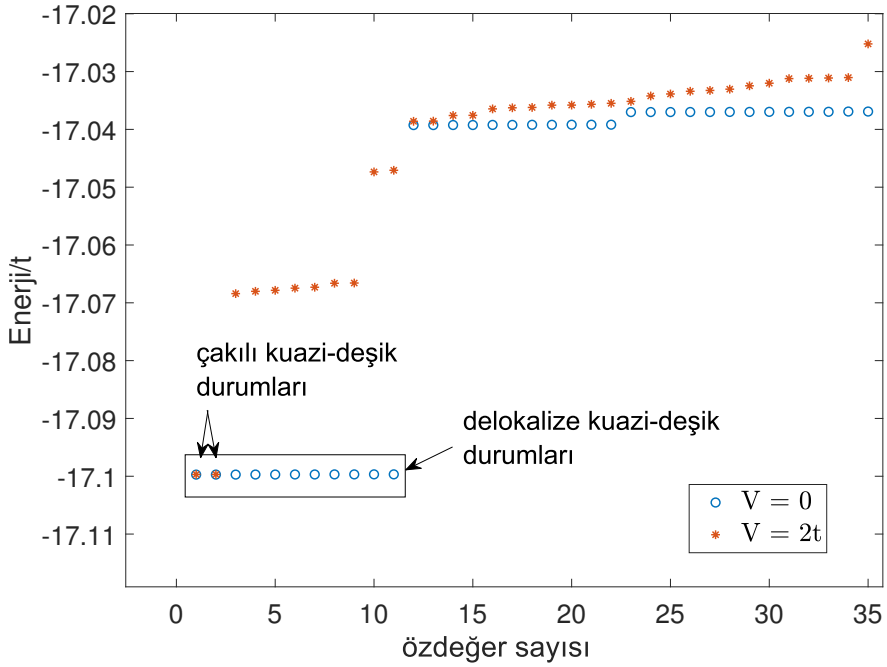
$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle} \left(e^{i2\pi\phi_{ij}} c_i^\dagger c_j + \text{h.c.} \right) + \frac{U}{2} \sum_i n_i(n_i - 1) \tag{4.1}$$

Harper-Hofstadter-Hubbard (HHH) Hamiltonyeni ile ifade edilir [45]. Kare örgü üzerinde sadece en yakın komşular arasında kinetik atlamalar hesaba katılır. $c_i^\dagger$ örgü üzerinde i noktasında parçacık yaratma ve j noktasında c_j yok etme operatörleridir, ve bozonik komütasyon ilişkilerini sağlarlar. Sayı operatörü $n_i = c_i^\dagger c_i$ ile ifade edilir. t ve U sırasıyla kinetik atlama şiddetini ve etkileşim potansiyelinin şiddetini temsil

ederler. Bizim sistemimizdeki itici etkileşim için $U > 0$ olarak alınacaktır. Laughlin $\nu = 1/r$ kuazi-deşiklerini düşünürsek sisteme N_{kd} tane ekstra manyetik kuantum akısı eklediğimizde $N_\phi = \nu N + N_{kd}$ haline gelir. Bu şekilde sistemde N_{kd} tane kuazideşik oluşturulur. Sisteme ekstra akı eklemek demek tek-parçacık problemi açısından ekstra orbital demektir, tek-parçacık probleminde örgünün alanını büyüterek parçacık sayısı sabitken ekstra akı elde edebiliriz. Nümerik hesaplarımızda bu yolu izleyeceğiz. Bu oluşturulan kuazi-deşikler delokalize kuazi-deşikler olarak adlandırılırlar ve spektrumda dejenere sıfır enerjili manifoldu oluştururlar [63]. Hamiltonyenimiz 4.1'e bir safsızlık potansiyeli ekleyerek serbest delokalize kuazi-deşikleri istenilen pozisyona çakılı hale getirebiliriz. Bu şekilde 4.1

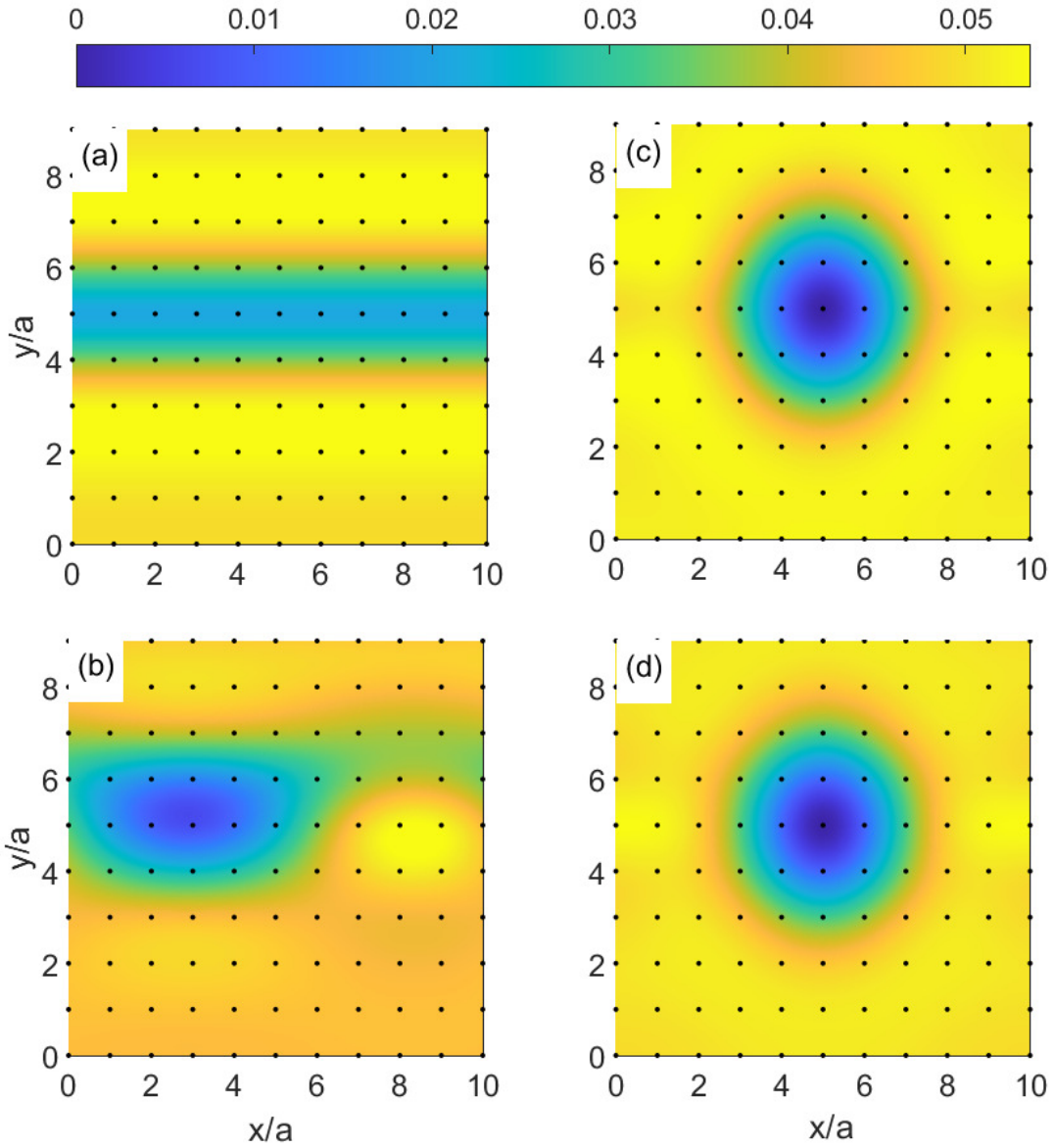
$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle} \left(e^{i2\pi\phi_{ij}} c_i^\dagger c_j + \text{h.c.} \right) + \frac{U}{2} \sum_i n_i(n_i - 1) + V \sum_{i=1}^{N_{kd}} n_i \tag{4.2}$$

formuna gelir. V burada safsızlık potansiyelinin şiddetini belli eder. Sistemde delokalize ve lokalize kuazi-deşikler beraber bulunabileceği için $N_{kd} = N_d + N_l$ olarak ifade edebiliriz. N_d çakılı olmayan manyetik kuantum akılar sayesinde oluşan delokalize kuazi-deşik sayısı ve N_l çakılı olan manyetik kuantum akılar sayesinde oluşan lokalize kuazi-deşik sayısıdır. Etkileşimlerden ötürü sistemimizi ifade etmek için kullanacağımız baz setinin boyutu çok büyüyeceği için modeli tam diyagonalizasyon metodu ile çalışmak yüksek parçacıklı durumlarda çok zorlaşacak ve hatta mümkün olmayacaktır. Bu sebepten ötürü projeksiyon (yansıtma) metodu ile etkileşim ve safsızlık potansiyellerini, etkileşimsiz Hamiltonyenin tek-parçacık problemini çözüp en alt seviye k-bandının oluşturduğu uzayda temsil edeceğiz. Metodun detaylı şekilde gösterimi momentum uzayında [63, 64] [ek-A], gerçek uzayda [54] ise [ek-B] kısımlarında verilmiştir. Bu sayede nümerik yükü hafifletip sistemimizi daha büyük örgü ve parçacık sayılarıyla çalışabiliriz. Kuazi-deşiklerin belirli bir fiziksel yer kaplamasından ötürü ve etkileşim etkilerini daha iyi işleyebilmek için büyük sistemler kullanmak gerekir. Şekil-4.1'de enerji spektrumuna bakarak safsızlık potansiyeline kuazi-deşiğin bağlanması nedeniyle temel durum dejenereliğinin azaldığını görüyoruz. Delokalize kuazi-deşik durumları çakılı sistemlerde yüksek enerjilere kayar. Sisteme ekstra manyetik akı kuantumu eklediğimizde yoğunluk profillerinin nasıl değiştiğini gözlemlemek kuazi-deşik uyarılmaları hakkında bize bilgi verir. Özellikle Laughlin sıkıştırılamaz akışkan durumlarında yoğunluk profilleri düz bir trendi izlerler. Kuazi-deşik du-



Şekil 4.1: $L_x = 11, L_y = 10$ örgü üzerinde, $N = 5$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/10$ olan sistemin safsızlık potansiyeli varlığında ve yokluğundaki enerji spektrumu. Özdeğerler küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. Etkileşim ve safsızlık şiddeti $U = 2t$ ve $V = 2t$ olarak alınmıştır.

rumları da bu düz trendden sapmalar meydana gelir. Çakılı durumlarda, kuazi-deşiğin lokalize olduğu yerde yoğunluk azalması olur. Şekil-4.2'de lokalize ve delokalize durumların yoğunluk karşılaştırmaları verilmiştir. Lokalize durumlarda yerel bir radyal yoğunluk azalması gözlenirken, delokalize durumlarda şeritler yada keyfi bir yayılma halinde uzayda uzanmış durumlar gözlenir [64]. Nümerik olarak yerel yoğunluğu sayı operatörünün istediğimiz durumlar üzerinden beklenen değerini hesaplayarak buluruz ve $\langle n_i \rangle = \langle \psi_{kd} | n_i | \psi_{kd} \rangle$ ile ifade ederiz. Çakılı kuazi-deşik durumlarında da dejenere bir temel durum uzayı elde ediyoruz. Bu iki durumun keyfi doğrusal kombinasyonları da sistemin bir özdurumudur. Yoğunluk hesabının durumlar üzerinden keyfiyetini azaltmak için bir de iki durum üzerinden ortalama bir yoğunluk hesaplayabiliriz. Şekil-4.3'te yoğunluğun şekil-4.2'de olduğu gibi çakılma merkezine doğru radyal azalma trendini izlediğini görüyoruz. Bu çakılma sonrasında o noktanın etrafında bir elekton yoğunluğu azalması olur. Çünkü 2.2 kısmında da belirttiğimiz gibi kuazi-deşikler kesirli yüklü parçacıklara sebebiyet verirler ve elektron yoğunluğu kuazi-deşiğin çakılı olduğu noktada yok olur. Dejenere manifoldu oluşturan durumlar üzerinden ortalama uzamsal yoğunluğu ve yoğunluk seyrelmesini çakılma noktasından itibaren bir yarı-

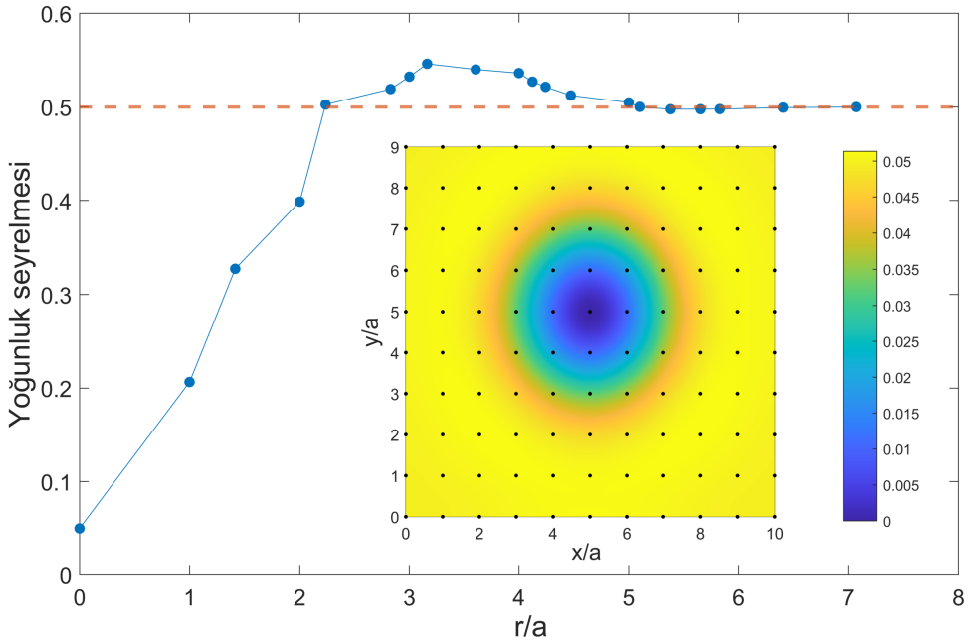


Şekil 4.2: $L_x = 11, L_y = 10$ örgü üzerinde, $N = 5$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/10$ olan sistemin safsızlık potansiyeli varlığında (c ve d iki lokalize dejenere durum) ve yokluğundaki (a ve b iki delokalize durum) yoğunluk profilleri. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. Etkileşim ve safsızlık şiddeti $U = 2t$ ve $V = 2t$ olarak alınmıştır. Çakılı durumlarda safsızlık potansiyeli merkezde olacak şekilde konulmuştur.

çap belirleyerek hesapladık. Bu seyrelme hesabı bize biriken yük yoğunluğunu yani kuazi-deşik yükünü verir. Sürekli ortamlarda yapılan hesabı örgü sistemleri gibi ayrık durumlara uyarlayıp [65]:

$$Q_r = \sum_i \Delta n_i \equiv \sum_i [\langle n_i \rangle_{V \neq 0} - \langle n_i \rangle_{V=0}] \tag{4.3}$$

ile çakılma noktasından verilen bir yarıçap içerisinde kalan yük seyrelmesini ifade ettik. Şekil-4.3'te seyrelmeyi ve yükün yarıçap arttıkça nereye doğru yaklaştığını görebiliriz. Belirli bir yarıçapa vardıktan sonra seyrelme doygunluğa ulaşılır ve dolayısıyla kuazi-deşik yükünü ortaya çıkarmış oluruz. Şekil-4.3'te yükün kesikli çizgi ile gösterilen $1/2$'ye doğru yakınsamasını gözlemleyebiliriz.



Şekil 4.3: $L_x = 11, L_y = 10$ örgü üzerinde, $N = 5$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/10$ olan sistemin safsızlık potansiyeli varlığındaki yoğunluk profili ve yoğunluk seyrelmesi. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. Etkileşim ve safsızlık şiddeti $U = 2t$ ve $V = 2t$ olarak alınmıştır. Çakılı durumlarda safsızlık potansiyeli merkezde olacak şekilde konulmuştur. Seyrelme $1/2$ noktasında doygunluğa ulaşmıştır.

4.2 Genelleştirilmiş Kuazi-Deşik Sayma Prensibi

Bu bölümde genelleştirilmiş Pauli dışlama ilkesi kullanılarak $\nu = 1/r$ Laughlin kuazi-deşik durumlarının sayısını verecek genel sayma formülü türetilecektir. Sistem N parçacıktan meydana gelip bu parçacıkların N_ϕ orbitale (toplam manyetik akı sayısı) konulduğu torus üzerindeki Laughlin durumunuun kuazi-deşik uyarılmalarının sayımı iki adımla tarif edilebilir:

- N tane parçacığın N_ϕ tane orbitale genelleştirilmiş Pauli ilkesini ($(1, r)$ uygun-bölüşüm) sağlayarak [66, 67] kaç farklı şekilde yerleştirildiği küre yüzeyi üzerinde bulunur.

- Torus yüzeyiyle beraber gelen sınır koşullarını ihlal eden uygun-bölüşüm dizilimleri küre saymasıyla elde edilen dizilimlerin içinden çıkarılır.

Bu nedenle sayma problemi aslında iki problemden meydana gelmiştir: Küre üzerinde saymanın genelleştirilip $\nu = 1/r$ için ifadenin bulunması ve sınır koşullarını ihlal eden dizilimlerin hesaplanıp küre dizilimlerinden çıkartılması.

4.2.1 Genelleştirilmiş Pauli Dışlama İlkesi

Bu bölümde daha sonra kuazi-deşik saymalarında kullanacağımız bir yöntemin ana temalarını işleyeceğiz. İlerleyen bölümlerde bu ilke ile kuazi-deşik saymalarını en genel $\nu = 1/r$ uyarılmalarına genelleştirebileceğiz.

En temel kuantum mekaniği derslerinden de bildiğimiz gibi fermiyonlar aynı kuantum durumunu işgal edemezler. Örneğin spinlerin ihmal edildiği bir sistemde temel enerji durumunda yalnızca bir parçacık bulunabilir ve diğer parçacıklar adım adım uyarılmış durumlara yerleştirilirler. Dolayısıyla bu tek-parçacık orbitallerini işgal etme açısından fermiyonik parçacıklar üzerine Pauli ilkesi aracılığıyla bir kısıtlama getirilmiştir ki bu ilke modern kimyanın mekanizmalarının bir nevi temel sebebi konumundadır. Bu şekilde bir kısıtlama elbette probleme ilişkin çok-parçacık Hilbert uzayının boyutunu belirlemede kilit rol oynayacaktır. Nasıl ki bu şekilde tek-parçacık orbitallerinin işgali üzerine gelen kısıtlamalar problemle ilişkili Hilbert uzayının boyutunu tanımlıyorsa aynı şekilde anyonik parçacıklara da özel bir Hilbert uzayı boyutu vardır. Haliyle bu boyutda uyarılmaların anyonik karakteristiğine bağlıdır. Yani anyonik

parçacıkların işgal edeceği durumların yer aldığı Hilbert uzayının boyutunu belirleyen belli başlı kısıtların var olması gerekir. Sonuçta farklı istatistiklere sahip parçacıklardan söz ediyoruz ve bu da tek-parçacık orbitallerinin işgali hususunda farklı kısıtlamaların olabileceğini motive eder niteliktedir. Haldane anyonik istatistik gösteren parçacıklar için genelleştirilmiş dışlama ilkesini üretti [67]. Elimizde N parçacıklı bir sistem olsun ve tek-parçacık orbitalleri bir kuantum sayısı tarafından etiketlenebilsin (örnek: açısal momentum tek-parçacık orbitalleri). Haldane'in getirdiği bu dışlama ilkesi tek-parçacık orbitallerinin işgaline yönelik kısıtlamalar getirerek anyonik uyarılmaların sayısını bulmayı amaçlar. Dolayısıyla uyarılmaların Hilbert uzayının boyutunu fermiyonik durumlarda olduğu gibi kısıtlamalara bağlı şekilde bulabiliriz. (k, r)-uygun-bölüşüm koşulu (bizim durumumuzda $(k = 1, r)$) Fock uzayında yaşayan durumların orbital işgal sayıları üzerine bir kısıtlama getirerek o Fock uzayı durumlarını etiketler. Bu kısıt şöyledir: Fock uzayında yaşayan durumların peşpeşe r tek-parçacık orbitallerinde bulunan toplam parçacık sayısı k taneden fazla olamaz. Örneğin $(k = 1, r = 1)$ durumu fermiyonik istatistiği temsil eder çünkü bu durumda her bir orbital en fazla bir tane fermiyon içerebilir. Dolayısıyla buna genelleşirilmiş Pauli prensibi diyoruz. Laughlin kuazi-deşikleri için aşağıdaki örneği verebiliriz:

Örnek: $\nu = \frac{1}{3}$ Laughlin kuazi-deşik uyarılmalarının $(k = 1, r = 3)$ uygun-bölüşüm ile gösterimi: $N = 4$ parçacık $N_\phi = 14$ sisteminin bazı $\nu = \frac{1}{3}$ uyarılmaları (Daha önce de 2.1'de gördüğümüz gibi, akı sayısı tek-parçacık orbital sayısıdır)

$$1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0$$

$$0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1$$

$$0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1$$

4.2.2 Küre Üzerinde Kuazi-Deşik Sayması

Genelleştirilmiş Pauli ilkesi ile uygun-bölüşüm dizilimlerini bulmak için peşpeşe r orbital boyunca bir parçacıktan fazla parçacık bulunmayan bütün dizilimleri türetmeliyiz. Bu şekilde $(1, r)$ uygun-dizilim kriterine uygun dizilimlere sahip olmuş oluruz.

İşgal (doldurulmuş) edilmiş (birler) orbitaller arasında kalan işgal edilmemiş (sıfırlar) orbitallerin sayısını $x_0, x_1, \ldots, x_N$ ile ifade edelim. Örneğin x_0 birinci işgal edilmiş orbitalin sol tarafındaki sıfır sayısını ve x_1 birinci ve ikinci orbital arasındaki sıfır

sayısını temsil edilsin:

$$\underbrace{0}_{x_0}1\underbrace{000}_{x_1}1\underbrace{000}_{x_2}1\underbrace{0000}_{x_3}1\ldots1\underbrace{000}_{x_N}$$

İşgal edilmemiş orbitallerin sayısı $N_\phi - N$ ile verilir, bu toplam sahip olduğumuz sıfır sayısıdır:

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_N = N_\phi - N \tag{4.4}$$

Buna ek olarak, r tane peşpeşe orbital boyunca olan parçacık sayısı birden fazla olmamalı kısıtı, $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ şeklinde olduğu için, $x_i \geq r - 1$ formunun sağlanmasını zorunlu kılar. Bu sayede problemimiz 4.4 denkleminin $x_i \geq r - 1$ $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ şartını sağlayan tam sayı çözümlerini bulmaya indirgenir.

$$\left.\begin{aligned} &x_0 + x_1 + \cdots + x_N = N_\phi - N \\ &x_0 \geq 0 \\ &x_1 \geq r - 1 \\ &x_2 \geq r - 1 \\ &\vdots \\ &x_{N-1} \geq r - 1 \\ &x_N \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Tam sayı denkleminin içerisine kısıtları dahil edebilmek için değişken değiştirme yaparız: $a_0 = x_0, a_N = x_N, a_i = x_i + 1 - r$. Bu değişimle tam sayı denklemi:

$$\left.\begin{aligned} &a_0 + a_1 + \cdots + a_N = N_\phi - Nr + r - 1 \\ &a_0 \geq 0 \\ &a_1 \geq 0 \\ &a_2 \geq 0 \\ &\vdots \\ &a_{N-1} \geq 0 \\ &a_N \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

formunu alır ve çözümü

$$\boxed{\text{Tam sayı çözümlerinin sayısı} = \binom{N+n}{n}}$$

ile verilir. Burada $n := N_\phi - Nr + r - 1$ şeklinde tanımlanmıştır.

4.2.3 Torus Üzerinde Kuazi-Deşik Sayması

Bu kısımda torus periyodik sınır koşullarını ihlal eden konfigürasyonları küre üzerinde türettiğimiz kümeden atacağız. Verilen bir $1/r$ doluluğu için bunu sistematik hale getireceğiz. Torus sınır koşulları orbital uzayında (tek-parçacık durumları) bir boyutta olan zincir sınır koşulu şeklinde kendini gösterir. Yani orbital uzayında i numaralı orbital ile $i + N_\phi$ numaralı orbital eşleşmiştir, dolayısıyla bu orbitalleri peşpeşe orbital olarak görürüz.

Örnek: $\nu = \frac{1}{3}$ kuazi-deşik uyarılması için torus sınır koşullarını ihlal eden kürede uygun-bölüşüm olarak alınan dizilimler

100 (1,3) uygun-bölüşüm 001 | 1

100 (1,3) uygun-bölüşüm 0010 | 10

0100 (1,3) uygun-bölüşüm 001 | 01

Yukarıdaki konfigürasyonlar küre üzerinde geçerli olsalar da, torus sınır koşulları etki ettiğinde geçerliliklerini yitirirler. Çünkü uçlardaki dizilimler torus sınır koşulu altında peşpeşe orbitaller haline gelmişlerdir. Dolayısıyla uçları bozuk durumda olan konfigürasyonlar atılmalıdırlar.

Yukarıda verilen örnekte bahsettiğimiz gibi, sınır koşullarını uygulamak dejenereliğin azalmasına sebep olur. Dolayısıyla geçerli dizilimleri bulmak için bütün sınır koşulu ihlal eden dizilimleri atmalıyız. Hesabımızı genelleştirmeden önce emsal oluşturması açısından $\nu = 1/3$ için sayma işlemini göstereceğiz [66]. Daha sonra bu sonucu $\nu = 1/r$'ye genelleyeceğiz. Sınır koşullarını ihlal eden dizilimler:

a) 100 (1,3) uygun-bölüşüm 001 İşgal edilmemiş $= N_\phi - N - 4$

İşgal edilmiş $= N - 2$

Küre üzerinde yaptığımız hesaplamalara benzer bir yol takip ettiğimizde uçların içinde

kalan (1,3) uygun-bölüşümlerin sayımı bizi aşağıdaki ifadeye vardırtır:

$$\left.\begin{aligned} &x_0 + x_1 + \cdots + x_{N-2} = N_\phi - N - 4 \\ &x_0 \geq 0 \\ &x_1 \geq 2 \\ &x_2 \geq 2 \\ &\vdots \\ &x_{N-3} \geq 2 \\ &x_{N-2} \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Kısıtları tam sayı denkleminin içine yerleştirebilmek için değişken dönüşümü yaparız; $a_0 = x_0, a_N = x_N, a_i = x_i - 2$. Bu sayede tam sayı denklemi aşağıdaki formu alır:

$$\left.\begin{aligned} &a_0 + a_1 + \cdots + a_{N-2} = N_\phi - 3N + 2 \\ &a_0 \geq 0 \\ &a_1 \geq 0 \\ &a_2 \geq 0 \\ &\vdots \\ &a_{N-3} \geq 0 \\ &a_{N-2} \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

ve çözümü $n = N_\phi - 3N + 2$ olmak üzere

$$\boxed{\text{Tam sayı çözümlerinin sayısı} = \binom{N+n-2}{n}}$$

ile verilir.

b) $100\underline{\quad\text{(1,3) uygun-bölüşüm}\quad}0010$ İşgal edilmemiş $= N_\phi - N - 5$

İşgal edilmiş $= N - 2$

a)'daki hesabın aynısı yapılır, sadece işgal edilmemiş orbital sayısı değişir:

$$\boxed{\text{Tam sayı çözümlerinin sayısı} = \binom{N+n-3}{n-1}}$$

Tersinim simetrisi sayesinde, $0100\underline{\quad\text{(1,3) uygun-bölüşüm}\quad}001$ yukarıda bulduğumuz kadar konfigürasyon üretir. Buradan hareketle $\nu = 1/3$ Laughlin kuazi-deşik

uyarılmalarının dejenereliği:

$$\mathscr{D}_{1/3} = \binom{N+n}{n} - \binom{N+n-2}{n} - 2\binom{N+n-3}{n-1} \tag{4.9}$$

ile verilir. Bu sayma prosedürü $\nu = 1/r$ için bütün sınır koşulları ihlal eden terimleri çıkarmamızı zorunlu kılar. Dolayısıyla önce en genel şekilde $\nu = 1/r$ için bütün sınır koşullarını ihmal eden dizilimleri üretebilmeliyiz. Verilen bir doluluk $\nu = 1/r$ için $r-1$ tane sınır koşulu teriminden katkı geldiğini farkederiz, ki bunlardan bazıları tersinim simetrisi yüzündendir. O halde sistematik şekilde saymayı yapabiliriz. Bu şekilde devam ederek ulaştığımız formül

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{1/r} &= \binom{N+n}{n} - \binom{N+n-2}{n} - 2\binom{N+n-3}{n-1} - \cdots - (r-1)\binom{N+n-r}{n-r+2} \\ &= (rN+n-r+1)\frac{(N+n-r)!}{N!(n-r+1)!}\end{aligned} \tag{4.10}$$

ile ifade edilir ve $n := N_\phi - Nr + r - 1$'dir. Son eşitlikte görülen kombinatorik formül, nümerik hesap sonuçlarını inceleyerek ulaştığımız tahmindir.

İspat: Tümevarım yöntemi ile formülümüzün doğru olduğunu kanıtlayacağız. Tümevarım yönteminde bir deneme durumunu doğru varsayıp, bu varsayımın genel durumu nasıl etkileyeceğini formülize eder ve bir sonraki ek adım içinde elde etmek istediğimiz ifadeye ulaşıp ulaşmayacağımızı kontrol ederiz. Farz edelim $r = k$ doğru olsun,

$$\begin{aligned}\binom{N+n}{n} - \binom{N+n-2}{n} - \cdots - (k-1)\binom{N+n-k}{n-k+2} &= (kN+n-k+1) \\ &\quad \times \frac{(N+n-k)!}{N!(n-k+1)!}\end{aligned}$$

Eğer bu $r = k+1$ için de doğruysa,

$$\begin{aligned}\binom{N+n}{n} - \binom{N+n-2}{n} - \cdots - (k-1)\binom{N+n-k}{n-k+2} - k\binom{N+n-k-1}{n-k+1} \\ = \frac{(N+n-k-1)!}{N!(n-k)!}(kN+N+n-k)\end{aligned}$$

ifadesinin de doğru olduğunu göstermeliyiz. Denklemin eşitliğin sol tarafındaki kısmını açarsak,

$$
\begin{aligned}
(kN+n-k+1)\frac{(N+n-k)!}{N!(n-k+1)!} - k\frac{(N+n-k-1)!}{(n-k+1)!(N-2)!} = \\
(kN+n-k+1)\frac{(N+n-k)(N+n-k-1)!}{N(N-1)(N-2)!(n-k+1)!} - k\frac{(N+n-k-1)!}{(n-k+1)!(N-2)!} = \\
\frac{(N+n-k-1)!}{(n-k+1)!(N-2)!}\left[\frac{(kN+n-k+1)(N+n-k)}{N(N-1)} - k\right] = \\
\frac{N(N-1)}{N(N-1)}\frac{(N+n-k-1)!}{(n-k+1)!(N-2)!}\left[\frac{(kN+n-k+1)(N+n-k)}{N(N-1)} - k\right] = \\
\frac{(N+n-k-1)!}{N!(n-k)!}\left[\frac{(kN+n-k+1)(N+n-k) - kN(N-1)}{n-k+1}\right] = \\
\frac{(N+n-k-1)!}{N!(n-k)!}\left[\frac{N-k+n+Nn-2kn-Nk^2+k^2+n^2+Nkn}{n-k+1}\right] = \\
\frac{(N+n-k-1)!}{N!(n-k)!}\left[\frac{\cancel{(n-k+1)}(N-k+n+kN)}{\cancel{(n-k+1)}}\right] = \\
(kN+N+n-k)\frac{(N+n-k-1)!}{N!(n-k)!}
\end{aligned}
$$

■

ifadesini elde ederiz. O halde verilen bir doluluk oranı $\nu = 1/r$ için kuazi-deşik uyarılmalarının sayısını denklem 4.10 ile bulabiliriz. Ayrıca ifadeyi sadece sistemin fiziksel parametrelerine dayalı forma da sokabiliriz. Daha önceden tanımladığımız $n = N_\phi - Nr + r - 1$ değerini yerine koyarsak,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_{1/r} &= (rN+n-r+1)\frac{(N+n-r)!}{N!(n-r+1)!} \\
&= N_\phi \frac{(N+N_\phi-Nr-1)!}{N!(N_\phi-Nr)!} \\
&\boxed{\mathscr{D}(N,N_d,N_\phi) = \frac{(N_d+N-1)!}{N_d!(N-1)!}\frac{N_\phi}{N}}
\end{aligned}
$$

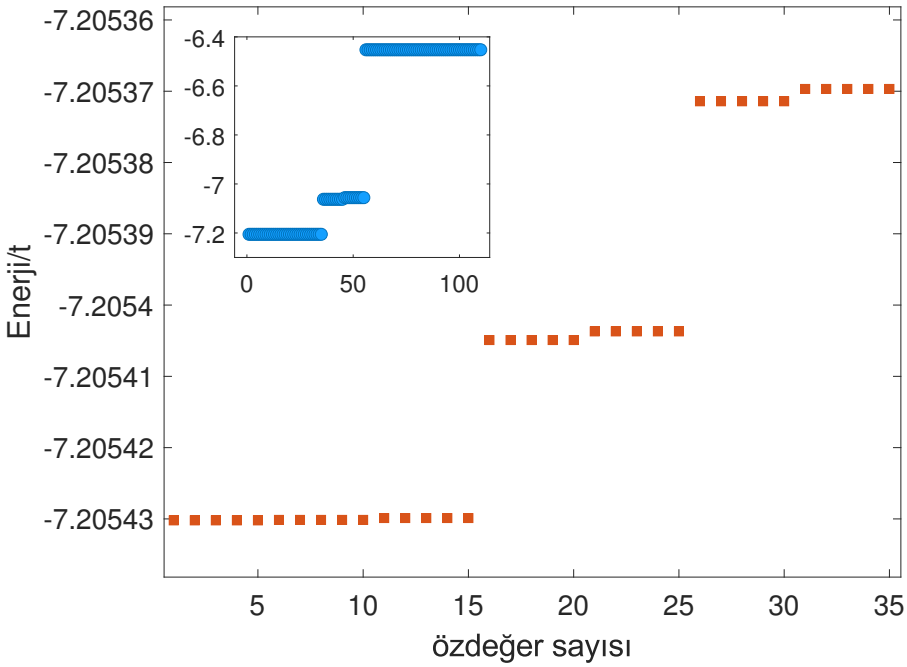
elde ederiz; burada $N_\phi = Nr + N_d$ olup N_d sistemdeki delokalize olmuş kuazi-deşik sayısıdır.

4.3 Sert Bozon Durumu

Bu bölümde sert bozon koşulu (bir örgü noktasında en fazla bir bozon bulunabilmesi koşulu, etkileşimlerin şiddetinin $U \to \infty$ olduğu çok-parçacık durumu) altında tam di-

yagonalizasyon metodunu kullanarak Harper-Hofstadter modeli ile Kesirli Chern yalıtkanı durumlarının enerji spektrumunu, dejenereliklerini ve Laughlin kuazi-deşiklerinin çok-parçacık Chern sayısı ile kategorize edilmesini göstereceğiz. Çakılı olmayan manyetik akı sayıları eşit olduğu sürece, çakılı olan kuazi-deşik durumlarının dejenereliği ile çakılı olmayanların sayısının eşit olduğunu göstereceğiz.

Tam diyagonalizasyon ile elde ettiğimiz temel enerji durumlarını barındıran kuazi-deşik dejenere manifoldunun kendi içinde belirli durum gruplanmaları ve ayrılmalar gözlemledik. Yüksek enerjili ve topolojik açıdan manalı olmayan durumlar ile kuazi-deşik manifoldu arasındaki ayrılmadan ziyade bu iç ayrılmaları şekil-4.4 üzerinde görebiliriz. Göreceli olarak şekil-4.4'e bakarak ayrılma noktalarında enerji farklılıkları-



Şekil 4.4: $L_x = 10, L_y = 20$ örgü üzerinde, $N = 2$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/20$ olan sistemin enerji spektrumu. Özdeğerler küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. Gömülü figürde ise kuazi-deşik manifoldunun tümünün üst enerji seviyelerden ayrılması verilmiştir.

nın az olmasını tam anlamıyla bir bantlaşma olarak düşünemesek bile 4.2 bölümünde elde ettiğimiz dejenere durum sayısı formülünü kullanarak, spektrumda farklı Laughlin kuazi-deşik durumlarına tekabül eden gruplanma noktalarında ayrılmalar olduğunu görüyoruz. Bunu daha iyi anlamak için 3.2 kısmında kullandığımız çok-parçacık Chern sayısı [32] hesabı yapacağız. Buradaki amaç bu ufak enerjli farklı ayrılmalar ile ortaya

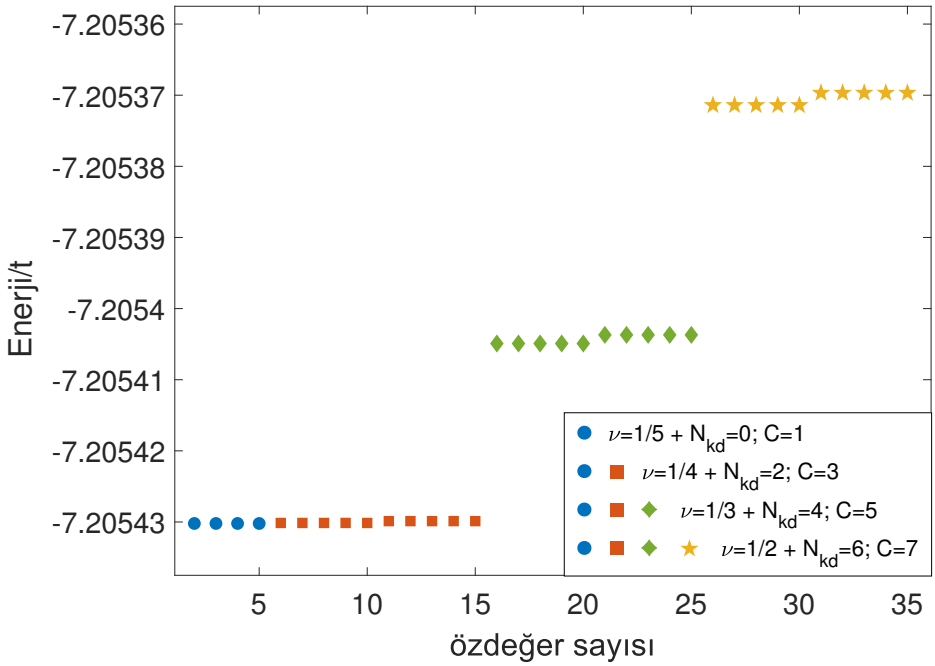
çıkan belli durumların oluşturduğu grupları birbirinden topolojik düzen özelliklerine bakarak ayırmaya çalışmak. Nümerik olarak kullandığımız prosedür Hatsugai [54, 55] tarafından geliştirilmiştir ve çok-parçacık durumlarının Chern sayısını gerçek uzaydaki özvektörlerini kullanarak bulmamıza olanak sağlar; nümerik protokol [ek-C]'de bulunabilir. Şekil-4.5'te gruplanmaları oluşturan durumların Chern sayısı kullanılarak ayırt edilebileceğini görüyoruz. Burada ana doluluk oranı $N/N_\phi = 1/5$ olsa bile farklı serbest kuazi-deşik uyarılmaları ile aynı doluluk oranı temsil edilebilir. Örneğin kuazi-deşik uyarımı olmayan $\nu = \frac{1}{5}$ durumu $\frac{2}{10+0}$ ile, 2 serbest akılı $\nu = \frac{1}{4}$ kuazi-deşik uyarılması $\frac{2}{8+2}$ ile, 4 serbest akılı $\nu = \frac{1}{3}$ kuazi-deşik uyarılması $\frac{2}{6+4}$ ile, 6 serbest akılı $\nu = \frac{1}{2}$ kuazi-deşik uyarılması $\frac{2}{4+6}$ ile temsil edilebilir. Bütün ana kuazi-deşik manifoldu bütün bu katkılardan gelen toplam dejenere durumlarının tümü olarak düşünülebilir. Verilen bir ana doluluk oranının dejenereliği, o doluluk oranının barındırabileceği doluluk oranı en büyük kuazi-deşik uyarılmalarının dejenereliği ile verilir. Özellikle bütün gruplandırmaların içinde durum başına düşen Chern sayısı $1/5$ olarak verilir; bunun bir örneğini kuazi-deşik yokluğunda 3.2'de gösterdiğimiz Laughlin dejenere temel durum başına düşen Chern sayısı hesabında görmuştük; $\nu = 1/2$ için elde edilen 2 dejenere durum için Chern sayısı $C = 1$ ve durum başına Chern sayısı $1/2$ oluyordu. O sistemde durum başına Chern sayısını 2 dejenere durum tarafından iletkenliğe verilen katkı olarak yorumlamıştık.

Tablo-4.1'de $N = 2$ parçacık durumları için belirli sistem konfigürasyonları için Chern sayıları ve grup dejenerelikleri verilmiştir. Buradan da anlıyoruz ki 4.2 kısmında türettiğimiz formülün içindeki kombinatorik kısım aslında verilen gruplanmanın Chern sayısını veriyor. Bu şekilde verilen bir bandın çok-parçacık Chern sayısını da kapalı bir formda verebilmiş olduk.

Buna ek olarak türettiğimiz formülden yola çıkarak dejenerelik sayısını belirleyen temel parametrenin çakılı-olmayan delokalize akı sayısı olduğunu görebiliriz. Şekil-4.6'da gördüğümüz gibi sistemler birbirinden farklı olsa da toplam çakılı-olmayan delokalize akı sayısı eşittir. İkisinde de bu sayı 6; çünkü $N_\phi = 7$ konfigürasyonunda bir tanesini 4.1'de Hamiltonyene eklediğimiz ek safsızlık terimi ile örgü noktasında belirli bir noktaya çakıp lokalize ediyoruz. İki sistemde de kuazi-deşik manifoldunun dejenereliğinin aynı olduğunu $\mathcal{D} = 9$ gözlemliyoruz.

Tablo 4.1: $N = 2$ parçacıklı sert-bozon sistemi için çok-parçacık Chern sayısı hesabı sunulmuştur. N_d burada delokalize olan akı sayısını belirtir. Aynı ana doluluk oranına karşılık gelen farklı Laughlin kuazi-deşik uyarılmalarını oluşturan durumların Chern sayısı ve dejenerelikleri verilmşltir. $C/\mathscr{D}$ ile grubu oluşturan durum başına düşen Chern sayıları verilmiştir

ν	N_d	L_x	L_y	ϕ	Gruplanma	C	Dejenerelik	$C/\mathscr{D}$
$1/2$	1	5	12	$1/12$	$[1,5]$	2	5	$2/5$
$1/3$	0	6	12	$1/12$	$[1,3]$	1	3	$1/3$
$1/2$	2	6	12	$1/12$	$[1,9]$	3	9	$1/3$
$1/3$	1	7	12	$1/12$	$[1,7]$	2	7	$2/7$
$1/2$	3	7	12	$1/12$	$[1,14]$	4	14	$2/7$
$1/4$	0	8	12	$1/12$	$[1,4]$	1	4	$1/4$
$1/3$	2	8	12	$1/12$	$[1,12]$	3	12	$1/4$
$1/2$	4	8	12	$1/12$	$[1,20]$	5	20	$1/4$
$1/4$	1	9	12	$1/12$	$[1,9]$	2	9	$2/9$
$1/3$	3	9	12	$1/12$	$[1,18]$	4	18	$2/9$
$1/2$	5	9	12	$1/12$	$[1,27]$	6	27	$2/9$
$1/5$	0	10	15	$1/20$	$[1,5]$	1	5	$1/5$
$1/4$	2	10	15	$1/20$	$[1,15]$	3	15	$1/5$
$1/3$	4	10	15	$1/20$	$[1,25]$	5	25	$1/5$
$1/2$	6	10	15	$1/20$	$[1,35]$	7	35	$1/5$

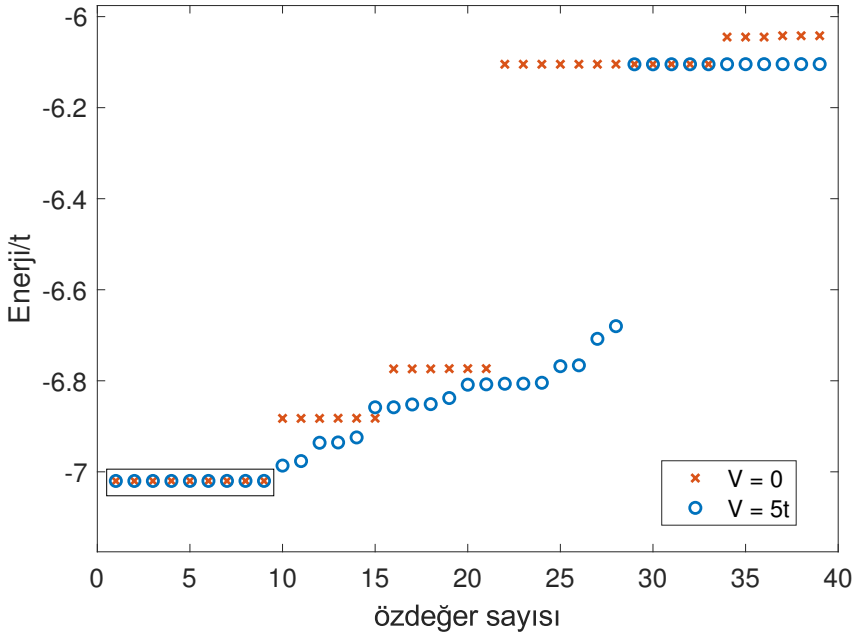


Şekil 4.5: $L_x = 10, L_y = 20$ örgü üzerinde, $N = 2$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/20$ olan sistemin enerji spektrumu. Özdeğerler küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. Sistemin doluluk oranı farklı tip Laughlin kuazi-deşik uyarılmaları olarak düşünülüp, bunlara denk gelen durumlar Chern sayısı C ile birbirinden ayrılır. Tüm durumlar için durum başına düşen Chern sayısı $1/5$'tir.

4.4 Sonlu Etkileşim Durumu

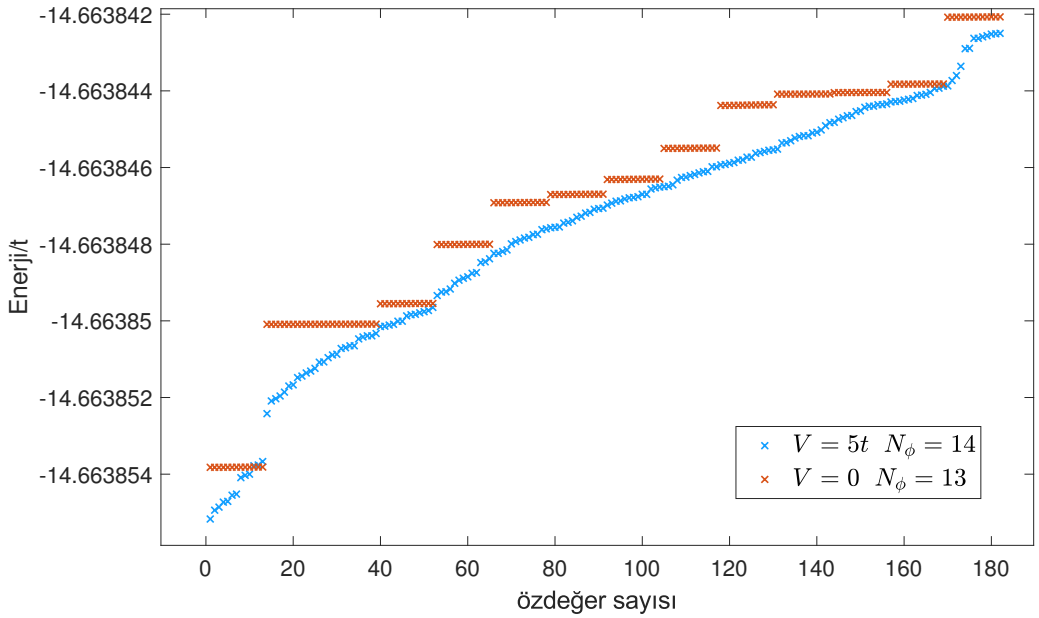
Bu bölümde Hofstadter-Harper modeli içinde sonlu etkileşimlere yer vereceğiz ve bu şekildeki bozonik parçacıkların Laughlin kuazi-deşik uyarılmalarını inceleyeceğiz. 4.1 kısmında etkileşimli sistemlerde yoğunluk profillerine ve kesirli yüklerin yoğunlukta yarattığı değişmelere bakmıştık. Örgü üzerinde bir noktaya kuazi-deşik çaktıktan sonra enerji spektrumunda olan değişmeleri incelemiştik. Bu kısımda ise türettiğimiz dejenerelik formülünün kuazi-deşiklerin çakılı olduğu sistemlerde ufak değişiklikler yaparak doğru sonuç elde ettiğimizi göreceğiz. Sistemdeki yük seyrelmelerine bakıp kuazi-deşiklerin sahip olduğu yükleri göstereceğiz. Bu yükler ile Chern sayıları arasındaki ilişkiyi göstereceğiz ve yüklerin sistemdeki toplam akı yerine çakılmamış serbest manyetik akı sayısına bağlı olduğunu göstereceğiz.

Öncelikle sonlu ve itici etkileşimli durumlarda enerji spektrumunun genel yapısının ve dolayısıyla dejenerelik sayısının çakılı olmayan serbest manyetik akı sayısına bağlı olduğunu gösterelim. Şekil-4.7'de gördüğümüz gibi manyetik akı sayısı, N_ϕ temelde farklı olsa bile çakılı olmayan manyetik akı sayıları eşit olduğu için dejenerelik



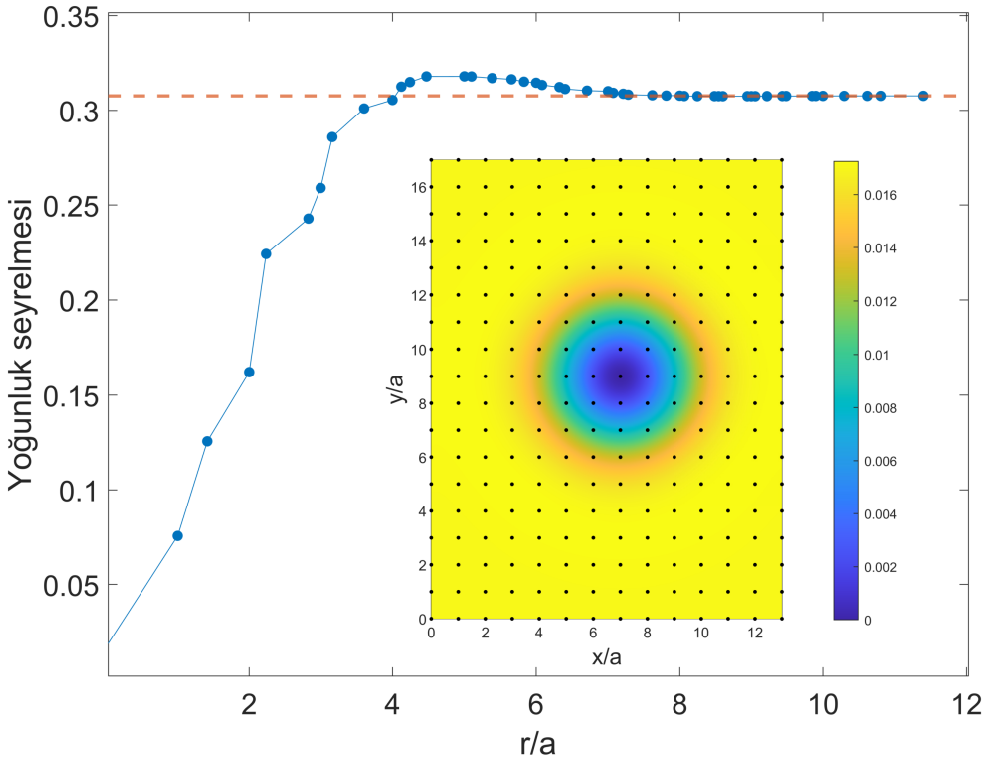
Şekil 4.6: $L_x = 6, L_y = 12$ örgü üzerinde, $N = 2$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/12$ sistemin $V = 0$ safsızlık potansiyeli olmadığındaki enerji spektrumu ve $L_x = 7, L_y = 12$ örgü üzerinde, $N = 2$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/12$ olan sistemin $V = 5t$ safsızlık potansiyeline maruz bırakılan durumdaki enerji spektrumu. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır.

aynı çıkar. Çakılı sistemde enerjiler yumuşak bir şekilde keskin bant dizilimlerinden sapmaya başlayıp daha sürekli bir yapı izlerler. Yani çakılı kuazi-deşik durumlarında dejenereliği, türettiğimiz formülde $N_\phi \to N_\phi - N_l$ (N_l çakılmış akı sayısıdır) değişken değişmesini yaparak bulabiliriz.



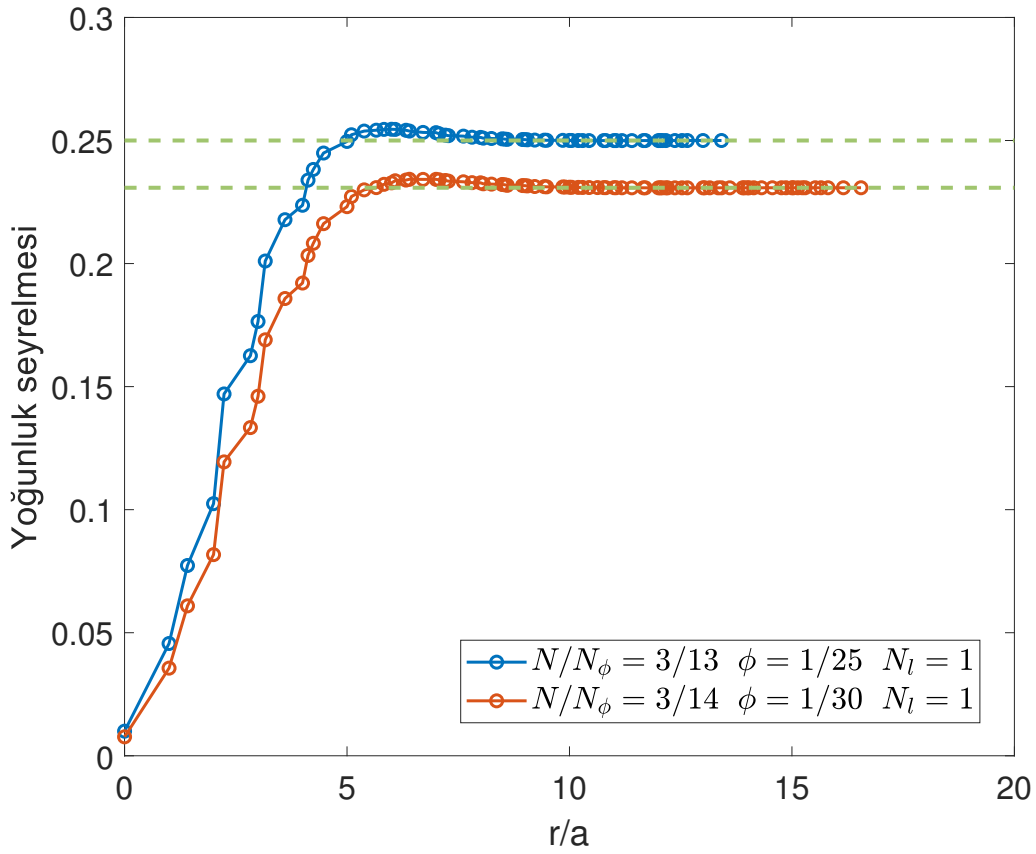
Şekil 4.7: $L_x = 13, L_y = 18$ örgü üzerinde, $N = 4$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/18$ olan sistemin $V = 0$ safsızlık potansiyeli olmadığındaki enerji spektrumu ve $L_x = 14, L_y = 18$ örgü üzerinde, $N = 4$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/18$ sistemin $V = 5t$ safsızlık potansiyeline maruz bırakılan durumdaki enerji spektrumu. Etkileşim şiddeti $U = t$ olarak alınmıştır. Torus üzerinde manyetik periyodik sınır koşulları uygulanmıştır. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. N_ϕ manyetik akı sayısını temsil eder.

4.1 bölümünde gördüğümüz gibi etkileşim terimi eklenmiş Harper-Hofstadter Hamiltonyenine n_i sayı operatörü olmak üzere safsızlık potansiyeli $\sum_i V n_i$ eklendiğinde, sisteme pompalanan ekstra manyetik akılar örgüde bu potansiyellerin kurulduğu noktalara çakılırlar. Şekil-4.8'de seyrelmeyi ve yükün yarıçap arttıkça nereye doğru yaklaştığını görebiliriz. Belirli bir yarıçapa vardıktan sonra doygunluğa ulaşılır ve yük seyrelmesi artık olmaz, dolayısıyla kuazi-deşik yükünü ortaya çıkarmış oluruz. Şekil-4.8'de yükün $4/13$'e doğru yakınsamasını (kesik çizgili doğru) gözlemleyebiliriz. Bu noktada, yük seyrelmesini hesapladığımız kuazi-deşiğin yükünün, ana (bütün manifold) kuazi-deşik manifoldunda durum başına düşen Chern sayısıyla aynı olduğunu ve yükün illaki Laughlin $\nu = 1/r$ kesri şeklinde olmadığını göstermiş olduk.

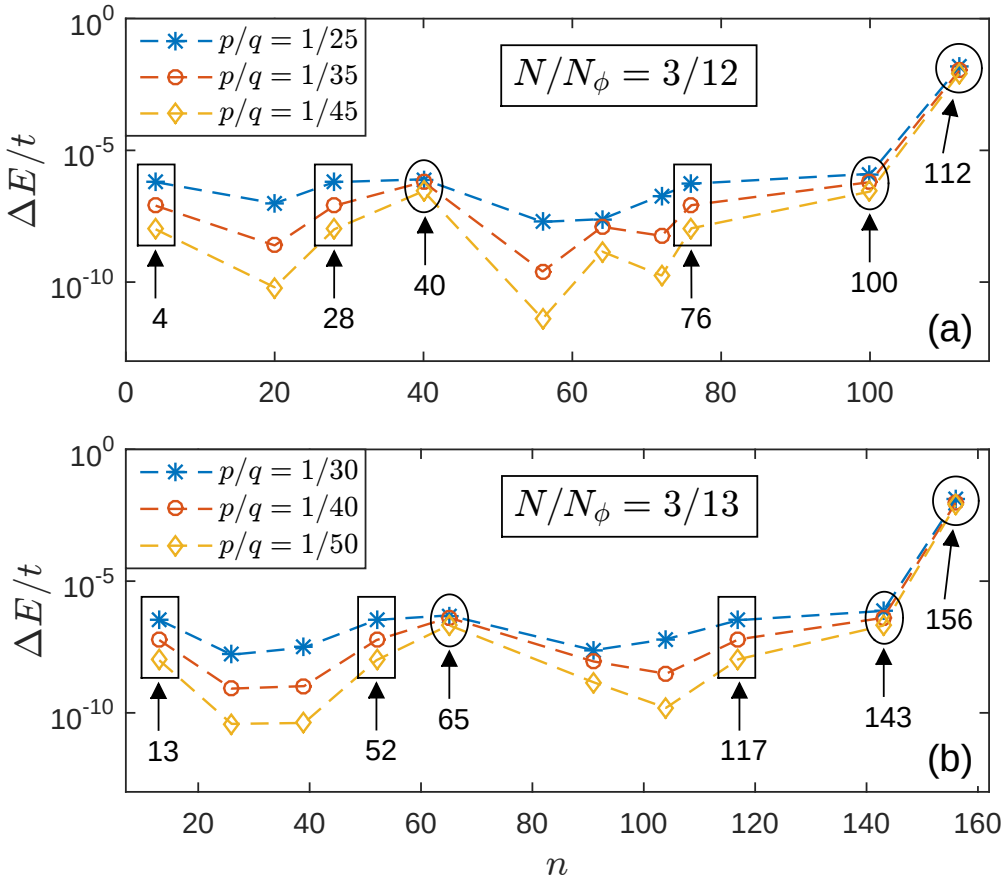


Şekil 4.8: $L_x = 14, L_y = 18$ örgü üzerinde, $N = 4$ parçacıklı, akı yoğunluğu $\phi = 1/18$ olan sistemin safsızlık potansiyeli varlığındaki yoğunluk profili ve yoğunluk seyrelmesi. Kinetik atlama büyüklüğü $t = 1$ alınmıştır. Etkileşim ve safsızlık şiddeti $U = t$ ve $V = 5t$ olarak alınmıştır. Çakılı durumlarda safsızlık potansiyeli merkez olacak şekilde konulmuştur. Seyrelme $4/13$ noktasında doygunluğa ulaşmıştır.

Nümerik hesaplarımızda gözlemlediğimiz bir diğer husus ise, sistemler büyüdükçe kuazi-deşik manifoldunun spektrumunda Lauhglin $\nu = 1/r$ kuazi-deşiklerine karşılık gelen durumlardaki ayrılmalara ek olarak başka noktalarda da ufak ayrılmalar olduğudur. Örneğin 4.6 ve 4.7 şekillerindeki spektrumlarda farklı Laughlin kuazi-deşik uyarılmalarına karşılık gelen durumlarda olan ayrılmalara ek olarak pek çok ekstra ayrılma görülür, fakat şekil-4.4'te sadece belirli Laughlin kuazi-deşiklerine karşılık gelecek durumları oluşturan gruplanma noktalarında bu ayrılmaları görürüz. Bu ekstra ayrılmaların model sistemin (daha önce de bahsettiğimiz gibi örneğin şekil-4.7'de model sistem $\nu = 4/13$ iken bunu Laughlin kuazi-deşikleri $\nu = \frac{1}{2}$;5 ekstra akı ve $\nu = \frac{1}{3}$;1 ekstra akı şeklinde düşünebiliriz) doluluk oranı olan $\nu = k/r$'de bulunan r'nin katları olacak kadar durum sayısı gruplanmalarında olduğunu fark ettik. Bu ayrılmaları açıklayabilmek için kombinatorik bir yapı oluşturduk; buna göre ekstra ayrılmala noktaları, manifoldda farklı Laughlin kuazi-deşiklerini oluşturmak için eklenen manyetik akıların belirli kısıtlamalara maruz kalacak şekilde N tane parçacığa kaç farklı şekilde paylaştırılabiliceği probleminin çözümü ile ortaya konulabilir. Burada yapının özü, bu problemin çözümünün tam o ayrılma noktalarını oluşturan gruplanmaların Chern sayısını vermesidir. 4.2 kısmında türettiğimiz formülün kombinatorik kısmının, durumların oluşturduğu gruplanmaların Chern sayısını verdiğini 4.3 bölümünde göstermiştik. Dolayısıyla daha önce kullandığımız, Chern sayısı ile farklı Laughlin kuazi-deşik uyarılma gruplandırmalarını ayırt etme yöntemi ile bir ortak paydada buluşup tutarlılık sağlamış olduk. Enerji farkları ufak olduğu için ve atlamaları daha iyi karakterize edebilmek için şekil-4.10'da spektrumda peşpeşe enerji farklarını alıp logaritmik ölçeğe gittik. Ayrıca sürekli-ortam limitinde [63], kuazi-deşik uyarılmalarının tam anlamıyla bir dejenere manifold oluşturduğunu, ekstra atlamaların hızlı bir şekilde yok olduğunu şekil-4.10'da görüyoruz. $\phi = p/q;\ \ q >> p$ limitine doğru iyice gidildikçe ekstra ayrılmaların kuazi-deşik ayrılamalarına göre daha hızlı yok olduğunu görüyoruz. Buna ek olarak daha önce yaptığımız hesaplamalardaki gibi şekil 4.9'daki gibi yoğunluk seyrelmesi bize yüklerin model sistemin kendisinin $N/(N_\phi - N_l)$ ile verildiğini gösteriyor. Örneğin şekil-4.9'da $S(N = 3, N_\phi = 13, N_l = 1)$ sistemi için lokalize olan kuazi-deşik yükü $1/4$' te doygunluğa ulaşmıştır ve $S(N = 3, N_\phi = 14, N_l = 1)$ sisteminde $3/13$'te doygunluğa ulaşmıştır.



Şekil 4.9: $N = 3$ parçacıklı ve sırasıyla $N/N_\phi = 3/13$ ve $N/N_\phi = 3/14$ manyetik akılı, $\phi = 1/25$ ve $\phi = 1/30$ akı yoğunluklu modellerin yük seyrelmesi profili verilmiştir. Kesik çizgiler bu iki durum için lokalize kuazi-deşiklerin ($N_l = 1$) yükünün doygunluğa ulaştığı $3/12$ ve $3/13$ değerlerine karşılık gelir.



Şekil 4.10: (a) $N/N_\phi = 3/12$ ve (b) $N/N_\phi = 3/13$ model sistemlerinin çeşitli $\phi = p/q$ akı yoğunlukları için peşpeşe durumların farklarının en büyük on tanesi logaritmik ölçekte verilmiştir. Manifold içinde kuazi-deşik uyarılmalarına ek olarak gelen atlamalar belirtilmiştir.

Kombinatorik yapıyı anlamak için şekil-4.10'da verdiğimiz $S(N = 3, N_\phi = 12)$ olan sistemi inceleyelim. Burada model sistemin doluluk faktörü $\nu = 1/4$'tür dolayısıyla ekstra ayrılmalar dördün katı olacak şekilde durum sayılarında gerçekleşmektedirler. Bu sistemi biz farklı Laughlin kuazi-deşik uyarılmaları olarak

$$\frac{N}{N_\phi} = \frac{3}{6+6} \rightarrow \nu = 1/2 + 6 \text{ kuazi-deşik uyarılması}$$

$$\frac{N}{N_\phi} = \frac{3}{9+3} \rightarrow \nu = 1/3 + 3 \text{ kuazi-deşik uyarılması}$$

şeklinde düşünebiliriz. Bütün en alt seviyeyi oluşturan manifoldun dejenereliğini daha önce de belirttiğimiz gibi en yoğun doluluk oranının yani $\nu = 1/2$'nin uyarılmaları şeklinde düşünerek buluyoruz. Ekstra ayrılmaları bu şekilde belirttiğimiz 6 ve 3 ekstra manyetik akıyı $N = 3$ parçacığa, bir parçacık maksimum en fazla n tane manyetik akı barındırır kısıtı ile kaç farklı şekilde dağıtabilir problemini çözerek açıklayalım. Bu

problemin çözümü olan sayıyı (N, N_d, n) ile ifade edelim:

$$(N = 3, N_d = 6, n = 6) = 28 \longrightarrow C(1, 112)$$
$$(N = 3, N_d = 6, n = 5) = 25 \longrightarrow C(1, 100)$$
$$(N = 3, N_d = 6, n = 4) = 14 \longrightarrow C(1, 76)$$
$$(N = 3, N_d = 3, n = 3) = 10 \longrightarrow C(1, 40)$$
$$(N = 3, N_d = 3, n = 2) = 7 \longrightarrow C(1, 28)$$
$$(N = 3, N_d = 0, n = 3) = 1 \longrightarrow C(1, 4)$$

Böylece, 4.2 kısmında Chern sayısının kombinatorik kısımla verilmesi ve gruplandırmaları oluşturulan durumlar üzerinden hesaplanan Chern sayısının ayrılmaları ayrıştırabilmesi prensiplerini kullanarak bu ekstra ayrılmaları açıklayabilen kombinatorik bir mekanizma ortaya koyabilmiş olduk.

5 SONUÇ

Bu tezde Harper-Hofstadter modeli kullanarak sert bozon ve sonlu etkileşimli bozonların Laughlin kuazi-deşik uyarılmalarını inceledik. Öncelikle elimizdeki sistemin torus sınır koşulları altında dejenereliğini bulmak için genelleştirilmiş Pauli prensibini kullanarak genel bir kapalı formül türettik. Bu formül birinci Landau seviyesi fiziğinin ($\nu = k/r \mid k < r$) geçerli olduğu konfigürasyonların temel durum dejenereliklerini belirli fiziksel parametreler ile ifade eder. Tamlık açısından formülümüzü tekrar ifade edersek, dejenerelik

$$\boxed{\mathcal{D}(N, N_d, N_\phi) = \frac{(N_d + N - 1)!}{N_d!(N-1)!}\frac{N_\phi}{N}} \tag{5.1}$$

şeklinde verilir. Burada N sistemdeki parçacık sayısını, N_d delokalize kuazi-deşik (model sisteme göre fazladan eklenmiş çakılmamış manyetik akı) sayısını, N_ϕ sistemdeki toplam manyetik akı sayısını ifade etmektedir. İlerleyen nümerik hesaplarımızda spektrumdan ve formülümüz tarafından da motive edilen Laughlin kuazi-deşik belirsizliğinin farkına vardık. Model sistemin ana doluluk oranı ν ile uyumlu olacak şekilde sistemimizi aslında farklı Laughlin kuazi-deşik uyarılmaları olarak yorumlayabileceğimizi gördük. Örneğin, $N = 4$ parçacıklı, $N_\phi = 16$ manyetik akılı bir model sistemin doluluk oranı $\nu = 1/4$'tür. Fakat biz bunu $\frac{4}{8+8}$ olarak düşünürsek bu sistemi $\nu = 1/2$ Laughlin durumunun 8 ekstra akılı kuazi-deşik uyarılması olarak ele alabiliriz. Ya da $\frac{4}{12+4}$ olarak düşünürsek bu sistemi $\nu = 1/3$ Laughlin durumunun 4 ekstra akılı kuazi-deşik uyarılması olarak ele alabiliriz. Bu karşılaşılan belirsizliği ve durumların her biri farklı Laughlin kuazi-deşik durumunu temsil edecek şekilde gruplanmalarını ayırt edebilmek için çok-parçacık Chern sayısı hesabı yaptık. Bu hesapla Laughlin kuazi-deşiklerinin farklı Chern sayıları aldığını gösterdik. Sistemin temel durum manifoldunun dejenereliğini en büyük doluluk oranlı konfigürasyonun ($\nu = 1/2$) kuazi-deşik uyarılması ile verildiğini gördük. Her bir gruplanma için durum başına Chern sayısının aynı kaldığını gösterdik. Bu sayede formülümüzdeki kombinatorik kısmın gruplanma-

ların Chern sayısını verdiğini göstermiş olduk. Nümerik hesaplarımızdan yola çıkarak çakılı akı durumlarında kuazi-deşik spektrumunun dejenereliğinin aynı sayıda çakılmamış akı barındıran sistemle aynı olduğunu gösterdik ve ana sayma formülünde ufak bir değişiklikle çakılı kuazi-deşik durumlarının sayısını da bulabilmiş olduk. Örneğin, $S(N = 5, N_d = 1, N_\phi = 15)$ sistemi ile $S(N = 5, N_d = 0, N_\phi = 14)$ sisteminin kuazi-deşik manifoldları eşit sayıda duruma sahiptir. Bu durumda 5.1 denkleminde N_l çakılı akı sayısı olmak üzere $N_\phi \to N_\phi - N_l$ şeklinde modifiye edilip hiç çakılı bir akı yokmuş gibi hareket edilince çakılı sistemin dejenereliği bulunur. Dolayısıyla aynı parçacık sayılı sistemlerin serbest akı sayısı eşit olduğu sürece dejenerelikler aynıdır. Daha sonra sistemdeki kuazi-deşik varlığı yüzünden meydana gelen yük seyrelmelerini inceledik. Seyrelme hesapları kesirli kuazi-deşik yükünün $\nu = N/(N_\phi - N_l)$ olduğunu gösterdi ki bu aynı zamanda bütün sistemin kuazi-deşik manifoldunun durum başına düşen Chern sayısına tekabül eder. Bu sayede elde edilen kuazi-deşik yükünün illaki bir Laughlin $\nu = 1/r$ kuazi-deşik uyarılmasıyla aynı formda olmadığını göstermiş olduk. Ek olarak, sistemin boyutu büyüdükçe kuazi-deşik manifoldunda meydana gelen ekstra atlamaların mekanizmasını kombinatorik bir yapı ile gösterdik.

KAYNAKLAR

[1] P. W. Anderson. More Is Different. *Science*, 177(4047):393–396, August 1972.

[2] L. D. Landau. On the theory of phase transitions. *Zh.Eksp.Teor.Fiz.*, 7:19–32, 1937.

[3] V. L. Ginzburg and L. D. Landau. On the theory of superconductivity. *Zh.Eksp.Teor.Fiz.*, 20:1064–1082, 1950.

[4] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard. Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit. *Physical Review Letters*, 48(22):1559–1562, May 1982.

[5] X. G. Wen and Q. Niu. Ground-state degeneracy of the fractional quantum Hall states in the presence of a random potential and on high-genus Riemann surfaces. *Physical Review B*, 41(13):9377–9396, May 1990.

[6] X. G. Wen. Topological orders in rigid states. *International Journal of Modern Physics B*, 04(02):239–271, February 1990.

[7] Y. S. Wu. General Theory for Quantum Statistics in Two Dimensions. *Physical Review Letters*, 52(24):2103–2106, June 1984.

[8] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger. Many-body physics with ultracold gases. *Reviews of Modern Physics*, 80(3):885–964, July 2008.

[9] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen(De), and U. Sen. Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond. *Advances in Physics*, 56(2):243–379, March 2007.

[10] J. M. Leinaas and J. Myrheim. On the theory of identical particles. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 37(1):1–23, January 1977.

[11] R. B. Laughlin. Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations. *Physical Review Letters*, 50(18):1395–1398, May 1983.

[12] D. Arovas, J. R. Schrieffer, and F. Wilczek. Fractional Statistics and the Quantum Hall Effect. *Physical Review Letters*, 53(7):722–723, August 1984.

[13] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma. Non-Abelian anyons and topological quantum computation. *Reviews of Modern Physics*, 80(3):1083–1159, September 2008.

[14] C. de C. Chamon, D. E. Freed, S. A. Kivelson, S. L. Sondhi, and X. G. Wen. Two point-contact interferometer for quantum Hall systems. *Physical Review B*, 55(4):2331–2343, January 1997.

[15] R. L. Willett. The quantum Hall effect at 5/2 filling factor. *Reports on Progress in Physics*, 76(7):076501, June 2013.

[16] P. Bonderson, K. Shtengel, and J. K. Slingerland. Interferometry of non-Abelian anyons. *Annals of Physics*, 323(11):2709–2755, November 2008.

[17] Z. Papić, R. S. K. Mong, A. Yazdani, and M. P. Zaletel. Imaging Anyons with Scanning Tunneling Microscopy. *Physical Review X*, 8(1):011037, March 2018.

[18] E. H. Hall. On a New Action of the Magnet on Electric Currents. *American Journal of Mathematics*, 2(3):287–292, 1879.

[19] P. Drude. Zur Elektronentheorie der Metalle. *Annalen der Physik*, 306(3):566–613, 1900.

[20] D. Tong. Lectures on the Quantum Hall Effect. *arXiv:1606.06687 [cond-mat, physics:hep-th]*, September 2016.

[21] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance. *Physical Review Letters*, 45(6):494–497, August 1980.

[22] B. Jeckelmann and B. Jeanneret. The quantum Hall effect as an electrical resistance standard. *Reports on Progress in Physics*, 64(12):1603–1655, November 2001.

[23] F. Hernandez-Marquez, M. E. Bierzychudek, G. R. Jones Jr, and R. E. Elmquist. Precision high-value resistance scaling with a two-terminal cryogenic current comparator. *Review of Scientific Instruments*, 85(4):44701–44701, 2014.

[24] H. Bachmair, E. O. Göbel, G. Hein, J. Melcher, B. Schumacher, J. Schurr, L. Schweitzer, and P. Warnecke. The von Klitzing resistance standard. *Physica E Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 20:14–23, December 2003.

[25] X. G. Wen. Colloquium: Zoo of quantum-topological phases of matter. *Reviews of Modern Physics*, 89(4):041004, December 2017.

[26] L. Landau. Diamagnetismus der Metalle. *Zeitschrift fur Physik*, 64:629–637, September 1930.

[27] Z. F. Ezawa. *Quantum Hall Effects: Field Theoretical Approach and Related Topics*. World Scientific Publishing Company, Hackensack, N.J. ; London, 2nd edition edition, January 2008.

[28] D. Yoshioka. *The Quantum Hall Effect*. Springer Series in Solid-State Sciences. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.

[29] S. M. Girvin and T. Jach. Formalism for the quantum Hall effect: Hilbert space of analytic functions. *Physical Review B*, 29(10):5617–5625, May 1984.

[30] M. Stone. *Quantum Hall effect*. World Scientific, Singapore; River Edge, NJ, 1992.

[31] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential. *Physical Review Letters*, 49(6):405–408, August 1982.

[32] Q. Niu, D. J. Thouless, and Y. S. Wu. Quantized Hall conductance as a topological invariant. *Physical Review B*, 31(6):3372–3377, March 1985.

[33] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 392(1802):45–57, March 1984.

[34] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 1959.

[35] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Holt, Rinehart and Winston, 1976.

[36] D. Langbein. The Tight-Binding and the Nearly-Free-Electron Approach to Lattice Electrons in External Magnetic Fields. *Physical Review*, 180(3):633–648, April 1969.

[37] D. R. Hofstadter. Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. *Physical Review B*, 14(6):2239–2249, September 1976.

[38] J. Hubbard and B. H. Flowers. Electron correlations in narrow energy bands. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 276(1365):238–257, November 1963.

[39] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. *Physical Review*, 115(3):485–491, August 1959.

[40] R. Peierls. Zur Theorie des Diamagnetismus von Leitungselektronen. *Zeitschrift für Physik*, 80(11):763–791, November 1933.

[41] B. A. Bernevig and T. L. Hughes. *Topological Insulators and Topological Superconductors*. Princeton University Press, Princeton, April 2013.

[42] M. Aidelsburger. *Artificial Gauge Fields with Ultracold Atoms in Optical Lattices*. Springer, March 2019.

[43] D. J. Thouless. Bandwidths for a quasiperiodic tight-binding model. *Physical Review B*, 28(8):4272–4276, October 1983.

[44] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbène. Quantum simulations with ultracold quantum gases. *Nature Physics*, 8(4):267–276, April 2012.

[45] M. Hafezi, A. S. Sørensen, E. Demler, and M. D. Lukin. Fractional quantum Hall effect in optical lattices. *Physical Review A*, 76(2):023613, August 2007.

[46] A. S. Sørensen, E. Demler, and M. D. Lukin. Fractional Quantum Hall States of Atoms in Optical Lattices. *Physical Review Letters*, 94(8):086803, March 2005.

[47] M. Z. Hasan and C. L. Kane. Colloquium: Topological insulators. *Reviews of Modern Physics*, 82(4):3045–3067, November 2010.

[48] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas, and P. Öhberg. Colloquium: Artificial gauge potentials for neutral atoms. *Reviews of Modern Physics*, 83(4):1523–1543, November 2011.

[49] W. Krauth. *Statistical Mechanics: Algorithms and Computations*. Oxford University Press, Oxford, pap/cdr edition edition, November 2006.

[50] C. Lanczos. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45(4):255, October 1950.

[51] N. Read and E. Rezayi. Quasiholes and fermionic zero modes of paired fractional quantum Hall states: the mechanism for nonabelian statistics. *Physical Review B*, 54(23):16864–16887, December 1996.

[52] F. D. M. Haldane. Many-Particle Translational Symmetries of Two-Dimensional Electrons at Rational Landau-Level Filling. *Physical Review Letters*, 55(20):2095–2098, November 1985.

[53] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York, NY, 0009-revised edition edition, June 1965.

[54] K. Kudo, T. Kariyado, and Y. Hatsugai. Many-Body Chern Numbers of = 1/3 and 1/2 States on Various Lattices. *Journal of the Physical Society of Japan*, 86(10):103701, September 2017.

[55] T. Fukui, Y. Hatsugai, and H. Suzuki. Chern Numbers in Discretized Brillouin Zone: Efficient Method of Computing (Spin) Hall Conductances. *Journal of the Physical Society of Japan*, 74(6):1674–1677, June 2005.

[56] A. Yu. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Annals of Physics*, 303(1):2–30, January 2003.

[57] I. Bloch. Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nature Physics*, 1(1):23–30, October 2005.

[58] M. Račiūnas, F. N. Ünal, E. Anisimovas, and A. Eckardt. Creating, probing, and manipulating fractionally charged excitations of fractional Chern insulators in optical lattices. *Physical Review A*, 98(6):063621, December 2018.

[59] A. Sterdyniak, N. Regnault, and G. Möller. Particle entanglement spectra for quantum Hall states on lattices. *Physical Review B*, 86(16):165314, October 2012.

[60] N. Regnault and B. A. Bernevig. Fractional Chern Insulator. *Physical Review X*, 1(2):021014, December 2011.

[61] B. A. Bernevig and F. D. M. Haldane. Model Fractional Quantum Hall States and Jack Polynomials. *Physical Review Letters*, 100(24):246802, June 2008.

[62] E. J. Bergholtz and A. Karlhede. Quantum Hall system in Tao-Thouless limit. *Physical Review B*, 77(15):155308, April 2008.

[63] Z. Liu, R. N. Bhatt, and N. Regnault. Characterization of quasiholes in fractional Chern insulators. *Physical Review B*, 91(4):045126, January 2015.

[64] R. O. Umucalılar. Real-space probe for lattice quasiholes. *Physical Review A*, 98(6):063629, December 2018.

[65] E. Macaluso, T. Comparin, R. O. Umucalılar, M. Gerster, S. Montangero, M. Rizzi, and I. Carusotto. Charge and statistics of lattice quasiholes from density measurements: A tree tensor network study. *Physical Review Research*, 2(1):013145, February 2020.

[66] B. A. Bernevig and N. Regnault. Emergent many-body translational symmetries of Abelian and non-Abelian fractionally filled topological insulators. *Physical Review B*, 85(7):075128, February 2012.

[67] F. D. M. Haldane. "Fractional statistics" in arbitrary dimensions: A generalization of the Pauli principle. *Physical Review Letters*, 67(8):937–940, August 1991.

A En Düşük Bant Yaklaştırması

Bu bölümde Hofstadter-Hubbard modeline giren etkileşimlerin en alt seviyedeki bant uzayına yansıtılarak nasıl ifade edileceğini göstereceğiz. Bu model Hofstadter-Hubbard Hamiltonyeni ile ikinci kuantizasyon formalizminde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle} \left(e^{i2\pi\phi_{ij}} c_i^\dagger c_j + \text{h.c.} \right) + \frac{U}{2} \sum_i n_i(n_i - 1). \tag{A.1}$$

Hamiltonyeni H_0 kinetik (serbest) ve H_I potansiyel (etkileşim) kısımları olarak ikiye ayıralım. Öyle ki

$$H_0 = -t \sum_{\langle ij \rangle} \left(e^{i2\pi\phi_{ij}} c_i^\dagger c_j + \text{h.c.} \right)$$

$$H_I = \frac{U}{2} \sum_i n_i(n_i - 1)$$

şeklinde tanımlansın. Etkileşim terimini ele almadan önce kinetik terimi momentum ($\mathbf{k}$) uzayında ifade edip bant operatörlerini tanımlayacağız. Kompleks atlama fazlarından ötürü kinetik terim momentum bazında aşikar bir şekilde diyagonal forma ulaşamayacaktır. Çünkü öteleme operatörlerinin ve kinetik terimin oluşturacağı maksimum komütasyon sağlayan operatör kümesi belirli şartları sağlamak zorundadır. Bu sebeple öteleme operatörlerinin komütasyon ilişkisinin sıfır olduğu bir üst örgü tanımlamasına ihtiyaç vardır. Bu durumda Brillouin bölgesinin belirli ekseninde (ayar potansiyelinin açık formuna bağlı) ufalmalar meydana gelecektir. Bu hususları dikkate alarak pozisyon-örgü uzayında olan $c_i^\dagger$ bosonik yaratma ve c_j bosonik yok etme operatörlerinin Fourier transformlarını

$$c_{\mathbf{k}\beta} = \sqrt{\frac{q}{L_x L_y}} \sum_{s=0}^{\frac{L_y}{q}-1} \sum_{i_x=0}^{L_x-1} c_{s\beta i_x} e^{-ik_y sq} e^{-ik_x i_x}, \tag{A.2}$$

şeklinde yazarız. Burada $c_{s\beta i_x} \equiv c_i$ ve y-koordinatı $i_y = sq + \beta$ ile verilir. $s = 0, \ldots, L_y/q - 1$ üst örgü olarak nitelendirdiğimiz içinde q nokta bulunduran durumun birim hücresini (manyetik birim hücre) temsil eder. $\beta = 0, \ldots, q-1$ ise manyetik

birim hücre içindeki noktaların kendilerini ifade eder. Bu şekilde üst örgü tanımlaması ile y yönünde bir hücre (manyetik birim hücre) öteleme yapmak etkisiz bir kompleks faz getirir. Bahsi geçen Brillouin bölgesi daralması bu şekilde gerçekleşir, $k_x \in [0, 2\pi)$ and $k_y \in [0, 2\pi/q)$. A.2 ifadesinde verilen ilişkinin tersini alarak ve periyodik sınır koşullarını zorunlu kılarak kinetik terimi

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}\alpha\beta} c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} \mathcal{H}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\beta} = \sum_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} c^\dagger_{\mathbf{k}0} & \cdots & c^\dagger_{\mathbf{k}q-1} \end{pmatrix} \mathcal{H} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}0} \\ \vdots \\ c_{\mathbf{k}q-1} \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

formuna getiririz. $\mathcal{H}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ terimine, H_0 Hamiltonyeninin çekirdeği adı verilir ve bütün bilgiyi barındırır. Dolayısıyla özdeğerleri ve özvektörleri problemin çözümünü sağlar. Bu durumda $\mathcal{H}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ matrisinin bileşenleri $\mathcal{H}_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) = -2t\cos(2\pi\alpha\phi + k_x)$, $\mathcal{H}_{\alpha(\alpha\pm1)}(\mathbf{k}) = -t$, $\mathcal{H}_{1q}(\mathbf{k}) = \mathcal{H}^*_{q1}(\mathbf{k}) = -t\exp(-ik_y q)$ şeklinde verilir, geriye kalan terimler sıfırdır. Bu matrisin spektrumu $\epsilon_n(\mathbf{k})$, akı yoğunluğunun fonksiyonu olarak çizildiğinde Hofstadter kelebeği oluşturulur. Bu tek-parçacık enerjilerine karşılık gelen özvektörler ise $g^{(n)}(\mathbf{k})$ şeklinde gösterilir, burada $n = 1, 2, \ldots, q$ bantların numarasıdır. O halde belirli bir üniter dönüşüm ile A.3 ifadesi diyagonal forma getirilebilir:

$$\begin{pmatrix} d_{\mathbf{k}n} \\ \vdots \\ d_{\mathbf{k}q} \end{pmatrix} = U^{-1}_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}0} \\ \vdots \\ c_{\mathbf{k}q-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d^\dagger_{\mathbf{k}n} & \cdots & d^\dagger_{\mathbf{k}q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^\dagger_{\mathbf{k}0} & \cdots & c^\dagger_{\mathbf{k}q-1} \end{pmatrix} U_{\mathbf{k}}$$

$$U_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} g^{(n)}_0(\mathbf{k}) & \cdots & g^{(q)}_0(\mathbf{k}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g^{(n)}_{q-1}(\mathbf{k}) & \cdots & g^{(q)}_{q-1}(\mathbf{k}) \end{pmatrix}$$

bu şekilde bir dönüşüm altında momentum operatörlerinden bant operatörlerine geçiş sağlanır:

$$d_{\mathbf{k}n} = \sum_\beta g^{(n)*}_\beta(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\beta}$$

. Burada $g^{(n)}_\beta(\mathbf{k})$, $g^{(n)}(\mathbf{k})$ vektörünün β numaralı bileşenidir. Uygulanan bu üniter dönüşüm altında etkileşim Hamiltonyeni diyagonal forma ulaşır:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}n} \epsilon_n(\mathbf{k}) d^\dagger_{\mathbf{k}n} d_{\mathbf{k}n}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} d^\dagger_{\mathbf{k}1} & \cdots & d^\dagger_{\mathbf{k}q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1(\mathbf{k}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon_2(\mathbf{k}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \epsilon_q(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{\mathbf{k}1} \\ \vdots \\ d_{\mathbf{k}q} \end{pmatrix}$$

Bant operatörlerini H_I içerisinde yerine koyarak etkileşim terimini bant bazında ifade edip toplam Hamiltonyeni,

$$H = \sum_{\mathbf{k}n} \epsilon_n(\mathbf{k}) d^\dagger_{\mathbf{k}n} d_{\mathbf{k}n} + \frac{Uq}{2L_xL_y} \sum_{\substack{\beta \mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{Q} \\ n_1 n_2 n_3 n_4}} d^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},n_1} d^\dagger_{\mathbf{k}'-\mathbf{Q},n_2} d_{\mathbf{k}'n_3} d_{\mathbf{k}n_4} \times g^{(n_1)*}_\beta(\mathbf{k}+\mathbf{Q}) g^{(n_2)*}_\beta(\mathbf{k}'-\mathbf{Q}) g^{(n_3)}_\beta(\mathbf{k}') g^{(n_4)}_\beta(\mathbf{k}), \quad \text{(A.4)}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu durumda bant operatörleri bantları oluşturan tek-parçacık momentum durumlarında parçacıklar yaratıp yok etmektedirler; fiziksel olarak Bloch dalgası durumlarına parçacıkların koyulduğu söylenebilir. Hesabın bu adımına kadar henüz hiç bir yaklaştırma yapılmamıştır ve bütün durum kesin bir hesabın ürünüdür. Problemimizde en düşük enerjili durumlarla ilgilendiğimiz için etkileşim terimini bir alt uzayda ifade etmemiz hesabı nümerik olarak kolaylaştırır. Bütün bantlar üzerinden toplam almak yerine, operatörleri sadece en alt seviye bant üzerine yansıtıp o bantta parçacık yaratıp yok etmesini sağlamalıyız. Etkileşimin gücü U'yu yeterince küçük alırsak yüksek enerjili bantlarda parçacık bulunma olasılığı azalır ve bütün etkileşim dinamiği en alt bant uzayında kısıtlanır. Bu durumda yaklaşıklığın özü, etkileşim Hamiltonyeninin matris elemanlarının hesabında farklı bantlardaki durumların katkılarının ihmal edilmesidir.

B En Düşük Landau Seviyesi Yaklaştırması

Bu yaklaşımda da [ek-A]'da yapılan hesapların benzerini yapacağız. Buradaki en ayırıcı fark operatörleri gerçek uzayda en alt Landau seviyelerine yansıtacak olmamızdır. Bu durum bize yaklaşımın geçerli olması için gereken fiziksel rejimin, sistem tarafından sağlanması gerektiğini söyler. Harper-Hofstadter Hamiltonyeninin etkileşim kısmının tek-parçacık problemini gerçek uzayda çözüp kinetik terimi diyagonal yapacak Landau seviyesi operatörlerini tanımlayıp en alt Landau seviyesine yansıtma işlemi yapacağız. Bu durum sürekli uzayda yapılan Landau seviyesi yaklaştırmasıyla aynı nitelikleri paylaşmaktadır.

Akı yoğunluğu, $\phi = p/q$ (p,q: karşılıklı asal), ve periyodik sınır koşulları dahil edilen örgü modeli q tane banda sahiptir ve spektrum daha önceden de bahsedildiği gibi Hofstadter kelebeğini verir. Dolayısıyla bant başına düşen tek-parçacık durum sayısı $(L_x L_y)/q$ ile verilir. Sürekli durum (örgünün aksine sürekli pozisyon uzayı) limitinde, yani $p << q$ düşük akı yoğunluğu limitinde, en düşük Landau seviyesi en düşük bant ve p tane bant arasında kalan durumlardan meydana gelmektedir. Bu sebepten ötürü örgü sistemindeki dejenerelik $(L_x L_y/q) \times p = N_\phi$ (tek-parçacık Landau dejenereliği) en düşük Landau seviyesini oluşturur. [ek-A]'da yaptığımız gibi burada da tek-parçacık problemini (3.1'deki H_0 Hamiltonyeninin tek-parçacık özvektörlerini bulma), çözüp gerçek uzayda Hamiltonyeni diyagonal forma getirirken bant operatörlerini ve en düşük Landau seviyesini oluşturan durumları

$$d_k^\dagger = \sum_i^{dim(H_0)} \psi_i^k(\theta) c_i^\dagger \qquad\qquad \{\psi^1(\theta), \ldots, \psi^{N_\phi}(\theta)\} \tag{B.1}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada tek-parçacık enerjilerine karşılık gelen özvektörler ise $\psi_i^k(\theta)\ k \in \{1, \cdots, N_\phi\}$ şeklinde gösterilir ve i indisi bileşeni belli etmek içindir. Özvektörlerin θ bağımlılığı genelleştirilmiş (torus) sınır koşullarından gelmektedir. Etkileşim terimini bu yeni bazda yazarak

$$H_I = \frac{U}{2} \sum_i c_i^\dagger c_i^\dagger c_i c_i = \frac{U}{2} \sum_{n=1} \sum_{i,j,k,l} d_i^\dagger d_j^\dagger d_k d_l \psi_i^{n*}(\theta) \psi_j^{n*}(\theta) \psi_k^n(\theta) \psi_l^n(\theta) \tag{B.2}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu durumda n indisi sadece en düşük Landau seviyesi kadar durumu taradığı için etkileşim Hamiltonyeni dolayısıyla en alt Landau seviyesine yansıtılmıştır. [ek-A]'da yaklaştırmayı yaparken şart koştuğumuz gibi, burada da etkileşim gücü hassas bir şekilde ayarlanıp yüksek enerjili durumlarda parçacık popülasyonu oluşturma kısıtlanmalıdır. Etkileşim gücü, sürekli uzay modellerindeki mantık düşünülürse Landau seviyeleri arasındaki enerji farkından daha küçük mertebede olmalıdır (çünkü $p << q$ düşük manyetik alan limitinde Hofstadter kelebeği Landau seviyelerine indirgenir ve efektif olarak sürekli uzay fiziği baskındır; örgü etkileri ihmal edilebilir).

C Çok-Parçacık Chern Sayısının Nümerik Hesaplanması

Bu bölümde çok-parçacık durumlarında güçlü ilintili modellerin topolojik fazlarını belirlemek için kullanılan Chern sayısı hesaplama metodu gösterilecektir.

Metodun arkasındaki temel mantık farklı periyodik sınır koşulu açılarını içeren bir örgü üzerinde Berry eğriliklerini hesaplayıp toplam almaktır. Bu nümerik yöntem [54] kullanılırken sayısal nicelikler kesikli formda ifade edilir. Dolayısıyla sınır koşulu açıları ve Berry eğriliği bu kesikli formda

$$\theta_i = \frac{2\pi}{N_\theta} n_i; \quad (n_i = 1, \ldots, N_\theta; i = x, y), \tag{C.1}$$

$$\mathcal{F}(\theta) = \log[U_x(\theta) U_y(\theta + \delta_x) U_x(\theta + \delta_y)^{-1} U_y(\theta)^{-1}] \tag{C.2}$$

şeklinde ifade edilir. N_θ örgüdeki sınır koşulu açısı sıklığını, $U_i(\theta)$ link değişkenlerini ve δ_i örgü içindeki noktalar arasındaki birim uzaklığı temsil edip tanımları şu şekildedir:

$$U_i(\theta) = \frac{\det[\Phi^\dagger(\theta)\Phi(\theta + \delta_i)]}{|\det[\Phi^\dagger(\theta)\Phi(\theta + \delta_i)]|}, \tag{C.3}$$

$$\delta_i = \frac{2\pi}{N_\theta} n_i; \quad (n_i = 1, \ldots, N_\theta; i = x, y). \tag{C.4}$$

Bu ifadede $\Phi(\theta)$ multiplet matrisi [55] olarak adlandırılır ve

$$\Phi(\theta) = (|G_1(\theta)\rangle, \ldots, |G_{\mathscr{D}}(\theta)\rangle) \tag{C.5}$$

şeklinde ifade edilir. Sistemin çözümlerini oluşturan dejenere durum özvektörleri $|G_i(\theta)\rangle$ $i \in \{1, \cdots, \mathscr{D}\}$ matrisin sütunlarını oluştururlar, bu durumlar Chern sayısını bulmak istediğimiz durumlardır. Bu ifadelerden (C.3) niceliği temel olarak, farklı sınır koşulları üzerinde hesaplanan özvektörlerin birbirleriyle ne kadar çakıştığının ölçüsünü barındırır, yani farklı periyodik sınır koşulu açıları ile yazılmış Hamiltonyenin özvektörlerinin iç çarpımının sonuçlarını oluşturur. Bu adımdan sonra çok-parçacık Chern sayısı bütün örgü üzerinden toplam alınarak

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\theta} \mathcal{F}(\theta) \tag{C.6}$$

ifadesiyle hesaplanır.