T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HELE-SHAW AKIŞI ve KOMPLEKS MONGE-AMPÈRE DENKLEMİ İLİŞKİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Işıl Rüveyda Biltekin

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Yüksek Lisans Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Sibel Şahin

İstanbul, Ocak 2023

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HELE-SHAW AKIŞI ve KOMPLEKS MONGE-AMPÈRE DENKLEMİ İLİŞKİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Işıl Rüveyda Biltekin

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Yüksek Lisans Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Sibel Şahin

İstanbul, Ocak 2023

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ücret karşılığı başka kişilere yazdırmadığımı (dikte etme dışında), uygulamalarımı yaptırmadığımı,
- bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

Işıl Rüveyda Biltekin

ÖNSÖZ

Öncelikle söze; eğitim hayatımın kuşkusuz en önemli parçası olan, çok sevgili hocama teşekkür ederek başlamak istiyorum. Lisans eğitimimden beri desteğini her zaman hissettiğim, hevesiyle heveslendiğim güzel hocam Sibel'e; emeğini, zamanını ve görüsünü benimle olabildiğine paylaştığı için sonsuzca teşekkür ediyorum.

Tezimizin jüri üyeleri olan sevgili Özgür Martin ve Nihat Gökhan Göğüş'e çalışmamızın bir parçası olmayı kabul ettikleri için çok teşekkür ederim.

Tez dönemimi maddi olarak daha rahat geçirmeme olanak sağlayan Türk Matematik Derneği'ne burs destekleri için; ayrıca, her ikisi de yaptığı öğretmenlikle dahi teşekkürü sonsuzca hak eden çok sevgili hocalarım Sibel Şahin ve Fatma Altunbulak Aksu'ya bu bursu almaya hak kazanmamın iki sebebi oldukları için çok teşekkür ederim.

Bu yola birlikte çıktığım ve desteğini her zaman hissettiğim arkadaşım Aslı'ya; tüm öğrenciler için kaynakları zorlamaya çalışan MSGSÜ'nün paylaşım gönüllü kütüphanecisi Serdar Kılıç'a bir teşekkürü borç bilirim.

Son olarak, benim için her zaman ellerinden geleni yapmaya çalıştıklarını bildiğim aileme ve özellikle; her zaman en içten sevgisiyle yanımda olan güzel Deniz'e çok ama çok teşekkür ederim.

Şubat, 2023 Işıl Rüveyda Biltekin

HELE-SHAW AKIŞI ve KOMPLEKS MONGE-AMPÈRE DENKLEMİ İLİŞKİSİ

Işıl Rüveyda Biltekin

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2023

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Sibel Şahin

ÖZET

Bu tezde; iki boyutlu Laplasyen büyümesi olarak da bilinen, sıkıştırılamaz bir akışkanın reel iki boyutlu bir akışı olan Hele-Shaw akışı ile kompleks Monge-Ampère denklemi arasındaki ilişki Julius Ross ve David Witt Nyström'ün 2014−15 yıllarındaki çalışmalarından yola çıkılarak incelenmiştir. Bu bağlantılar kullanılarak; başlangıç bölgesi tek nokta (enjeksiyon noktası) olan, değişken geçirgenliğe sahip bir ortamdaki Hele-Shaw akışının varlığına ve tekilliğine dair bir kanıt sunulmuştur. Dahası; başlangıç koşulu bir düzgün Jordan bölgesi olan değişken geçirgenlikli Hele-Shaw akışının potansiyel teorinin bir ters problemi, ters logaritmik potansiyel problemi, olduğu görülerek böyle bir Hele-Shaw akışının varlığı ve tekliği gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Hele-Shaw akışı, kompleks Monge-Ampère denklemi, Kähler manifold, kompleks moment, Schwarz fonksiyonu, ters potansiyel problemi.

The RELATION BETWEEN HELE-SHAW FLOW and COMPLEX MONGE-AMPÈRE EQUATION

Işıl Rüveyda Biltekin

Mimar Sinan Fine Arts University Institute of Science and Technology

Mathematics, Master of Science Thesis, 2023

Thesis Supervisor: Doç. Dr. Sibel Şahin

ABSTRACT

In this thesis, the relation between the Hele-Shaw flow which is a real two dimensional flow of an incompressible fluid, also known as two dimensional Laplacian growth, and complex Monge-Ampère equation is examined by following the path of the works of Julius Ross and David Witt Nyström. Using these connections a proof for existence and uniquness for the Hele-Shaw flow with varying permeability when starting from a single point (injection point) are presented. Additionally, it is shown that the Hele-Shaw flow with varying permeability is an inverse potential problem, inverse logarithmic potential problem, when starting from a smooth Jordan domain. Thus the existence and uniqueness for a such Hele-Shaw flow are observed.

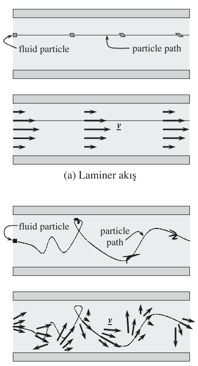
Key Words : Hele-Shaw flow, complex Monge-Ampère equation, Kähler manifold, complex moments, Schwarz function, inverse potential problem.

İçindekiler

Bölüm 1

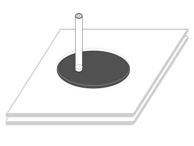
Giriş

Hele-Shaw hücresi; bir akışkanın akışının laminer ve türbülans durumları arasındaki geçişini araştıran Henry Selby Hele-Shaw $(1854 - 1941)$ tarafından, akış çizgilerini gözlemlemek ve böylece akışın formunu reel 2-boyuta resmetmek amacıyla kurulmuş bir düzenektir. Böyle bir hücre; aralarındaki mesafe çok küçük bir h ile sabitlenmiş ve birbirine paralel olan düz, hareketsiz iki plakadan oluşur. Gözlem için; biri diğerine göre viskoz olan, birbiri ile karışmayan iki Newtonyen *(Newton vizkozite kanununu sağlayan akışkan*[1]*)* akışkan düşünülür ve akışkanlardan birinin hücre içerindeki ortamı oluşturduğu diğerinin ise hücrenin üst duvarından enjekte edildiği/geri çekildiği varsayılır. Böylece; yüzey gerilimi, dış kuvvetler(enjeksiyon gibi) gibi mekanizmalar ile meydana gelen akış, bu iki akışkan arasındaki arayüzeyin ortaya çıkardığı bir serbest sınır problemini karakterize eder ve gelişen bu arayüzeyin şeklini bulma problemine de Hele-Shaw serbest sınır problemi, Hele-Shaw Problemi, denir.



(a) Laminer akış

(b) Türbülans akış



[1]Uygulanan kayma gerilimi ile şekil değiştirme hızı doğru orantılı olan akışkan. Örneğin; su ve hava newtonyen birer akışkan iken nişastalı su newtonyen olmayan bir akışkandır.

Bu problem; dış mekanizmalar, akışkanların konumlanması *(well-posed, ill posed)* gibi faktörlerin değiştirilmesi ile çeşitlenmiş ve bir buzun erimesi, bazı tümör çeşitlerinin büyümesinin modellenimi, yağın geri kazanımı gibi konulara hizmet eden genel olarak mühendislik-doğa bilimleri alanlarında bir uğraşı haline gelmiştir[GuA].

Lamb'in metodu ile; sıkıştırılamaz, viskozlu bir akışkanın hücreye enjeksiyon/ hücreden geri geçme işlemi yeterince yavaş[2] ve sabit oranla yapıldığında, meydana gelen akışın matematiksel olarak reel 2-boyuta nasıl idealize edildiğini biliyoruz(Bölüm 2.2.1'e bakılabilir). Problemin 2-boyuta idealizasyonunda iki önemli nokta vardır. Bunlardan ilki; Stokes-Leibenzon modelinin Lamb'in metoduna eklediği bir enjeksiyon noktası ve sıfır yüzey gerilimi ile kurulmuş akışın Laplace eşitliğine ve basıncın, yayılan akışkanın oluşturduğu bölge üzerinde, Laplace denklemi için bir Dirichlet probleminin sonucuna indirgeniyor olmasıdır. İkincil olarak; sıkıştırılamaz bir newtonyen akışkanın akışını kontrolleyen Navier-Stokes denklemleri, gözenekli bir ortamdaki viskoz bir akışkanın akışını tarifleyen Darcy Yasası'na indirgenir. Böylece geçirgenliği bir κ fonksiyonu ile verilmiş ortam için; p, akışkanın basıncı ve V, ortalama hız olmak üzere bir Hele-Shaw akışı

$$V = -\kappa \nabla p$$

eşitliği ile tariflenebilir[NyR14].

Çeşitli κ durumları için Hele-Shaw Problemi üzerine farklı çalışmalar yapılmıştır. Örneğin, κ'nın bir sabit olduğu durum için [GuA] ve referanslarına bakılabilir.

[2] Akış rejimini belirleyen Reynold sayısı Re $= \rho V h/\mu$'nün Re < 2100 eşitsizliğini sağlayabileceği kadar yavaş olarak düşünülebilir[Mor]. Yine de, H. S. Hele-Shaw tarafından $h < 0.02$ inç ile kurulmuş bir Hele-Shaw hücresindeki, herhangi hızla sürdürülen akışın laminer olduğunun gösterilmiş olduğunu ekleyelim[Vas]

Ayrıca, κ'nın reel analitik olduğu durumda; reel analitik bir başlangıç bölge koşulu ile verilen Hele-Shaw Problemi'nin de tek türlü olacak şekilde bir çözümünün var olduğu [HeSh]'de gösterilmiştir. Biz ise bu tezde; J. Ross ve D. W. Nyström'ün pozitif ve düzgün κ varsayımıyla ele aldıkları Hele-Shaw probleminin üzerine yaptıkları çalışmaların ([NyR14], [NyR], [NyR15]) bir okumasını yaparak, Hele-Shaw problemi ve HMAE üzerine bir araştırma ve derleme yapacağız. Tez boyunca izlediğimiz esas yol; düzgün bir $\kappa > 0$ geçirgenlikli Hele-Shaw probleminin Monge-Ampère denklemi, kompleks düzlemde Laplace'a denk olan denklem, ile verilmiş belirli bir Dirichlet problemiyle arasındaki bağlantıyı kurmak olacaktır.

Bu çalışma, giriş bölümü hariç üç bölümden oluşmaktadır:

Bölüm 2, iki kısım halinde bazı gerekli temel bilgiler ile derlenmiştir. Birinci kısım; düzgün ve pozitif geçirgenliğe sahip bir Hele-Shaw akışına karşılık gelecek olan Kähler bir manifold üzerindeki bir kompleks Monge-Ampère denklemi ile kurulmuş serbest sınır problemini(Donaldson'ın problemi) anlamak üzere yazılmıştır. İkinci kısım ise bir Hele-Shaw hücresindeki akışın kompleks düzlem üzerinde nasıl modellendiğini ve bir serbest sınır problemine dönüştüğünü gösteren, akışın en temel halidir.

Bölüm 3.1 ve 3.2'de holomorfik diskler yardımı ile iki sınır probleminin birbirine nasıl eşlenebileceğini inceledik ve devamındaki 3.3'te Monge-Ampère denkleminin çözümünün varlığı ile başlangıcı tek noktadan oluşan; bir pozitif, düzgün geçirgenlikli Hele-Shaw akışının kısa bir süre için de olsa var olduğunu gösterdik. 3.4'te ise düzgünlük koşulu altında olmadan genel olarak bir Hele-Shaw'un tanımını, zayıf çözüm, verdik ve zayıf çözüm ile Monge-Ampère denkleminin genel çözümleri arasında kurulan bir başka duallikten bahsettik. Öyle ki; bu duallik ile tek noktadan delinmiş bir bölge üzerindeki Monge-Ampère denkleminin regüler olmayan çözümleri, hatta iki kez türevlenemeyen çözümlerinin varlığı ispatlanabilir.

Kompleks değişken ve kornformal eşleme fikirlerinin probleme katılmasıyla birlikte Stanley Richardson $(1943-2008)$; sıfır yüzey gerilimli Hele-Shaw serbest sınır problemini, bir ters potansiyel problem olarak görmemizi sağlayacak olan moment kavramını ortaya çıkarmıştır[Ric] ve problemi yeniden parametrize etmiştir. Biz de Bölüm 4'te; Bölüm 3.1.1'de tanımını verdiğimiz kompleks momentler ile, bir κ-geçirgenlikli problemin bir ters potansiyel problem olarak görülebileceği üzerinde durduk.

Bölüm 2

Temel Bilgiler

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak bazı temel kavramları açıklayacağız. Tez, kompleks manifold üzerinde reel 2-boyutlu bir hidrodinamik problemi üzerine kurulu olduğundan; metin bağlamına uygun olacak şekilde bu bölüm iki kısım halinde verilmiştir. İlk kısım, kompakt bir Kähler manifoldun üzerindeki bir serbest sınır probleminde yer alan bazı elemanların; ikinci kısım ise fiziksel bir problem olan Hele-Shaw akışının kompleks düzlem üzerindeki modelinin anlaşılması için okunabilir.

2.1 Kompleks Manifoldlar Üzerinde Bazı Temel Bilgiler

Tanım 2.1.1. X, ayrılabilir bir Hausdorff uzay olsun. X'in herhangi bir U açık altkümesini $\mathbb{C}^n$'nin bir açık altkümesine eşleyen τ homeomorfizmasına bir harita ve $z_i : U \mapsto \mathbb{C}$ olmak üzere her $p \in M$ için haritanın $\tau_{|_p} = (z_1, \ldots, z_n)_{|_p} \in \mathbb{C}^n$ sağlayan bileşenlerine U üzerindeki lokal koordinatlar denir. $\bigcup \left(U_\alpha\right)_{\alpha \in I}$, X'nin bir açık örtüsü olmak üzere $\tau_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ haritalarının bir $\left(\tau_\alpha\right)_{\alpha \in I}$ ailesine de X'in bir atlası denir. Bir $\left(\tau_\alpha\right)_{\alpha \in I}$ atlası ile verilmiş X'e n-boyutlu bir kompleks manifold denir.

Kısaca, n-boyutlu kompleks bir manifoldu lokal olarak $\mathbb{C}^n$'ye modellenebilen bir uzay olarak görebiliriz ve topolojik olarak $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ olduğundan her n-boyutlu kompleks manifoldun bir $2n$-boyutlu reel manifold olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca, bir manifoldun temelinde yer alan topolojik uzay eğer kompaktlık, basit bağlantılılık ve benzeri gibi yapısal özelliklere sahipse oluşturduğu manifold yapısı da kompakt, basit bağlantılı, vb. manifold olarak isimlendirilir.

Tanım 2.1.2. X, $\big(\tau_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ atlası ile verilmiş kompleks bir manifold olmak üzere; her $\alpha, \beta \in I$ için $\tau_{\alpha\beta} \doteq \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} : \tau_\beta\big(U_\alpha \cap U_\beta\big) \to \tau_\alpha\big(U_\alpha \cap U_\beta\big)$ geçiş fonksiyonları holomorfik(kompleks diferansiyellenebilir) olan $\big(\tau_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ atlasına holomorfik bir atlas denir ve holomorfik bir $\big(\tau_\alpha\big)_{\alpha\in I}$ atlası ile verilmiş $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ boyutlu kompleks manifolda da kompleks diferansiyellenebilir(kompleks analitik) manifold denir.

Her kompleks diferansiyellenebilir manifoldu bir reel analitik manifold olarak görebiliriz ve kompleks diferansiyellenebilir bir manifoldu reel bir manifold üzerine de kurabiliriz; tabii, bu durumun sağlanması için reel manifoldun yalnızca çift boyutlu ve düzgün olması değil kompleksleştirilebilir olmasının da gerekli olduğunu söylememiz gerekir.[1] Diğer yandan, $\mathcal{C}^\infty$-diferansiyellenebilir reel manifoldlar $\mathbb{R}^n$'ye düzgün bir şekilde gömülebiliyor(*Whitney gömülme teoremi*) ve $\mathbb{R}^n$ ile lokal olarak difeomorfiklerken; kompleks analitik manifoldlar genel olarak $\mathbb{C}^n$'ye holomorfik bir şekilde gömülemez(Maksimum Prensibi'nden) ve lokal olarak biholomorfiklik sağlayamazlar(Liouville Teoremi'nden).

Birkaç kompleks manifold örneği verelim:

Örnek 1. *Her kompleks vektör uzayı ve $\mathbb{C}^n$'nin açık altkümeleri trivial birer kompleks manifold örneğidir.*

[1] Reel bir manifoldun kompleksleştirilebilmesi ile ilgili [Wel], [KoN] ve [Şah]'a bakılabilir.

Örnek 2. $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ *için bir normal alt grup olan* $\mathbb{C}^{\times} \doteq \big(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot\big)$*'ın*

$$\mathbb{C}^{*} \times \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$$\big(c, (z_0, \ldots, z_n)\big) \mapsto (cz_0, \ldots, cz_n)$$

etkisi ile $z \sim \tilde{z} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C}^{*} \ni z = \tilde{z}$ *olarak tanımlanan denklik bağıntısının* $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ *üzerinde oluşturduğu bölüm uzayına kompleks projektif uzay denir ve bu* $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \big/ _{\sim} \doteq \mathbb{CP}^{n}$ *bölüm uzayının herhangi bir noktası, en az biri sıfırdan farklı olmak üzere her* $c \in \mathbb{C}^{\times}$ *için* $[z_0 : \ldots : z_n] = [cz_0 : \ldots : cz_n]$ *sağlayan* $[z_0 : \ldots : z_n]$ *notasyonu ile gösterilir.*

$$q : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^{n}$$

$$(z_0, \ldots, z_n) \mapsto [z_0 : \ldots : z_n]$$

bölüm eşlemesi ile $\mathbb{CP}^{n}$ *üzerinde kurulacak bölüm topolojisine göre, her* $i \in \{0, \ldots, n\}$ *için* $U_i \doteq \{[z_0 : \ldots : z_n] | z_i \neq 0\}$ *birer açık küme olacağından* $\cup_{i=0}^{n} U_i$*,* $\mathbb{CP}^{n}$ *için bir açık örtü olur ve* $[z_0 : \ldots : z_n] \mapsto_{\tau_i} \left(\frac{z_0}{z_1}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots \frac{z_n}{z_i}\right)$ *olmak üzere* τ_i*,* U_i *için bir harita olur. Her* i, j *için* $z \mapsto_{\tau_{ij}} z_i^{-1} z$ *holomorfik olacağından* (τ_i)*,* $\mathbb{CP}^{n}$*'nin holomorfik bir atlası olur. Ayrıca* $\mathbb{C}^{n+1}$*'deki kompakt bir küme ile* $\mathbb{CP}^{n}$ *arasında örten bir sürekli fonksiyon var olduğundan[Mar]* $\mathbb{CP}^{n}$*, n-boyutlu kompakt bir kompleks analitik manifolddur.*

Özel olarak; $n = 1$ *için kompleks projektif doğru* $\mathbb{CP}^{1}$*'in herhangi noktası ya* $[0 : 1]$*'e ya da* $[1 : z]$*'ye eşit olacağından* $[z_0 : z_1] \mapsto z_1/z_0$ *eşlemesi ile* $\mathbb{CP}^{1}$*'i,* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *olarak görebiliriz.*

Örnek 3. $S^{2n}_{\mathbb{R}} \doteq \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} : |x| = 1\}$ *birim küre 2n-boyutlu düzgün bir reel manifolddur[Lee]. Topolojik olarak* S^{2n}*, n-boyutlu bir kompleks manifold olmasına rağmen her n-değeri için bir kompleks diferansiyellenebilir manifold değildir. Örneğin,* $n = 1$ *için kompleks analitikken* $n = 3$ *için kompleks analitik* *bir manifold değildir[Ati].*

2.1.1 Kompleks Analitik Manifold Üzerinde Diferansiyel Hesabı

Bir n-boyutlu kompleks analitik manifold lokal olarak $\mathbb{C}^n$ ile, geçiş fonksiyonları holomorfik olacak şekilde, homeomorfik olduğu için $\mathbb{C}^n$ üzerindeki diferansiyel hesabı kompleks bir manifold üzerinde de çalışabiliriz.

Tanım 2.1.3. X, $\big(\tau_\alpha; U_\alpha\big)$ atlası ile verilmiş bir n-boyutlu kompleks manifold ve f, bir $\Omega \subset X$ açık kümesi için $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olmak üzere; eğer her α için $f \circ {\tau_\alpha}^{-1} : \tau_\alpha(U_\alpha \cap \Omega) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathcal{C}^k$-sınıfından diferansiyellenebilir ise f'ye Ω üzerinde $\mathcal{C}^k$-sınıfından denir ve böyle fonksiyonların kümesi de $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{C})$ ile gösterilir. Benzer şekilde tanımlanan Ω üzerindeki holomorfiklerin kümesi de $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C})$ ile gösterilir. İki manifold arasındaki bir fonksiyon da benzer şekilde tanımlanır.

$z_k = x_k + iy_k \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C})$ olmak üzere $(z_0, \ldots, z_n)$, açık bir $\Omega \subset X$ kümesi üzerindeki kompleks analitik lokal koordinatlar olsun. Doğal olarak $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, Ω üzerinde reel analitik bir koordinattır. Herhangi bir $p \in \Omega$ için X'in reel tanjant uzayı $T_p^{\mathbb{R}}X$; $\big\{\partial/\partial x_k, \partial/\partial y_k\big\}$ bazına sahip reel bir vektör uzayı ve tanjant uzayının duali olan reel kotanjant uzayı $(T_p^{\mathbb{R}}X)^*$ da bir bazı $\{dx_k, dy_k\}$ olan reel bir vektör uzayıdır. Böylece bir $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$'nin diferansiyeli kısaca

$$df = \sum_{k=1}^{n} \big(\partial f/\partial x_k\big) dx_k + \big(\partial f/\partial y_k\big) dy_k \tag{2.1.1}$$

olarak yazılan bir $\mathbb{R}$-lineer $df_p : T_p^{\mathbb{R}}X \to \mathbb{R}$ eşlemesidir[Dem]. X; üzerinde hemen hemen kompleks bir yapı, $J^2 = -\mathrm{id}$ sağlayan bir $J \in \mathrm{End}(T_p^{\mathbb{R}}X)$, var olan bir manifold olduğundan tanjant ve kotanjant uzayları kompleksleştirilebilirdir[KoN, Wel]. $T_p^{\mathbb{R}}X$'in kompleksleştirilmişi $T_p^{\mathbb{R}}X \oplus iT_p^{\mathbb{R}}X \doteq T_p^{\mathbb{C}}X$'e kompleks tanjant uzayı denir ve $\partial/\partial z_k = 1/2\big(\partial/\partial x_k - i\partial/\partial y_k\big)$, $\partial/\partial\overline{z}_k = 1/2\big(\partial/\partial x_k + i\partial/\partial y_k\big)$ olmak üzere

$$T_p^{\mathbb{C}}X = \underbrace{\big\langle\{\partial/\partial z_k\}\big\rangle_{\mathbb{C}}}_{\doteq T_p^{1,0}X} \oplus \underbrace{\big\langle\{\partial/\partial\overline{z}_k\}\big\rangle_{\mathbb{C}}}_{\doteq T_p^{0,1}X}$$

olarak yazılabilen bir kompleks vektör uzaydır; $T^{1,0}X$ ve $T^{0,1}X$'e sırasıyla holomorfik ve antiholomorfik tanjant uzayı denir. Benzer şekilde kompleks kotanjant uzayı $(T_p^{\mathbb{C}}X)^*$ da $dz_k = dx_k + idy_k$, $d\bar{z}_k = dx_k - idy_k$ olmak üzere $(T_p^{\mathbb{C}}X)^* = \big\langle\{dz_k\}\big\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \big\langle\{d\bar{z}_k\}\big\rangle_{\mathbb{C}}$ olarak yazılır. Bir $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$'nin diferansiyeli için, $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ olduğundan $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ olarak görülebilir. Böylece f'nin diferansiyeli (2.1.1)'deki gibi hesaplanabilir ve yukarıdaki eşitliklerinden f'nin diferansiyeli z ile $\overline{z}$ cinsinden yazılabilir. Böylece, $\mathcal{C}^1$-sınıfından kompleks değerli bir fonksiyonun diferansiyeli kısaca

$$df = \sum_{k=1}^{n} \big(\partial f/\partial z_k\big)dz_k + \big(\partial f/\partial\overline{z}_k\big)d\overline{z}_k \tag{2.1.2}$$

olarak hesaplanabilen bir $\mathbb{R}$-lineer $df_p : T_p^{\mathbb{C}}X \to \mathbb{C}$ eşlemesidir.

2.1.2 Diferansiyel Formlar ve Akımlar

X, n-boyutlu kompleks analitik manifold olsun. $TX = \bigcup_{a\in X} T_a^{\mathbb{C}}X$ ve $TX^* = \bigcup_{a\in X}(T_a^{\mathbb{C}}X)^*$'ne sırasıyla kompleks tanjant ve kompleks kotanjant demeti denir.

Tanım 2.1.4. $p, q \in \mathbb{N}$ olsun. X üzerinde (p,q)-form; açık bir $\Omega \subset X$ kümesi üzerinde, lokal koordinatlar $(z_1, \ldots, z_n)$ olmak üzere her $z \in \Omega$ için

$$u(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q} u_{IJ}(z)dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

tipinde yazılabilen bir $u : X \to \wedge^{p,q}TX^*$ eşlemesidir. Özel olarak, her $\Omega \subset X$ açık kümesi için u'nun lokal katsayıları $u_{IJ} \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{C})$ ise u'ya $\mathcal{C}^k$-sınıfından bir form denir ve böyle formların kümesi de $\mathcal{C}^k(\Omega, \wedge^{p,q}TX^*)$ olarak gösterilir.

Diferansiyel formların üzerinde tanımlı bazı temel işlemler:

Dış çarpım. İki diferansiyel u, v formun dış çarpımı $(u \wedge v)_p = u_p \wedge v_p$ olarak tanımlanır yani lokal olarak; $\Omega \subset X$ açık kümesi üzerinde

$$u(z) = \sum_{|I|=p,|J|=q} u_{IJ}(z) dz_I \wedge d\overline{z}_J \in \wedge^{p,q}TX^*$$

ve

$$v(z) = \sum_{|\tilde{I}|=\tilde{p},|\tilde{J}|=\tilde{q}} v_{\tilde{I}\tilde{J}}(z) dz_{\tilde{I}} \wedge d\overline{z}_{\tilde{J}} \in \wedge^{\tilde{p},\tilde{q}}TX^*$$

olarak yazılabilen u ve v'nin dış çarpımı(ya da wedge çarpımı)

$$(u \wedge v)(z) \doteq u(z) \wedge v(z) = \sum u_{IJ}(z) v_{\tilde{I}\tilde{J}}(z) dz_I \wedge d\overline{z}_J \wedge dz_{\tilde{I}} \wedge d\overline{z}_{\tilde{J}}$$

şeklinde tanımlı bir $(p+\tilde{p}, q+\tilde{q})$-formdur.

Dış Türev. Lokal koordinatlar üzerinde $\sum u_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J \mapsto \sum du_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$ olarak tanımlanan $d : \mathcal{C}^\infty\big(\Omega, \wedge^{p,q}TX^*\big) \to \mathcal{C}^\infty\big(\Omega, \wedge^{p+1,q+1}TX^*\big)$ diferansiyel operatörüne dış türev denir ve (2.1.2)'den dış türevi

$$\partial : \mathcal{C}^\infty\big(\Omega, \wedge^{p,q}TX^*\big) \to \mathcal{C}^\infty\big(\Omega, \wedge^{p+1,q}TX^*\big)$$

$$u \mapsto \sum \big(\partial u_{I,J}/\partial z_k\big) dz_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

ve

$$\overline{\partial} : \mathcal{C}^\infty\big(\Omega, \wedge^{p,q}TX^*\big) \to \mathcal{C}^\infty\big(\Omega, \wedge^{p,q+1}TX^*\big)$$

$$u \mapsto \sum \big(\partial u_{I,J}/\partial \overline{z}_k\big) d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

olmak üzere $d = \partial + \overline{\partial}$ olarak ayırabiliriz. Dış türevin $d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^{p+q} \wedge dv$ Leibniz kuralını ve bir dış çarpımın doğal bir sonucu olarak $d^2 = 0$ eşitliğini sağlar. $d^2 = (\partial + \overline{\partial})^2 = \partial^2 + \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial + \overline{\partial}^2$ olacağından $\overline{\partial}^2 = \partial^2 = 0$, $\partial\overline{\partial} = 0$

eşitlikleri de sağlanır ve özel olarak, $du = 0$ sağlayan bir forma kapalı form; bazı v formları için $u = dv$ sağlayan bir forma da tam form denir. Manifoldlar üzerinde, kapalı formların denklik sınıflarını veren temel bir kohomoloji grubu vardır: Her $p, q \in \mathbb{Z}$ için

$$\dots \xrightarrow{d_{p-1,q-1}} K^{p,q} \xrightarrow{d_{p,q}} K^{p+1,q+1} \xrightarrow{d_{p+1,q+1}} \dots$$

$q < 0$ ya da $p < 0$ ise $K^{p,q} = 0$, $d_{p,q} = 0$; $p, q \geq 0$ ise $K^{p,q} = \mathcal{C}^\infty(\Omega, \wedge^{p,q} TM^*)$, $d_{p,q} = d$ olmak üzere $(d_{p,q})$ bir komplekstir (cochain kompleksi) ve her $p, q \in \mathbb{N}$ için

$$H^{p,q}_{dR}(X) \doteq \ker d_{p+1,q+1}/\mathrm{im} d_{p,q} = \frac{\{d\text{-kapalı}, (p,q)\text{-formlar}\}}{\{d\text{-tam}, (p,q)\text{-formlar}\}}$$

kohomolojisine X üzerinde (p, q)-formların de Rham kohomoloji grubu denir. X üzerindeki herhangi bir (p, q)-form u'nun denklik sınıfı $[u] \in H^{p,q}_{dR}(X)$'na u'nun kohomoloji sınıfı ve aynı sınıftaki herhangi iki elemana da birbirleriyle kohomolog denir.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{C}^\infty(\Omega, \wedge^{p+1,q} TX^*) & \\
\mathcal{C}^\infty(\Omega, \wedge^{p,0} TX^*) \arrow[r, "\overline{\partial}_{p,0}"] & \dots \arrow[r, "\overline{\partial}_{p,q-2}"] & \mathcal{C}^\infty(\Omega, \wedge^{p,q-1} TX^*) \arrow[r, "\overline{\partial}_{p,q-1}"] \arrow[ur, "\partial\overline{\partial}_{p+1,q}"] & \mathcal{C}^\infty(\Omega, \wedge^{p,q} TX^*) \arrow[r, "\overline{\partial}_{p,q}"] \arrow[u, "\partial_{p+1,q}"'] & \dots
\end{tikzcd}$$

$\partial\bar{\partial}_{p,q} = \partial_{p,q} \circ \bar{\partial}_{p-1,q-1}$ olmak üzere $(\bar{\partial}_{p,k})_k$ ve $(\partial\bar{\partial}_{p+k,q+k})_k$ kompleks zinciri de bir $\bullet$-kohomoloji grubu verir ve kohomolojiler de X üzerindeki $\bullet$-kapalı formların denklik sınıflarını tanımlar. Özel olarak, $k = 0$ için $\mathrm{im}\overline{\partial}_{p,k-1} = \{0\}$ kabulü ile her $k \in \{0, \dots, n\}$ için

$$H^{p,k}_{\overline{\partial}}(X) \doteq \frac{\ker \overline{\partial}_{p,k}}{\mathrm{im}\overline{\partial}_{p,k-1}}$$

bölüm uzayına X'in $\overline{\partial}$-kohomoloji grubu veya Dolbeault kohomoloji grubu denir ve $H^{p,k}_{\overline{\partial}}(X)$'nun elemanlarını X üzerindeki holomorfik (p, k)-formların, $\bar{\partial} = 0$, denklik sınıfları olarak görebiliriz.

Geri görüntü (*pull-back*). $F : X_1 \to X_2$ iki kompleks manifold arasında bir biholomorfik eşleme, yani X_1'in herhangi atlası τ ve X_2'nin herhangi atlası ϕ için $\phi \circ F \circ \tau^{-1}$, $\mathbb{C}^{n_1}$'in bir altkümesinden $\mathbb{C}^{n_2}$'nin bir altkümesine biholomorfik bir fonksiyon, olsun. X_2 üzerindeki bir (p,q)-form $u(z) = \sum u_{I,J}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J$'nun geri görüntüsü; $z = F(\tilde{z})$ olmak üzere

$$F^{\star}u(\tilde{z}) = \sum u_{I,J}\big(F(\tilde{z})\big) dF_{i_1} \wedge \cdots \wedge dF_{i_p} \wedge d\overline{F}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{F}_{j_q}$$

olacak şekilde X_1'de yine bir (p,q)-formdur[Dem] ve her geri görüntü işlemi altında kapalılık, tamlık özellikleri korunur.

Pozitif diferansiyel form. Bir (p,p)-from u için eğer u; $v_1, \ldots, v_{n-p}$'ler birer $(1,0)$-form olmak üzere $v = iv_1 \wedge \bar{v}_1 \wedge \cdots \wedge iv_{n-p} \wedge \bar{v}_{n-p}$ biçimindeki her $(n-p, n-p)$-form v için

$$u \wedge v = f\beta_n; \quad f \geq 0$$

sağlıyorsa u'ya bir pozitif form denir. Burada β_n; X'in kanonik bir (n,n)-formudur, yani lokal olarak $(z_0, \ldots, z_n)$ koordinatları ile $\beta_n = \mathrm{i}/2 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{i}/2 dz_n \wedge d\bar{z}_n$ olarak verilen formdur[Dem]. Bir (p,p)-formun pozitif olması; X'in p-boyutlu herhangi S altmanifoldu için $u_{|S}$'nun S üzerinde pozitif bir hacim formu(*volume form*), sıfırlanmayan en üst dereceden form, olması ile denktir ve her pozitif u formu reeldir, $u = \bar{u}$, [Dem].

Örnek 4. *(u_{ij}) bir Hermitsel pozitif matris olmak üzere $u = i/2 \sum u_{ij} dz_i \wedge d\overline{z}_j$, pozitif bir $(1,1)$-formdur.*

Örnek 5. *u pozitif bir form ise kompleks lineer işlemler altında u'nun geri görüntüsü de pozitif bir formdur([Dem]; Bölüm 3, Önerme 1.12).*

Tanım 2.1.5. Bir açık $\Omega \subset X$ kümesi için Ω üzerindeki tüm (p,q)-test formların, kompakt desteğe sahip düzgün (p,q)-formların, kümesi $\mathcal{D}_{(p,q)}(\Omega)$ olsun. Schwarz Topolojisi[[Dem]; Tanım 2.2] ile verilmiş $\mathcal{D}_{(p,q)}(\Omega)$ için herhangi bir $T : \mathcal{D}_{(p,q)}(\Omega) \to \mathbb{C}$ sürekli lineer fonksiyoneline bir $(n-p, n-q)$-akım denir ve bir u test formu için T'nin u üzerine etkisi $\langle T, u\rangle$; tüm $(n-p, n-q)$-akımların ailesi de $\mathcal{D}'_{(p,q)}(\Omega)$ ile gösterilir [Koł91].

Örnek 6. *u, M üzerinde katsayıları L^1_{loc}'den olan bir (p,q)-form olmak üzere*

$$\langle T_u, v\rangle = \int_M u \wedge v; \quad v \in \mathcal{D}'_{(n-p,n-q)}(M)$$

için $T \in \mathcal{D}'_{(p,q)}(M)$ olur.

Eğer T, Ω üzerinde bir $(n-p, n-q)$-akım ise $T_{J,K}$'lar birer dağılım olmak üzere $T \in \mathcal{D}'_{(p,q)}(\Omega)$'nin lokal koordinatlar üzerinde

$$\sum_{|J|=n-p, |K|=n-q} T_{J,K} dz_J \wedge d\overline{z}_K$$

formunda bir yazılışı vardır[Dem]. Böylece; akımları, dağılım katsayılı formlar olarak görebiliriz. Diferansiyel formlar üzerindeki işlemleri ve özellikleri genel olarak genel olarak akımlarda da çalışabiliriz: Bir $(n-p, n-q)$-akım T için, T'nin bir düzgün form u ile **dış çarpımı** her test fonksiyon v için

$$\langle T \wedge u, v\rangle \doteq \langle T, u \wedge v\rangle;$$

dış türevi de $u \in \mathcal{D}_{(p+1,q+1)}(X)$ için

$$\langle dT, u\rangle \doteq (-1)^{p+q}\langle T, du\rangle$$

olarak tanımlanır. $F : X_1 \to X_2$ biholomorfik eşlemesi altında $T_2 \in \mathcal{D}'_{(p,q)}(X_2)$'nin **geri görüntüsü**

$$\langle F^\star T_2, u\rangle \doteq \langle T_2, F_\star u\rangle$$

olarak tanımlanan bir $F^\star T_2 \in \mathcal{D}'_{(p,q)}(X_1)$; $T_1 \in \mathcal{D}'_{(p,q)}(X_1)$'in **ileri görüntüsü**(*push-forward*)

$$\langle F_\star T_1, u\rangle \doteq \langle T_1, F^\star u\rangle$$

olarak tanımlanan bir $F_\star T_1 \in \mathcal{D}'_{(p,q)}(X_2)$'dir. Akımlar üzerinde pozitiflik ise; $u_1, \dots, u_p$'ler X üzerinde birer $(1,0)$-form olmak üzere $u = \mathrm{i}u_1 \wedge \bar{u}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{i}u_p \wedge \bar{u}_p$ tipinde yazılabilen, basit form, her $u \in \mathcal{D}_{(p,p)}(X)$ için $\langle T, u\rangle \geq 0$ sağlayan $T \in \mathcal{D}'_{(p,p)}(\Omega)$'ye **pozitif akım** denir.

Örnek 7. *Herhangi bir $u \in Psh(X) \cap L^1_{loc}(X)$ için*

$$T = i\partial\bar{\partial}u = i\sum \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

pozitif, kapalı($dT = 0$) bir $(1,1)$-akımdır. Tersine, X üzerindeki herhangi pozitif, kapalı $(1,1)$-akım T için; her $x \in X$ noktasının bazı $\Omega \subset X$ komşuluklarında $T_{|\Omega} = i\partial\bar{\partial}u$ sağlayan bir $u \in Psh(\Omega)$ vardır([Dem]; Bölüm 3, Önerme 1.19)(Lokal dd^c-Lemma).

Örnek 8. *$d^c \doteq \frac{1}{i2\pi}(\partial - \bar{\partial})$ ve $\Omega \subset X$ bir açık küme olmak üzere; lokal olarak sınırlı bir $u \in Psh(\Omega)$ ve Ω üzerinde pozitif, kapalı bir $(n-p, n-p)$-akım T için*

$$dd^c(uT) \doteq dd^c u \wedge T$$

olarak tanımlanan uT pozitif ve kapalı bir akımdır([Dem]; Bölüm 3, Önerme 3.2). Böylece, lokal olarak sınırlı her u çoklu altharmonik fonksiyon için $(dd^c u)^n$ tanımlanabilir ve bir (n,n)-akım olur[Dem]. Özel olarak lokal olarak sınırlı her u çoklu alt-harmonik fonksiyonu için $MA(u) \doteq (dd^c u)^n$ operatörüne Monge-Ampère operatörü denir[BeT].

2.1.3 Kähler Manifoldlar

Tanım 2.1.6. X, n-boyutlu bir kompleks manifold olsun. (h_{jk}); düzgün katsayılı, pozitif bir hermitsel matris olmak üzere kapalı bir $(1,1)$-form ω, eğer lokal koordinatlar üzerinde

$$\omega = i\sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

olarak yazılabiliyorsa ω'ya bir Kähler form ve (X, ω) ikilisi de bir Kähler manifold denir[Koł91].

Örnek 9. *$\mathbb{CP}^n$ kompakt manifoldu ve Fubini-Study Kähler formu olarak bilinen $\omega_{FS} = i/2\partial\bar{\partial}\log(1 + |z|^2)$ ikilisi kompakt bir Kähler manifolddur.*

Örnek 10. *$F : X_1 \to X_2$ holomorfik bir gömme eşlemesi ve ω, X_2 üzerinde bir Kähler form ise $F^*\omega$, X_1 üzerinde bir Kähler formdur[Gue]. Böylece, bir Kähler manifoldun herhangi bir kompleks altmanifoldu da bir Kähler manifold olur.*

Örnek 11. *Herhangi bir $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ kesin çoklu altharmonik fonksiyon için; ρ, herhangi bir $U \subset X$ açık kümesi üzerinde $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)$, düzgün katsayılı, pozitif bir hermitsel matris olacağından $\omega = i/2\partial\bar{\partial}\rho$, X üzerinde bir Kähler formdur.*

Bir X manifoldu üzerindeki $(1,1)$-form u için $u = dd^c f$ sağlayan bir $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ varsa f'ye u'nun potansiyeli denir. Böylece Örnek 11 ile; her düzgün çoklu altharmoniğin bir potansiyel, hatta bir Kähler potansiyel, olduğunu söyleyebiliriz. Diğer taraftan, herhangi Kähler form her ne kadar manifoldun tümünde lokal olarak çoklu altharmonik bir potansiyele sahip(Örnek 7) olsa da bu durum global olarak her zaman sağlanamaz. Örneğin kompakt manifoldlar üzerinde, Maksimum Teoremi ile herhangi bir sabit olmayan form için böyle bir fonksiyon bulunamayacağını biliyoruz.

X kompakt Kähler manifoldu üzerinde birer u; reel, kapalı, düzgün $(1,1)$-form ve $\tilde{u}$; pozitif, kapalı $(1,1)$-akım alalım. dd^c-Lemma'dan([Dem];Lemma 8.6)([GuZ17]; Lemma 7.31), X'in her düzgün hacim formu üzerinde integrallenebilen bir $\psi \in L^1(X, \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ fonksiyonu için $\tilde{u} = u + dd^c\psi$ olarak yazılabilir ve u ile $\tilde{u}$'yu kohomolog olarak görebiliriz. Lokal olarak, herhangi bir açık küme $\Omega \subset X$ üzerinde, $u = df$ ve $\tilde{u} = dg$ sağlayan birer $f \in \mathcal{C}^\infty$ ve $g \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ var olduğundan $\psi_{|\Omega} = f + g$ sağlanır. Böylece ψ'nin lokal olarak bir düzgün ve bir çoklu altharmonik fonksiyonun toplamı olarak yazılabilen bir $X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eşlemesi olduğunu söyleyebiliriz ki böyle fonksiyonlara da quasi çoklu altharmonik fonksiyon denir. Böylece, bir (X, ω) Kähler manifoldu için; ω'nın X üzerinde bir potansiyeli olmasa da $\omega_\varphi \doteq \omega + dd^c\varphi > 0$ sağlayan, yani ω_φ bir Kähler form olacak şekilde, geniş bir $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ ailesi vardır. Böyle φ'lere de ω-Kähler potansiyeller denir: $\mathcal{K}(X, \omega) \doteq \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X) : \omega + dd^c\varphi > 0\}$.

2.1.3.1 Quasi Çoklu Altharmonik Fonksiyonlar

X; kompakt, bağlantılı bir Kähler manifold ve ω da X üzerinde tanımlı bir Kähler form olsun.

Tanım 2.1.7. ω'nın her lokal potansiyeli u için $\psi + u$ üst yarı sürekli(ü.y.s) ise ψ'ye ω-üst yarı sürekli denir ve ω-ü.y.s herhangi $\phi \in L^1(X, \mathbb{R} \cup \{\infty\})$ için eğer akım anlamında $\omega + dd^c\psi \geq 0$ sağlanıyorsa ψ'ye ω-çoklu altharmonik(ω-ç.a.h) fonksiyon denir. Tüm ω-ç.a.h fonksiyonların kümesi de $PSH(X, \omega)$ ile gösterilir:

$$PSH(X, \omega) = \{\phi \in L^1(X, \mathbb{R} \cup \{\infty\}) | \quad \omega + dd^c\phi \geq 0, \quad \phi \quad \text{bir} \quad \omega\text{-üys}\}.$$

Bir ω-çoklu altharmonik fonksiyon quasi çoklu altharmonik olduğundan üst yarı sürekli bir fonksiyondur ve böylece lokal olarak üstten sınırlıdır. Ayrıca; $PSH(X, \omega)$ kümesinin $[\omega]$ ile tamamen bağlantılı, konveks bir küme olduğunu görebiliriz:

Teorem 2.1.8. *(i) $\omega_1 \leq \omega_2$ durumunda $PSH(X, \omega_1) \subset PSH(X, \omega_2)$ sağlanır.*
(ii) Her $A \in \mathbb{R}_+^*$ için $\phi \in PSH(X, \omega) \mapsto A\phi \in PSH(X, A\omega)$ bir izomorfizm olduğundan $PSH(X, A\omega) = A \cdot PSH(X, \omega)$ sağlanır.
(iii) Eğer $\omega' = \omega + dd^c v$ ise $PSH(X, \omega') = PSH(X, \omega) + v$ sağlanır.

(iv) Eğer $\psi, \phi \in PSH(X,\omega)$ ise

$$maks\{\psi+\phi\}, \frac{\psi+\phi}{2}, \log(e^{\psi}+e^{\phi}) \in PSH(X,\omega)$$

olur[GuZ05].

Örnek 12. *Her sabit fonksiyon bir ω-ç.a.h'tir ve böylece her çoklu harmonik fonksiyon da $PSH(X,\omega)$'ın bir elemanıdır.*

Örnek 13. *$f \in \mathcal{C}^2(X)$ olmak üzere yeterince küçük her $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon f \in PSH(X,\omega)$ olur.*

Örnek 14. *Bir örnek aile olarak PSH($\mathbb{CP}^n, \omega_{FS}$) düşünülebilir. Ayrıca,*

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \doteq \left\{\psi \in PSH(\mathbb{C}^n) | \quad \psi(z) \leq \frac{1}{2}\log(1+|z|^2) + C_\psi\right\}$$

ailesine $\mathbb{C}^n$'de logaritmik büyüyen çoklu altharmoniklerin Lelong sınıfı denir ve PSH($\mathbb{CP}^n, \omega_{FS}$) ailesi ile aralarında birebir bir eşleme vardır:

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \to PSH(\mathbb{CP}^n, \omega_{FS})$$

$$\psi \mapsto \phi(z) = \begin{cases} \psi(z) - \frac{1}{2}\log(1+|z|^2) & z \in \mathbb{C}^n \quad \textit{ise} \\ \overline{\lim}_{w\in\mathbb{C}^n\to z}\big(\psi(w) - \frac{1}{2}\log(1+|w|^2)\big) & z \in H_\infty \quad \textit{ise.} \end{cases}$$

Bir ω-ç.a.h fonksiyonlar kümesinin büyüklüğünün, tamamen ω'nın kohomoloji sınıfındaki pozitif, kapalı $(1,1)$-akımlara bağlı olduğunu söyleyebiliriz([GuZ05]; Önerme 2.4). Böylece ω'nın kohomoloji sınıfının pozitifliği arttıkça PSH(X,ω)'in boyutunun da büyüyeceğini ve $[\omega]$ bir Kähler sınıf olduğundan Örnek 13 ile PSH(X,ω)'ın oldukça geniş bir küme olduğunu görebiliriz.

2.1.3.2 Kompakt Kähler Manifold Üzerinde HMAE

X, n-boyutlu bir Kähler manifold ve ω da X üzerinde tanımlı bir Kähler form olsun. Herhangi sınırlı bir $\psi \in PSH(X, \omega)$ için

$$MA_\omega(\psi) \doteq (\omega + dd^c\varphi)^n$$

şeklinde tanımlanan operatöre ω'ya göre kompleks Monge-Ampère operatörü ve

$$(\omega + dd^c\psi)^n = 0$$

eşitliğini çözen ψ fonksiyonuna homojen Monge-Ampère denkleminin (HMAE) bir çözümü denir. HMAE'nin çözümü tek türlü bir şekilde belirlenebilir[Koł98].

HMAE için Bir Dirichlet Problemi: (X, ω) bir n-boyutlu kompakt Kähler manifold ve $D \subset \mathbb{C}$ birim kapalı disk olmak üzere; $X \times D$, $\pi_X : X \times D \hookrightarrow X$ projeksiyonundan elde edilen $\pi_X^*\omega$ ile bir $n+1$-boyutlu kompakt Kähler manifolddur. Her $\tau \in \partial D = S^1$ için $F_\tau \in \mathcal{K}(X, \omega)$, yani $F_\tau = F(., \tau)$, $(\omega + i\partial\overline{\partial}F_\tau)_{|X} > 0$, olan bir $F \in \mathcal{C}^\infty(X \times S^1)$ verilsin. F'nin $X \times D$ üzerine

$$\mathrm{MA}_{\pi_X^*\omega}(\Phi) = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $\Phi \in \mathrm{PSH}(X \times D, \pi_X^*\omega) \cap \mathcal{C}^0$ genişlemesine, sınır değeri F ile verilmiş HMAE'nin çözümü denir. Aslında bu, sınır değerleri Kähler formların düzgün bir ailesi ile verilmiş HMAE için bir Dirichlet problemidir ve problemin tek türlü olacak şekilde bir çözümü vardır:

$$\Phi \doteq \sup{}^*\{\Psi \in \mathrm{PSH}(X \times D, \pi_\omega^*) : \mathrm{limsup}_{z\to\zeta}\Psi(z) \leq \phi(\zeta), \zeta \in X \times S^1\}$$

[NyR18]. Eğer çözüm Φ, her $\tau \in S^1$ için $\Phi_\tau \in \mathcal{K}(X, \omega)$ sağlayan bir düzgün fonksiyon ise Φ'ye bir regüler çözüm denir.

Sınır değeri F, düzgün ve S^1'den bağımsız olarak verildiğinde $\Phi(z, \tau) = F(z)$

problemin trivial regüler bir çözümü olduğundan[NyR18] problemin çözüme sahip sınır değerlerinin kümesi boştan farklıdır. Diğer yandan, her ne kadar herhangi sınır değeri için problemin regüler bir çözüme sahip olma garantisi olmasa da([Don]'da Teorem 2'den ya da Örnek 17'den bakılabilir.); regüler çözüm var olacak şekilde sınır değerlerini belirleyen tüm ϕ fonksiyonlarının kümesinin $\mathcal{C}^\infty(X \times D)$'de açık olduğunu biliyoruz:

Teorem 2.1.9. *([Don]; Donaldson Açıklık Teoremi)$X \times D$ üzerindeki regüler çözüme sahip sınır koşullu HMAE'lerin kümesi C^2-topolojide açıktır, yani bir F sınır koşulu ile verilmiş HMAE'nin eğer regüler bir çözümü var ise herhangi $\varepsilon > 0$ için öyle bir regüler çözüme sahip sınır koşulu $\tilde{F}$ vardır ki $||F - \tilde{F}||_{C^2} < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.*

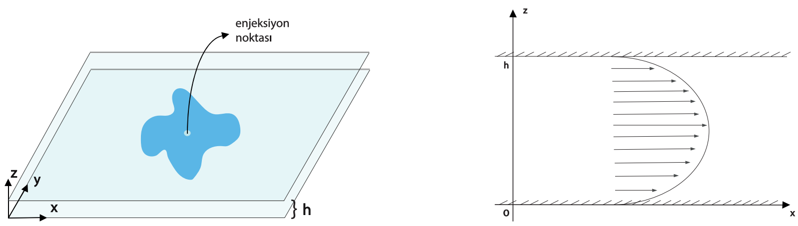
2.2 Kompleks Düzlemde Bir Hidrodinamik Problemi

Hele-Shaw akışı, bir Hele-Shaw hücresindeki sıkıştırılamaz bir akışkanın dağılımını tarif eden bir modeldir. Bir Hele-Shaw hücresi ise iki paralel düz plaka arasındaki dar bir bölgede viskoz bir sıvının akım çizgilerini görselleştirebilmeyi sağlayan ve 2-boyutlu akışını anlamaya yarayan bir düzenektir. Hele-Shaw akışları üzerine yapılan çok çeşitli ve birbirinden farklı modeller vardır[GuA]. Biz tüm tez boyunca; plakların biri üzerinde olan sabit bir noktadan, ortamdaki akışkana göre çok daha viskoz (örneğin enjekte edilen akışkanı su ve ortamdaki diğer akışkanı hava olarak görebiliriz) ve sıkıştırılamaz yeni bir akışkanın enjekte edilmesiyle kurulmuş sıfır yüzey gerilimli problem ile ilgileneceğiz. Burada; viskozlu sıvının enjekte edilmesiyle içerideki akışkanın resmi hareket etmeye başlar. Böylece, iki akışkan arasındaki arayüzeyin ortaya çıkardığı hareket bir serbest sınır problemini karakterize eder ve sıfır yüzey gerilimi varsayımı altında gelişen arayüzeyleri bulma problemine Hele-Shaw serbest sınır problemi denir.

Problemdeki fiziksel akışın matematiksel olarak ifadesi için Stokes-Leibenzon modeline bakılabilir.

2.2.1 Stokes-Leibenzon Modeli

Sıkıştırılamayan, viskozlu bir akışkanı, aralarındaki mesafe yeteri kadar küçük h olan bir Hele Shaw hücresine yavaş ve sabit bir oran ile enjekte ettiğimizi düşünelim. Akışkanın hızı $\mathbf{V} = (u, v, w)$, bir Q gücü ile akışkan enjeksiyon edilmesiyle üretiliyor olsun. Enjeksiyon durumu ile kaynak gücünü genelliği bozmayacak şekilde $Q = -1$ olarak alabiliriz[GuA]. Akışkanın enjeksiyonunu akışı hemen hemen daimi ve levhalara paralel olacak şekilde yaptığımızı varsayalım. Yani, dikey akış hareketi ve hız-zaman değişimi var olmasın: $w = 0$, $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0$.



(a) (b)

Şekil 2.1: (a) *Hücrenin üst duvarından akışkan enjekte edilerek oluşturulan akışın bir şeması*,(b) *Hele Shaw hücresinin x yönündeki kesitinde hız profili*

Bu türlü bir hücredeki akış için $\mathbf{F}_b = 0$ alarak Navier-Stokes eşitliğini düzenlersek;

$$0 = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} - \frac{1}{\rho}\Big(- \nabla p + \mu \nabla \mathbf{V}\Big) =$$

$$\Big(\Big\{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\Big\}, \Big\{u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\Big\}, 0\Big) - \frac{1}{\rho}\Big(\Big\{ - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\Delta u\Big\}, \Big\{ - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\Delta u\Big\}, -\frac{\partial p}{\partial z}\Big) =$$

$$\Big(\Big\{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \mu\frac{\Delta u}{\rho}\Big\}, \Big\{u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \mu\frac{\Delta v}{\rho}\Big\}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\Big)$$

eşitlikleri sağlanır. Diğer yandan, boyutsal homojenliği korumak adına boyut analizi(*dimensional analysis*) ile dar levhalar arasındaki akış teorisini birlikte değerlendirirsek; yani $h << L$ varsayımıyla h, akışın tipik bir dikey (z yönündeki) uzunluk ölçeği; L, akışın tipik bir yatay (x ve y yönündeki) uzunluk ölçeği; U, tipik bir yatay akış süraat ölçeği olmak üzere akış hızının bileşenlerinin L mertebeli mesafede U mertebeli miktar kadar değişeceğini düşünürsek hız bileşenlerinin yatay yöndeki türevlerinin büyüklük mertebeleri için

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U}{L}, \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U}{L}, \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{U}{L}, \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U}{L};$$

dikey yöndeki türevleri için de

$$\frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{U}{h}, \frac{\partial v}{\partial z} \sim \frac{U}{h}$$

diyebiliriz. Aynı düşünce ile ikinci dereceden türevleri de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \sim \frac{U}{L^2}$$

olarak değerlendirebiliriz. Dar levhalarda çalıştığımız için varsayım gereği $\frac{1}{L} << \frac{1}{h}$ olduğundan hız bileşenlerinin yatay türevlerinin dikey türevlerine göre çok küçük olduğunu söyleyebiliriz. Bu halde, u ve v'nin x ve y'ye göre türevleri z'ye göre olan türevine kıyasla ihmal edilebilirdir. Bu yaklaşımla $i = 1, 2$ için

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = \frac{\partial^i u}{\partial y^i} = \frac{\partial^i v}{\partial x^i} = \frac{\partial^i v}{\partial y^i} = 0$$

eşitliklerini de Navier-Stokes eşitliğinde yerlerine yazarsak, sistemden

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

elde ederiz. Buradan; p, z'den bağımsız olacağından,basıncın yalnızca x ve y'ye bağlı bir fonksiyon ve u ile v'nin

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}z^2 + A(x, y)z + B(x, y)$$

$$v(x,y,z) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}z^2 + C(x,y)z + D(x,y)$$

biçiminde olduğu sonuçlarına varmış oluruz. Sınır koşulları nedeniyle (*hücre duvarlarındaki akışkan parçacıklarının hareketinin sıfır olma kabulü; no-slip condition*) de

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(z^2 - hz); \quad v(x,y,z) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}(z^2 - hz)$$

eşitliklerini elde ederiz. Böylece; birim genişlik başına ortalama akış hızı,

$$\frac{1}{h}\int_0^h u\mathrm{d}z = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{1}{h}\int_0^h v\mathrm{d}z = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y}$$

eşitlikleri sağlanacağından, $\mathbf{V}_{ort} = \mathbf{V}$ için

$$\mathbf{V} = -\frac{h^2}{12\mu}\nabla p \tag{2.2.1}$$

olarak yazılabilir. Burada p yalnızca x ve y'ye bağlı olduğundan bu eşitliği, ki bu eşitlik Hele Shaw eşitliği olarak bilinir, tamamen iki boyutlu bir eşitlik olarak görebiliriz. Böylece bu eşitlik sıkıştırılamaz bir akışkanın iki boyutlu bir akışını tarifler.

Şimdi, enjeksiyon noktasını genelliği bozmayacak şekilde $(0,0)$ seçelim. Yeteri kadar küçük bir ε için, $U_\varepsilon \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \varepsilon\}$ olmak üzere kütle değişim oranı $\int_{\partial U_\varepsilon} \rho\mathbf{V}\cdot n\mathrm{d}s$ sabittir ve α, herhangi bir noktadaki hız vektörü ile birim normal vektör arasındaki açı olmak üzere; Hele Shaw eşitliğinden $\int_{\partial U_\varepsilon} \mathbf{V}_n\mathrm{d}s = \frac{-h^2\cos\alpha}{12\mu}\int_{\partial U_\varepsilon}\nabla p\mathrm{d}s$ ve Green Teoremi'nden

$$\int_{\partial U_\varepsilon}\nabla p\mathrm{d}s = \int_{\partial U_\varepsilon}(p_x, p_y)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \int_{\partial U_\varepsilon} -p_y\mathrm{d}x + p_x\mathrm{d}y = \int_{U_\varepsilon}(p_{xx} + p_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

olacağından her ε için $\int_{U_\varepsilon}\Delta p\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ sabit olmuş olur. Böylece potansiyel p,

$$\Delta p = -\delta_{(0,0)} \tag{2.2.2}$$

eşitliğini sağlar ve Hele Shaw eşitliği Laplace eşitliğine indirgenmiş; basınç fonksiyonu p, bir dağılım fonksiyonu olmuş olur. Dahası, sınırlarda da; dış hava basıncını ve yüzey gerilimini 0 varsayarak p'yi 0 alabiliriz.

Akış ile ilgili bazı sonuçlar:

(1) Dağılmış bir vizkoz akışkanın $z = x + iy$ düzleminde oluşturduğu bölge Ω olmak üzere Ω için $\Delta p_{|\Omega} = -\delta_0$ ve $p_{|\partial\Omega} = 0$ sağlayan potansiyel bir fonksiyonun varlığı bir Dirichlet problemi ve p de Ω'nın 0 kutuplu bir Green fonksiyonu olarak görülebilir[Kli].

(2) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbf{V}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$; sıkıştırılamaz bir akışkanın döngüsel olmayan bir akışının hız alanı olsun. Döngüsel olmayan bir akışı için

$$0 = \text{curl } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

eşitliği sağlanır ve basit bağlantılı bir bölge üzerinde $\mathbf{V}$ korunumlu bir alandır, yani reel değerli bir ϕ fonksiyonunun gradyanıdır. Böyle ϕ fonksiyonlarına hız potansiyeli, potansiyel, denir ve akışkanın sıkıştırılamaz olması durumu matematiksel olarak bize

$$0 = \text{div } \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

eşitliğini vereceğinden potansiyel bir harmonik fonksiyondur:

$$\Delta\phi = \nabla \cdot \big(\nabla\phi\big) = \nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Basit bağlantılı bölge üzerinde bir sabit farkıyla tek türlü şekilde belirlenebilen bir $w = \phi + i\psi$ holomorfik fonksiyonu için reel 2-boyutlu akış teorisinde potansiyelin bize verdiği w'ya kompleks potansiyel denir.

$z = x + iy \sim (x, y)$ olmak üzere

$$w'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv$$

için w''ne de kompleks hız denir. Şimdi, Hele-Shaw akışına dönecek olursak; (2.1.1) eşitliğinden Hele-Shaw'un, potansiyel fonksiyonu basınç fonksiyonun bir katı olan bir akış olduğunu söyleyebiliriz.

(3) Darcy'nin Yasası; κ geçirgenliğe sahip gözenekli bir ortamdaki viskoz akışkanın akışını makroskopik olarak ifade eden bir eşitliktir ve yavaş bir akış için $\mathbf{V} = -\frac{\kappa}{\mu}\nabla p$ olarak ifade edilebilir[GuTV]. Bu ifade $\kappa = h^2/12$ için (2.1.1)'e denk olduğundan; Hele-Shaw eşitliğinin, geçirgenlikli ortamdaki akışları kontrolleyebilen bir eşitlik olduğunu söyleyebiliriz.

2.2.2 Serbest Sınır Problemi Olarak Hele-Shaw Akışı

Bir t anı için Ω_t; vizkos sıvının $z = x + iy$-düzleminde yayıldığı basit bağlantılı, sınırlı bir bölge olsun. Başlangıç durumu $t = 0$ için Ω_0 olarak gösterilsin ve $\partial\Omega_t$'nin de bir $f(x, y, t) \equiv f(z, t) = 0$ ile verildiğini varsayalım. Her t için $p = p(z, t)$; $\Delta p_{|\Omega_t} = -Q\delta_0$ eşitliği ile $\Omega_t \setminus \{0\}$'da harmonik ve $p_{|\partial\Omega_t} = 0$ ile sıfır yüzey gerilimi dinamik koşulunu sağlayan bir potansiyel olsun. Serbest sınırın hareketi, $\partial\Omega_t$ üzerindeki akış hızı tarafından belirleneceğinden; n_t, $\partial\Omega_t$ üzerindeki dış birim normal vektör olmak üzere $\partial\Omega_t$'nin hareketi $V_n = \mathbf{V}_{|\partial\Omega_t} \cdot n_t$ dışsal normal hızı ile belirlenir. Hele-Shaw eşitliğinde genelliği bozmayacak şekilde $h^2/12\mu = 1$ varsayarsak; $n_t \cdot \nabla p = \partial p/\partial n$, p'nin $\partial\Omega_t$ üzerindeki dış normal türevi olmak üzere kinematik sınır koşulu da $V_n = -\frac{\partial p}{\partial n}$ olarak elde edilir. O halde; sıfır enjeksiyon noktalı, sıfır yüzey gerilimli Hele-Shaw serbest sınır problemini, Hele-Shaw akışını,

$$\Delta p_{|\Omega_t} = -Q\delta_0 \tag{2.2.3}$$

$$p_{|\partial\Omega_t} = 0 \tag{2.2.4}$$

$$V_n = -\frac{\partial p}{\partial n} \tag{2.2.5}$$

eşitliklerini sağlayan bir Ω_t olarak formülüze edebiliriz. Ayrıca problemin verdiği basınç fonksiyonu p ve p'den elde edilen kompleks potansiyel $\mathrm{w}(z,t)$'yi şöyle hesaplayabiliriz:

Sabitlenmiş her t için; $\mathrm{Re}(\mathrm{w}_t)$, (2.2.1)-(2.2.2)'yi çözen ve Ω_t üzerinde holomorfik olan bir fonksiyondur. Potansiyel teoriden laplasiyeni δ_0 olan bir potansiyelin $\frac{-Q}{2\pi}\log|z|$ olduğunu bildiğimizden[Ran] modelin bize verdiği potansiyel p'nin her $z \in \Omega_t$ için $h_t(z)$ harmonik olmak üzere

$$p(z,t) = \frac{-Q}{2\pi}\log|z| + h(z,t)$$

şeklinde olduğunu söyleyebiliriz. Holomorfik w_t için

$$\frac{d\mathrm{w}_t}{dz} = \frac{\partial p}{\partial x} - i\frac{\partial p}{\partial y}$$

sağlanacağından $\tilde{\mathrm{w}}(z,t)$, Ω_t üzerinde analitik ve regüler bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathrm{w}(z,t) = \frac{-Q}{2\pi}\log z + \tilde{\mathrm{w}}(z,t)$$

olarak hesaplanılabilir.

2.2.2.1 Konformal Eşleme ve Moment Sabitleri

Polubarinova-Kochina ve Galin, birbirlerinden bağımsız olarak, kompleks değişken ile Riemann eşlemesi kullanarak 1945'te Hele-Shaw akışının konformal bir karakterizasyonunu verdiler[Vas]. Daha sonra, 1972'de, Richardson konformal eşlemeyi kullanarak Hele-Shaw'u karakterize etmemizi sağlayan sonsuz bir dizi tanımladı[Ric].

Ω_t, bir önceki kısımda karakterize ettiğimiz gibi Hele-Shaw akışını sağlayan, yani $(2.2.1)-(2.2.3)$ eşitliklerini sağlayan, $z = x+iy$-düzleminde sınırlı ve basit bağlantılı bir bölge ailesi olsun. Böyle bir Ω_t için; yardımcı bir $\xi = \zeta + i\eta$-düzlemindeki $\Delta(0,1) = \{\xi : |\xi| < 1\}$ birim diski için $\Delta(0,1)$'ten Ω_t'ye sınırları sınırlara taşıyan, $f(0,t) = 0$ ve $f'(0,t) > 0$ sağlayan tek türlü konformal (birebir ve holomorfik) bir eşlemenin varlığını Riemann Eşleme Teoremi'nden biliyoruz. Böyle bir

$$f : (\xi, t) \mapsto a_1(t)\xi + a_2(t)\xi^2 + \ldots$$

fonksiyonu ile başlangıç sınırını ve serbest sınırı $\partial\Omega_0 = \{f(e^{i\theta}, 0) : \theta \in [0, 2\pi)\}$ ve $\partial\Omega_t = \{f(e^{i\theta}, t) : \theta \in [0, 2\pi)\}$ olarak parametrize edebiliriz. Ω_t'nin dışsal birim normalini bu f dönüşümü ile

$$n = \xi \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi}}{\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|} ; \xi \in \partial\Delta(0,1)$$

olarak yazabiliriz ve böylece $\partial\Omega_t$ üzerinde normal hız

$$V_n = -(\nabla p) \cdot n = -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} \xi \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi}}{\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|}\right)$$

olarak elde edilir. Konformal eşleme altında green fonksiyonun değişmezliğinden[Kli] $(\mathrm{w} \circ f)(\xi, t) = \frac{-1}{2\pi} \log \xi$ sağlanır ve türev ile

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, t) = -\frac{Q}{2\pi\xi}$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan, hareketli sınır için normal hız $V_n = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial t} \overline{n}_{|\partial\Delta}\right)$ olarak hesaplanacağından[GuA], herhangi bir $\xi \in \partial\Delta(0,1)$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial t} \overline{n}|_{\partial\Delta}\right) = -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} \xi \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi}}{\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|}\right) = -\frac{Q}{2\pi\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|}$$

olacağından

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial t} \xi \overline{\frac{\partial f}{\partial \xi}}\right) = -\frac{Q}{2\pi}$$

eşitliği sağlanır. Daha açık olarak $|\xi| = 1$ için

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial f}{\partial \xi} + \overline{\xi^2 \frac{\partial f}{\partial \xi}}\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{Q}{\pi \xi}$$

eşitliği gerçeklenmiş olur.

Serbest sınırlar için verdiğimiz bu eşitliğe Polubarinova-Galin eşitliği denir ve eşleme fonksiyonunun zaman üzerindeki bağımlılığı tamamen bu eşitlik ile anlatılabilir olduğundan; bölgenin büyümesi kontrollü şekilde ifade edilebilir ve probleme aşikar çözümler inşa etmek mümkün hale gelebilir (Örnek görmek için Bölüm 2.2.2.2'ye bakılabilir)[GuA].

Moment sabitleri, Polubarinova-Galin'in diferansiyel eşitliğinin daha genelleşmiş bir halidir: Burada $t \in [0, t_0)$ alınır ve $k = 0, 1, 2, \ldots$ için moment sabitleri

$$c_k(t) \doteq \int\limits_{\Omega_t} z^k \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

olarak tanımlanır. Temel diferansiyel formlar ile Stokes Teoremi'nden

$$c_k(t) = \int\limits_{\Omega_t} z^k \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2i}\int\limits_{\Omega_t} z^k \mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2i}\int\limits_{\Omega_t} z^k \mathrm{d}(\bar{z}\mathrm{d}z) = \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\Omega_t} z^k \bar{z}\mathrm{d}z$$

eşitlikleri sağlanır ve Ω_t'nin zamana bağlı değişiminden; $\Delta = \Delta(0,1)$ olmak üzere

$$\frac{\mathrm{d}c_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\Omega_t} z^k \bar{z}\mathrm{d}z\right) = \frac{1}{2i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int\limits_{\partial\Delta} f^k \bar{f}\frac{\partial f}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi\right) = \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\Delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f^k \bar{f}\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\Delta}\left(kf^{k-1}\frac{\partial f}{\partial t}\bar{f}\frac{\partial f}{\partial \xi} + f^k\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial \xi} + f^k \bar{f}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2i}\underbrace{f^k \frac{\partial f}{\partial t}\bar{f}}_{0}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\Delta} f^k \frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\bar{f}\frac{\partial f}{\partial t}\Big)\mathrm{d}\xi}_{-\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\Delta} f^k \frac{\partial\bar{f}}{\partial\xi}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\Delta} f^k \bar{f}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial t}\mathrm{d}\xi} \quad + \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\Delta} f^k \frac{\partial\bar{f}}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi \quad + \quad \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\Delta} f^k \bar{f}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\xi}\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\Delta} f^k \left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{f}}{\partial t} - \frac{\partial\bar{f}}{\partial\xi}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\Delta} f^k \left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{f}}{\partial t} + \xi^2\overline{\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial f}{\partial t}}\right)\mathrm{d}\xi$$

$$= \quad \frac{Q}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta}\frac{f^k}{\xi}\mathrm{d}\xi \quad = \quad \begin{cases} \frac{Q}{2\pi i}2\pi i, & k=0 \\ f^k(0), & k>0 \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} Q, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}$$

gerçeklenir. Demek ki; bir Ω_0 başlangıç bölgesi verildiğinde, moment sabitlerinin başlangıç değerleri hesaplanabilirdir ve belirli bir süre sonunda akışkanın kapladığı alan A kadar büyüdüğünde c_0'ın değeri de A kadar artmış olacaktır ancak moment sabitleri dizisinin geri kalan terimleri değişmeyecektir:

$$c_0(t) = c_0(0) + Qt$$

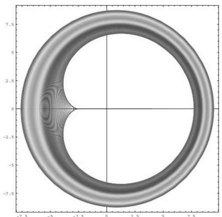
$$c_k(t) = c_k(0); \quad k > 0.$$

Böylece, bir başlangıç bölgesinin verilmiş olması durumunda sürekli değişimlerin meydana gelme şeklini moment sabitleri ile hesaplayabiliriz. Buradan bakıldığında Hele-Shaw akış probemini bir moment problemi olarak görebiliriz (bunun için Bölüm 4'e bakılabilir).

2.2.2.2 Çözümler Üzerine

Problemin fiziksel olarak yorumu; $Q > 0$ durumu için orijinden enjeksiyon yapılması, $Q < 0$ durumu için ise orijinden akışkanın geri çekilmesi olarak yapılır[GuA]. Dahası; problemin $Q\delta_0$ yerine, kompakt desteğe sahip sonlu ve pozitif bir ölçü ile kurulmuş daha genel hali ve çözümlerinin varlığıyla ilgili [Gus]'a bakılabilir.

Polubarinova-Galin eşitliğini kullanarak Hele-Shaw için açık çözümler elde edilebilir. Burada ana fikri; parametrik f fonksiyonunun Polubarinova-Galin eşitliğini çözen özel bir formunu kullanmak olarak görebiliriz. Örneğin başlangıç bölgesi Ω_0, orijin merkezli bir disk olmak üzere $f(\xi, t) = \sqrt{\frac{|\Omega_0| - tQ}{\pi}}\xi$ eşlemesi, $t \in [0, \infty)$ ile $Q > 0$ durumu için orijinden enjeksiyonla kurulan Hele-Shaw'un; $t \in [0, -|\Omega_0|/Q]$ ile $Q < 0$ durumu için orijinden geri çekme ile kurulan Hele-Shaw'un çözümünü parametrize eder ve bu parametrizasyon da kaynak noktası merkezli bir diskin genişlemesi veya daralması olarak görselleştirilebilir. Aşikar olmayan, başka bir açık çözüm örneği olarak; *Polubarinova-Galin kardiyoitini* verebiliriz. $a_0(t)$ ve $a_1(t)$ reel katsayılar olmak üzere bir $[0, t_0)$ için $f(\xi, t) = a_0(t)\xi + a_1(t)\xi^2$ eşlemesi; bir başlangıç koşulu (bir başlangıç bölgesi ve buna bağlı olarak katsayılar arasındaki bir ilişki) ile aşağıdaki şekildeki gibi gelişen Hele-Shaw'un şeklini parametrize eder[GuA].



Tezin geri kalan kısmında Hele-Shaw serbest sınır problemini $Q > 0$ durumu için incelemeye devam edeceğimizi burada belirtelim ve genelliği bozmayacak şekilde $Q = 1$ alalım.

Genel olarak Hele-Shaw akışının çözümünden, $(2.2.1) - (2.2.3)$, bahsettiğimiz de iki tür yaklaşım söz konusudur. Bu yaklaşımlardan ilki, potansiyel-teorik yapılar kullanılarak tarif edilen zayıf Hele-Shaw akış; ikincisi ise fiziksel yorumunu verdiğimiz, akışın sınır hareketinin tarifi ile dinamik olarak tanımlanan güçlü veya klasik Hele-Shaw akıştır ve ikincisi için düzgünlük gereklidir. Bu çözümlerin tanımlarını vermeden önce, bir bölgenin ve ailenin düzgünlüğünden bahsedebilmek için bazı tanımlar verelim:

Bir $\Omega \in \mathbb{C}$ bölgesinin düzgün olması $\partial\Omega$'nın, lokal olarak düzgün bir fonksiyonun grafiği olarak yazılabilmesi demektir; yani, herhangi bir $p \in \partial\Omega$'nin bir $U \subset \mathbb{C}$ komşuluğu için $\partial\Omega \cap U$'nun, bir düzgün fonksiyonun grafiği olarak ifade edilebilir olması demektir. $\mathbb{C}$'deki bölgelerin bir $\{\Omega_t\}_{t\in(a,b)}$ ailesinin düzgün olması ise $\partial\Omega_t$'nın lokal olarak t'ye bağlı, düzgün bir fonksiyonun grafiği olarak yazılabilir olması demektir. Böylece bir $t_0 \in (a,b)$ için; n, $\partial\Omega_{t_0}$ üzerindeki dış birim normal vektör alanı olmak üzere t_0'a yakın bir $t \in (a,b)$ için bir $f_t(z) = f(z,t) \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega_{t_0})$ ile $\partial\Omega_t = \{z + f(x,t)n_z : z \in \partial\Omega_{t_0}\}$ olarak yazılabilir ve t_0 anındaki $\partial\Omega_{t_0}$'nın dışsal normal hızı

$$V_{t_0} = \frac{d}{dt}_{|t=t_0} \partial\Omega_t = \frac{df_t}{dt}_{|t=t_0} n$$

olarak heaplanabilir[NyR14].

Tanım 2.2.1. $\{\Omega_t\}_{t\in[0,t_0)}$, $\mathbb{R}^2$'de orijini içeren bölgelerin bir düzgün ailesi ve $p(z,t) = -G_{\Omega_t}(z,0)$ olmak üzere eğer $V_n = -\partial p/\partial n$ sağlanıyorsa Ω_t'ye, (2.2.1)–(2.2.3) Hele-Shaw akışının klasik çözümü denir.

Tanım 2.2.2. $\{\Omega_t : t \in [0,t_0)\}$; orijini içeren, sınırlı, açık kümelerin bir ailesi ve her t için

$$u(z,t)_{|\mathbb{C}} \geq 0 \tag{2.2.6}$$

$$u(z,t)_{|(\Omega_t)^c} = 0 \tag{2.2.7}$$

$$\chi_{\Omega_t} = \chi_{\Omega_0} + t\delta_0 + \Delta u \tag{2.2.8}$$

denklemini sağlayan bir $u = u(z,t)$ fonksiyonu varsa Ω_t ailesine (2.2.1) – (2.2.3) Hele-Shaw probleminin zayıf çözümü denir.

Bir zayıf çözümden bahsettiğimizde, ki problemin her zaman bir zayıf çözümü vardır

[Gus], bu çözümdeki kümelerin Lebesgue alan ölçüsüne göre duygunlaştırılmış olduğunu eklemeliyiz. Bu varsayımla birlikte, çözüm tek türlü olarak belirlenebilir olur[GuA]. Ayrıca, klasik çözümde zaman olarak görülebilen t'nin, zayıf çözüm için yalnızca bir parametre olduğunu söyleyebilir ve zayıf çözümleri, klasik çözümlerin genelleştirilmişleri olarak görebiliriz:

Öncelikle bize şimdi ve sonrası için yardımcı olacak bir teoremden bahsedelim.

Teorem 2.2.3. *([Fla] Reynold'ın transport teoremi; düzlem üzerindeki integral için Leibniz kuralı)* $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$*;* $x \in \Omega(t)$ *olmak üzere, zamana bağlı olarak* $V = V(x,t)$ *hız alanına göre değişen bir bölge ve* $f = f(x,t)$ *de* $\Omega(t)$ *üzerinde bir fonksiyon olsun.* n*, birim normal vektör alanı ve* dA *bir alan formu olmak üzere;*

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega(t)} f\mathrm{d}A\right) = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}A + \int_{\partial\Omega(t)} fV \cdot n\mathrm{d}s$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi, bir klasik çözümün zayıf bir çözüm olduğunu gösterebiliriz: Eğer Ω_t, Hele-Shaw probleminin güçlü bir çözümü ise; Ω_t'de altharmonik herhangi bir $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C})$ fonksiyonu için

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} \varphi \mathrm{d}A = \int_{\partial\Omega_t} V_n \varphi \mathrm{d}s = -\int_{\partial\Omega_t} \frac{\partial p}{\partial n}\varphi \mathrm{d}s = -\int_{\partial\Omega_t} \underbrace{p}_{0} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\mathrm{d}s + \int_{\Omega_t} \big(\underbrace{p\Delta\varphi}_{\geq 0} - \varphi \underbrace{\Delta p}_{-\delta_0}\big)\mathrm{d}A \geq \varphi(0)$$

sağlanır ve Ω_t artan bir aile ise bu eşitliğin integralini alırsak

$$\int_{\Omega_t} \varphi \mathrm{d}A - \int_{\Omega_0} \varphi \mathrm{d}A = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{\Omega_t} \varphi \mathrm{d}A\Big)\mathrm{d}t \geq \int_0^t \varphi(0)\mathrm{d}t = t\varphi(0)$$

eşitsizliğini elde ederiz. O halde, Hele-Shaw'un herhangi bir monoton artan güçlü çözümü Ω_t ve Ω_t'de altharmonik, integrallenebilen herhangi bir $\varphi \in$

$C^\infty(\mathbb{C})$ fonksiyonu için

$$\int_{\Omega_t} \varphi \mathrm{d}A - \int_{\Omega_0} \varphi \mathrm{d}A - t\varphi(0) \geq 0 \tag{2.2.9}$$

eşitsizliği sağlanacağından; $t > 0$ olmak üzere

$$u(z,t)_{|z\in\mathbb{C}} \doteq \int_{\Omega_t} \log|\xi - z| \mathrm{d}A(\xi) - \int_{\Omega_0} \log|\xi - z| \mathrm{d}A(\xi) - t\log|z| \tag{2.2.10}$$

olarak tanımlarsak $\varphi(\xi) = \log|\xi - z|$ fonksiyonu Ω_t'de integrallenebilir ve alt-harmonik olduğu için

$$u_{|\mathbb{C}} \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan $z \in \Omega_t^c$ olmak üzere $\varphi(\xi) = \log|\xi - z|$ fonksiyonu Ω_t üzerinde harmoniktir ve (2.2.9)'daki eşitsizliklik harmonik fonksiyonlar için eşitlik durumunda olacağından

$$u_{|{\Omega_t}^c} = 0$$

eşitliği de gerçeklenmiş olur. Ayrıca, rastgele bir $\psi \in C_C^\infty(\mathbb{C})$ için

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}} \psi \Delta u = \int_{\mathbb{C}} u \Delta\psi \mathrm{d}A \\
&= \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{\Omega_t} \log|\xi - z| \mathrm{d}A(\xi) - \int_{\Omega_0} \log|\xi - z| \mathrm{d}A(\xi) - t\log|z| \right) \Delta\psi(z) \mathrm{d}A(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \int_{\Omega_t} \log|\xi - z| \Delta\psi(z) \mathrm{d}A(\xi) \mathrm{d}A(z) - \int_{\mathbb{C}} \int_{\Omega_0} \log|\xi - z| \Delta\psi(z) \mathrm{d}A(\xi) \mathrm{d}A(z) \\
&\qquad - t \int_{\mathbb{C}} \log|z| \Delta\psi \mathrm{d}A(z)
\end{aligned}$$

olur. $\Delta\psi$ sınırlı ve $\log|z|$ lokal olarak integrallenebilir olduğundan Fubini Teoremi gereğince

$$= \int_{\Omega_t} \int_{\mathbb{C}} \log|\xi - z| \Delta\psi(z) \mathrm{d}A(z) \mathrm{d}A(\xi) - \int_{\Omega_0} \int_{\mathbb{C}} \log|\xi - z| \Delta\psi(z) \mathrm{d}A(z) \mathrm{d}A(\xi) - t \int_{\mathbb{C}} \log|z| \Delta\psi \mathrm{d}A(z)$$

sağlanır ve

$$= \int_{\Omega_t} \left(\int_{\mathbb{C}} \psi \Delta \log|\xi - z| \right) \mathrm{d}A(\xi) - \int_{\Omega_0} \left(\int_{\mathbb{C}} \psi \Delta \log|\xi - z| \right) \mathrm{d}A(\xi) - t \int_{\mathbb{C}} \psi \Delta \log|z| = \int_{\Omega_t} \psi \delta_\xi \mathrm{d}A(\xi) - \int_{\Omega_0} \psi \delta_\xi \mathrm{d}A(\xi) - t \int_{\mathbb{C}} \psi \delta_0 = \int_{\Omega_t} \psi \mathrm{d}A - \int_{\Omega_0} \psi \mathrm{d}A - t \int_{\mathbb{C}} \psi \delta_0 = \int_{\mathbb{C}} \psi \chi_{\Omega_t} - \int_{\mathbb{C}} \psi \chi_{\Omega_0} - t \int_{\mathbb{C}} \psi \delta_0 = \int_{\mathbb{C}} \psi \Big(\chi_{\Omega_t} - \chi_{\Omega_0} - t\delta_0 \Big)$$

olacağından

$$\Delta u = \chi_{\Omega_t} - \chi_{\Omega_0} - t\delta_0$$

eşitliği de gerçeklenir. Böylece Ω_t, Hele-Shaw için bir zayıf çözüm olmuş olur ve ayrıca zayıf çözümün u potansiyeli ile klasik çözümün p potansiyeli, akışın basıncı, arasında

$$u_t = \int_0^t p_{\Omega_\tau} \mathrm{d}\tau$$

ilişkisi vardır. Ayrıca, kanıtın formel bir hali için [[Gus], Teorem 1]'e bakılabilir.

Bölüm 3

İki Serbest Sınır Probleminin Dualitesi: HMAE ve Hele-Shaw Akışı

Hele-Shaw eşitliği, gözenekli ortamdaki akışı kontrolleyen Darcy Yasası ile aynı tipte olduğundan[GuTV]; materyallerinin geçirgenliği pozitif herhangi bir κ ile verilmiş Hele-Shaw hücresindeki akışın hareketi tekrar tanımlanabilir[NyR14]:

Tanım 3.0.1. $\{\Omega_t\}$, $\mathbb{R}^2$'deki bazı bölgelerin sıfırı da içeren bir ailesi olsun. p_t, $\partial\Omega_t$ üzerinde 0'a eşit olan ve Ω_t üzerinde $\Delta p_t = -\delta_0$ eşitliğini sağlayan fonksiyon ve V_t, $\partial\Omega_t$'nin dışsal normal hızı olmak üzere her t için $\partial\Omega_t$'de

$$V_t = -\kappa \frac{\partial p}{\partial n}$$

eşitliği sağlanıyorsa $\{\Omega_t\}$'ye κ geçirgenlikli Hele-Shaw'un bir çözümü denir.

Çeşitli κ durumları için yapılan çalışmalar ile ilgili [NyR14], [GuA] ve referanslarına; sabit bir κ durumu için Bölüm 2'ye bakılabilir.

Biz bu bölümde geçirgenliği pozitif, düzgün κ fonksiyonu ile verilmiş bir Hele-Shaw akışı ve kompakt bir Kähler manifold üzerindeki bir Homojen Monge-

Ampère eşitliğinin regüler çözümleri arasında bir düalite inşaa ederek κ geçirgenlikli Hele-Shaw'un çözümünün varlığı üzerine bir ispat vereceğiz.

3.1 Hele-Shaw Akışı ve Holomorfik Diskler

Bu kısımda; kompleks düzlemdeki κ geçirgenlikli Hele-Shaw akışının, bir holomorfik disk ile taşındığı daha yüksek boyutlu bir manifold üzerindeki karakterizasyonunu vereceğiz.

3.1.1 Kompleks Momentler

Tanım 3.1.1. Ω_t, $\mathbb{C}$'deki bölgelerin bir ailesi ve κ; pozitif, düzgün bir fonksiyon olmak üzere $k \geq 0$ için

$$M_k(t) \doteq \int_{\Omega_t} z^k \frac{1}{\kappa} \mathrm{d}A$$

değerine Ω_t'nın k. kompleks momenti denir. Özel olarak, $k \geq 1$ için M_k'ya yüksek momentler denir. Burada, $\mathrm{d}A$ Lebesgue ölçüsü olmak üzere $\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}A$ düzgün bir alan formudur. Alan formuna göre bölgenin alanının zamana göre değişimi t ile lineer olarak değişir: $M_0(t) = M_0(0) + t$.

Teorem 3.1.2. *Eğer Ω_t Hele Shaw akışı tarafından verildiyse yüksek momentler t'ye göre sabittir: $k \geq 1$ için $M_k(t) = M_k(0)$.*

Kanıt 3.1.3. *Reynold'ın transport teoremi ve Hele-Shaw eşitliğinden*

$$\frac{\mathrm{d}M_k}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega_t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z^k)\frac{1}{\kappa}\mathrm{d}A + \int_{\partial\Omega_t} z^k \frac{1}{\kappa} V_t \mathrm{d}s = -\int_{\partial\Omega_t} z^k \frac{\partial p_t}{\partial n}\mathrm{d}s;$$

Green formulü, z^k harmonikliği ve p'nin bölgedeki tanımlanışından

$$= \int_{\Omega_t} \Big(p_t \underbrace{\Delta(z^k)}_{0} - \underbrace{z^k \Delta p_t}_{z^k(0)\delta_0}\Big)\mathrm{d}A - \int_{\partial\Omega_t} \underbrace{p_t}_{0} \frac{\partial z^k}{\partial n}\mathrm{d}s = 0$$

sağlanır.

Teorem 3.1.4. *Basit bağlantılı bölgelerin; sıfırı içeren, düzgün, artan ve yüksek momentleri t'ye göre sabit olan herhangi bir* $\{\Omega_t : t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ *ailesi Hele-Shaw akışının bir çözümdür.*

Kanıt 3.1.5. *Her* t *için* Ω_t*'nin* 0*'da logaritmik tekilliği olan Green fonksiyonu için* $g_t(z,0) \doteq p_t(z)$ *olmak üzere;* $p_{t|\partial\Omega_t} = 0$ *ve* $\Delta p_{t|\Omega_t} = -\delta_0$ *eşitliklerini sağlayan bir* p_t *fonksiyonu vardır ve*

$$\int_{\partial\Omega_t} \frac{\partial p_t}{\partial n} z^k \mathrm{d}s = \int_{\Omega_t} \Big(p_t \Delta(z^k) - z^k \Delta p_t\Big) \mathrm{d}A - \int_{\partial\Omega_t} p_t \frac{\partial z^k}{\partial n} \mathrm{d}s = 0$$

sağlar. Diğer yandan $k \geq 1$ *için*

$$0 = \frac{\mathrm{d}M_k}{\mathrm{d}t} = \int_{\partial\Omega_t} z^k \frac{1}{\kappa} V_n \mathrm{d}s$$

sağlanacağından

$$\int_{\partial\Omega_t} z^k \Big(\frac{1}{\kappa} V_n - \frac{\partial p_t}{\partial n}\Big) \mathrm{d}s = 0$$

olur. Böylece $\partial\Omega_t$ *üzerinde*

$$V_n = -\kappa \frac{\partial p_t}{\partial n}$$

de sağlandığından Ω_t *bir çözümdür.*

Böylece; basit bağlantılı bölgelerin düzgün ve artan bir ailesinin κ-geçirgenlikli bir Hele-Shaw'un çözümü olması ile t'ye göre sabit olan κ-yüksek momentlere sahip olması birbirine denktir.

3.1.2 Schwarz Fonksiyonları

Şimdi, Schwarz fonksiyonun varlığı ile κ geçirgenlikli bir Hele-Shaw akışının moment karakterizasyonunu yeniden ele alacağız.

Tanım 3.1.6. Ω, $\mathbb{C}$'de bir bölge ve ϕ; $\partial\Omega$'nın bazı komşulukları üzerinde tanımlanan kesin altharmonik, düzgün bir fonksiyon olsun. Ω üzerinde; $\partial\Omega$'ya sürekli genişleyen ve $\partial\Omega$'da

$$S(z) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(z)$$

eşitliğini sağlayan meromorfik bir S fonksiyonu varsa S'ye (Ω, ϕ) ikilisinin bir Schwarz fonksiyonu denir.

Örnek 15. *$\mathbb{C}$'nin bir quadrature bölgesi ile $\phi(z) = |z|^2$ fonksiyonu için bir Schwarz fonksiyonu vardır([GuA]; Teorem 3.7.1).*

Önerme 3.1.7. *ϕ, bir D bölgesinde düzgün ve kesin altharmonik bir fonksiyon olsun. $t \in (a, b)$ olmak üzere, sıfırı içeren Jordan bölgelerinin düzgün ve artan bir Ω_t ailesi için; $\partial\Omega_t \subset D$ sağladığını ve (Ω_t, ϕ) ikilisinin, basit kutbu sıfır hariç Ω_t'de holomorfik olan bir S_t Schwarz fonksiyonunun var olduğunu varsayarsak bir $s = s(t)$ parametrizasyonu ile Ω_s ailesi $\kappa = \frac{1}{\Delta\phi}$ geçirgenlikli Hele-Shaw akışının bir çözümüdür.*

Kanıt 3.1.8. *Sabitlenmiş bir $t_0 \in (a, b)$ için rastgele bir $t \in (t_0, b)$ alalım. $k > 0$ için*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_t \setminus \Omega_{t_0}} z^k \frac{1}{\kappa} \mathrm{d}A &= \int_{\Omega_t \setminus \Omega_{t_0}} z^k \Delta\phi \mathrm{d}A = -2i \int_{\Omega_t \setminus \Omega_{t_0}} z^k \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z} \partial z} \mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}z \\
&= -2i \int_{\Omega_t \setminus \Omega_{t_0}} z^k \Big\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Big(\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big) \mathrm{d}\bar{z} \Big\} \mathrm{d}z = -2i \int_{\Omega_t \setminus \Omega_{t_0}} z^k \mathrm{d}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big) \mathrm{d}z \\
&= -2i \int_{\Omega_t \setminus \Omega_{t_0}} z^k \mathrm{d}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial z} \mathrm{d}z \Big) = -2i \int_{\partial\Omega_t} z^k \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathrm{d}z + 2i \int_{\partial\Omega_{t_0}} z^k \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathrm{d}z \\
&= -2i \int_{\partial\Omega_t} z^k S_t \mathrm{d}z + 2i \int_{\partial\Omega_{t_0}} z^k S_{t_0} \mathrm{d}z = 4\pi Res\{z^k (S_t - S_{t_0}); z = 0\} = 0
\end{aligned}$$

olduğundan yüksek momentlerin korunduğunu söyleyebiliriz. O halde Teorem 3.1.4'ten Ω_t, uygun bir parametrizasyon ile, Hele-Shaw için bir çözüm olmuş olur.

Böylece, Schwarz fonksiyonunun varlığı ile bir Hele-Shaw akışının çözümü doğrudan elde edilebilir olur. Aslında burada önemli olan ϕ'nin seçimi olur çünkü uygun bir Ω_t ve ϕ ikilisi için uygun bir Schwarz fonksiyonunun var olması demek Ω_t'nin $\frac{1}{\Delta\phi}$ geçirgenlikli Hele Shaw probleminin çözümü olması demektir. Bu durumda da κ geirgenlikli Hele-Shaw'un çözümünün var olabilmesi için; pozitif, düzgün genel bir κ için, uygun bir potansiyel ϕ belirlemek durumundayız. *Peki herhangi bir κ için uygun bir Schwarz fonksiyonu var olacak şekilde bir potansiyel ϕ fonksiyonu var mıdır?*

Önerme 3.1.9. *Ω_0, sıfırı içeren düzgün bir Jordan bölgesi ve κ, $\mathbb{C}$ üzerinde düzgün, pozitif bir fonksiyon olsun. Ω_0'ın tümleyeninin bir U komşuluğu için; $\kappa'_{|U\setminus\Omega_0} = \kappa$ sağlayan bir $\kappa' \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ve $\Delta\phi = \frac{1}{\kappa'}$ sağlayan kesin altharmonik öyle bir $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ vardır ki (Ω_0, ϕ) ikilisinin basit kutbu sıfır hariç holomorfik olan bir S_0 Schwarz fonksiyonu vardır. Dahası, eğer κ reel analitik ve Ω_0 reel analitik sınıra sahipse $\kappa' = \kappa$ seçebiliriz.*

Önerme 3.1.9'un kanıtına geçmeden hemen önce kanıtta kullanacağımız bir formül verelim:

$\gamma \subset \mathbb{C}$ düzgün, kapalı bir kontür ve f, γ üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$g(z) \doteq \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

şeklindeki ifadelere Cauchy tipi integral denir[Gak]. γ'nın içerisinde kalan bölge Ω olmak üzere g fonksiyonu bize Ω ve $(\overline{\Omega})^c$'de birer holomorfik g^+ iç ve g^- dış fonksiyonu verir. g^+ ve g^- her zaman birbirlerinin analitik devamı olmayabilir fakat Sokhotski-Plemelj formülü ile bu iki holomorfik fonksiyonun γ üzerindeki ilişkilerini hesaplayabiliriz.

Lemma 1. *(Sokhotski-Plemelj Formülü; Sınıra Sıçrama Durumu). Ω düzgün sınıra sahip bir bölge ve f, $\partial\Omega$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere;*

Cauchy tipindeki

$$g(z) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi$$

integrali için g^+ ve g^- $\partial\Omega$'ya düzgünce genişler $\partial\Omega$ üzerinde

$$g^+ - g^- = f$$

sağlanır. Dahası, eğer Ω reel analitik bir sınıra sahipse g^+ ile g^- fonksiyonları $\partial\Omega$'ya holomorfik olarak genişler ve $g^+ - g^- = f$ holomorfik olur.

Bu teoremin kanıtı ve teorem ile ilişkili daha fazla bilgi için [Gak]'a bakılabilir. Şimdi, Önerme 3.1.9'un kanıtını verebiliriz:

Kanıt 3.1.10. *$\mathbb{C}$ üzerinde pozitif ve düzgün bir κ fonksiyonu verilmiş olsun. $\Delta\phi_0 = \frac{1}{\kappa}$ sağlayan bir $\phi_0 \in \mathcal{C}^\infty$ seçerek sabitleyelim.*

$$g(z) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega_0} \frac{\frac{\partial\phi_0}{\partial z}(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi$$

Cauchy integralinin ürettiği fonksiyonlara, g'nin Ω_0'a ve $(\overline{\Omega}_0)^c$'a kısıtlanışları, g_+ ve g_- dersek Sokhotski-Plemelj formülünden $z \in \partial\Omega_0$ için

$$g_+(z) - g_-(z) = \frac{\partial\phi_0}{\partial z}(z)$$

sağlanır. $z \to \infty$ iken $g_-(z) \to 0$ ve g_-, $(\overline{\Omega}_0)^c$'de holomorfik olduğundan bazı a_i sabitleri için

$$g_-(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{z} + \dots$$

olur.

$$\widehat{g}(z) = g_-(z) - \frac{a_1}{z}$$

için $\widehat{g}$, $(\overline{\Omega}_0)^c$'de holomorfik olduğundan bir $\frac{\partial}{\partial z}$-primitifi vardır: G. Böylece, $\partial\Omega_0$

üzerinde

$$g_+(z) - \frac{a_1}{z} = \frac{\partial \phi_0}{\partial z} + \widehat{g} = \frac{\partial \phi_0}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial \phi_0}{\partial z} + \frac{\partial 2Re(G)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\phi_0 + 2Re(G))$$

sağlanır. $(\overline{\Omega}_0)^c$ *üzerinde*

$$\phi \doteq \phi_0 + 2Re(G)$$

olarak seçersek Δ *lineer ve* $Re(G)$ *harmonik olduğundan* $\Delta\phi = \Delta\phi_0 = \frac{1}{\kappa} > 0$ *sağlanır. Dahası;* g_-, $\partial\Omega_0$*'a düzgün genişlediğinden* ϕ *de* ${\Omega_0}^c$*'nin bir* U *komşuluğuna düzgünce genişler. Böylece, rastgele verilen düzgün bir Jordan bölgesi ve bir düzgün* $\kappa > 0$ *için bölgenin tümleyeninde tanımlı kesin altharmonik bir* ϕ *fonksiyonu bulunmuş olur.* $\kappa'_{|U \setminus \Omega_0} = \frac{1}{\Delta\phi}_{|U \setminus \Omega_0} = \kappa$ *sağlanacak şekilde,* U *üzerinde* $\kappa' \doteq \frac{1}{\Delta\phi}$ *tanımlayabiliriz. Sonuç olarak; sıfırda basit kutbu olan* $g_+(z) - \frac{a_1}{z}$ *fonksiyonu* $\Omega_0 \setminus \{0\}$ *üzerinde holomorfiktir ve sürekli şekilde* $\partial\Omega_0$*'na genişleyerek* $\partial\Omega_0$ *üzerinde* $\frac{\partial\phi}{\partial z} = g_+(z) - \frac{a_1}{z}$ *sağlayacağından*

$$S_0(z) \doteq g_+(z) - \frac{a_1}{z}$$

fonksiyonu (Ω_0, ϕ) *ikilisi için istenildiği gibi bir Schwarz fonksiyonu olmuş olur. Eğer* κ *reel analitik ve* Ω_0 *da reel analitik bir sınıra sahipse;* g_-, $\partial\Omega_0$*'ın bir* U *komşuluğunda bir holomorfik fonksiyona ve* $2Re(G)$ *da sınır üzerinde bir harmonik fonksiyona genişler. Böylece* U *üzerinde* ϕ *yukarıdaki gibi tanımlanırsa* U *üzerinde de* $\Delta\phi = \frac{1}{\kappa}$ *sağlanmış olur. Yani* U *üzerinde* $\kappa' = \kappa$ *olur.*

Böylece bir Ω bölgesi ve düzgün bir $\kappa > 0$ fonksiyonu verildiğinde; κ'nın, $\partial\Omega$'nın bir komşulu üzerindeki herhangi potansiyeli ϕ için (Ω, ϕ) ikilisinin her zaman bir Schwarz fonksiyonu olmayabilir ama sınırın, hatta Ω^c'nin, bir U komşuluğunda tanımlı öyle bir ϕ potansiyeli vardır ki; $U - \Omega$'da $\kappa = 1/\Delta\phi$ eşitliği sağlanır ve (S, ϕ) ikilisinin 0-basit kutbu hariç holomorfik bir Schwarz fonksiyonu vardır.

3.1.3 Holomorfik Diskler

Önerme 3.1.9 ile sıfırı içeren bir düzgün Jordan bölgesi Ω_0 için; (Ω_0, ϕ) ikilisinin sıfır hariç holomorfik olan bir Schwarz fonksiyonu S_0 var olacak şekilde, Ω_0'nın tümleyeninin bir komşuluğunda kesin altharmonik uygun bir ϕ fonksiyonu alalım.

$\mathbb{C}$ üzerinde sıfır basit kutbu hariç holomorfik olan bir Schwarz fonksiyonu S'nin grafiği $(z, S(z))$, $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$ üzerinde bir holomorfik eşleme olarak görülebilir([Ste]; Bölüm 3, Teorem 1.2).

Tanım 3.1.11. Diyelim ki S; basit kutbu sıfır hariç holomorfik olan, (Ω, ϕ) ikilisinin Schwarz fonksiyonu olsun. Böylece, holomorfik olacak olan $S : \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^1$ fonksiyonunun grafiği olarak tanımlanan

$$\Sigma = \Sigma_\Omega \doteq \Big\{ \big(z, S(z)\big) : z \in \Omega \Big\} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$$

eşlemesi için Σ_Ω, $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$'ya bir holomorfik disk denir. Dahası, bu holomorfik disk şunları sağlar:

(i) Σ'nın sınırı için

$$\Big\{ \Big(z, \frac{\partial \phi}{\partial z}\Big) : z \in \partial\Omega \Big\} \subseteq \Big\{ \Big(z, \frac{\partial \phi}{\partial z}\Big) : z \in U \Big\} \doteq \Lambda \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

olur.

(ii) Σ'nın kapanışı ile $\{0\} \times \mathbb{CP}^1$ yalnızca $(0, \infty)$ noktasında kesişir.

(iii) π_1, ilk faktöre göre bir projeksiyon olmak üzere $\pi_1 : \Sigma \to \pi_1(\Sigma)$ eşlemesi bir izomorfizmdir.

Teorem 3.1.12. *Σ_t; yukarıdaki üç durumu sağlayan, $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$ üzerindeki holomorfik disklerin rastgele düzgün bir ailesi olsun. $\pi_1(\Sigma_t) \doteq \Omega_t$, düzgün Jordan* *bölgelerinin artan bir ailesi ise* Ω_t, $\kappa' \doteq \frac{1}{\Delta\phi}$ *geçirgenlikli Hele-Shaw akışının bir çözümüdür. Dahası,* κ' *geçirgenlikli Hele-Shaw akışını çözen düzgün Jordan bölgelerinin artan herhangi bir düzgün* Ω_t *ailesi bu şekilde elde edilebilir.*

Kanıt 3.1.13. *Öncelikle, böyle verilen bir* Σ_t, Ω_t*'nin Schwarz fonksiyonu* S_t*'nin bir grafiği olarak düşünülebilir ve holomorfik disk tanımından* $S_{t|\Omega_t}$ *de* 0 *basit kutbu haricinde holomorfik bir fonksiyondur. Böylece her* (Ω_t, ϕ) *ikilisinin* $\Omega_t \setminus \{0\}$*'da holomorfik bir Schwarz fonksiyonu var olduğundan Önerme 3.1.7 gereğince* Ω_t*'nin bir çözüm olduğunu söyleyebiliriz. Diğer taraftan* Ω_t *düzgün, Jordan bölgelerinin düzgün artan bir ailesi olmak üzere diyelim ki* κ' *geçirgenlikli Hele-Shaw akışı için bir çözüm olsun.* $p_t(z) = p(z,t)$ *de* $p_{t|\partial\Omega_t} = 0$ *ve* $\Delta p_{t|\Omega_t} = -\delta_0$ *eşitliklerini sağlayan basınç fonksiyonu olsun. Her klasik çözüm, bir zayıf çözüm olacağından zayıf çözümü belirleyen*

$$u_{|\mathbb{C}} \geq 0$$

$$u_{\Omega_t{}^c} = 0$$

$$\Delta u = (\kappa')^{-1}(\chi_{\Omega_t} - \chi_{\Omega_0}) - t\delta_0$$

durumlarını sağlayan potansiyel u *fonksiyonu*

$$u_t(z) = u(z,t) = \int_0^t p_{\Omega_\tau}(z)\mathrm{d}\tau$$

olarak hesaplanabilir ve böylece

$$S_t = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial u_t}{\partial z} - \chi_{\Omega_0}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial z} - S_0\Big)$$

olarak kurulan S_t *fonksiyonu;* 0*'da basit kutbu olan ve*

$$\frac{\partial S_t}{\partial \bar{z}}_{|\Omega_t - \Omega_0} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big(\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\big) = \Delta\phi - \Delta u = \Delta\phi - \Delta\phi + t\delta_0 = 0$$

ile

$$\frac{\partial S_t}{\partial \overline{z}}_{|_{\Omega_0-\{0\}}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\big(S_0 - \frac{\partial u}{\partial z}\big) = \frac{\partial S_0}{\partial \overline{z}} - \Delta\phi = 0$$

eşitliklerinden de $\Omega_t \setminus \{0\}$ üzerinde holomorfik olan bir fonksiyondur. Böylece S_t; Ω_t'nin, 0'da basit kutbu hariç Ω_t üzerinde holomorfik olan bir Schwarz fonksiyonu olmuş olur ve düzgün bir holomorfik disk ailesi olan $\Sigma_t = \{(z, S_t(z)) : z \in \Omega_t\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$'nin projeksiyonundan Ω_t elde edilebilir olur.

Sonuç olarak bir $\Omega_t \subset \mathbb{C}$ ailesinin $1/\Delta\phi$-geçirgenlikli bir Hele-Shaw'un çözümü olması ile; $\mathbb{C}$'ye projeksiyonunun görüntüsü Ω_t olan, sınırı Λ tarafından içerilen ve kapanışı $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$'la yalnızca $(0, \infty)$ noktasında kesişen $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$ üzerindeki bir holomorfik disk ailesi Σ_t için Ω_t'nin Σ_t'nin var olması durumları birbirine denk olur.

3.2 HMAE ve Holomorfik Diskler

Burada, serbest bir sınır değeri ile verilmiş HMAE'nin regüler bir çözümünü ile ilgileneceğiz:

Problem 3.2.1. *$\{\omega_{FS} + dd^c F_\tau\}_{\tau \in S^1}$, $\mathbb{CP}^1$ üzerinde bir Kähler form ailesi olacak şekilde verilen bir $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{CP}^1 \times S^1, \mathbb{R})$ için F'nin $(\mathbb{CP}^1 \times D, \pi^*_{\mathbb{CP}^1}\omega_{FS})$ üzerine;*

(i) $\{\omega_{FS} + dd^c \Phi_\tau\}_{\tau \in D}$, $\mathbb{CP}^1$ üzerinde bir Kähler form ailesi

(ii) $(\pi^*_{\mathbb{CP}^1}\omega_{FS} + dd^c\Phi)^2_{|_{\mathbb{CP}^1 \times D}} = 0$

olacak şekilde düzgün bir genişlemesi var mıdır?

Bu problemin çok daha genel bir halinin çözümü için [Don]'da holomorfik diskler ile simplektik yapılar üzerinden yapılmış alternatif bir yorum vardır. Diğer yandan problemin bu hali için belirli bir çözüm de kompleks analizden yapılabilir.

Bu kısımda; çözüme dair iki durumdan da bahsedeceğiz.

Problem 3.2.1'in holomorfik diskler ile karakterizasyonu: Bu alternatif yorumu vermeden önce gerekli birkaç yapıdan bahsedelim.

Tanım 3.2.2. M bir kompleks manifold ve Θ, M üzerinde bir holomorfik bir 2-form olsun. Θ_1 ve Θ_2 birer simplektik form, yani kapalı ve dejenere olmayan birer reel 2-form[Sil], olmak üzere; eğer $\Theta = \Theta_1 + i\Theta_2$ olarak yazılabiliyorsa Θ'ya bir kompleks simplektik form ve (M, Θ) ikilisine de bir kompleks simplektik manifold denir. Kompleks simplektik manifold M'nin herhangi bir reel Y altmanifoldu için; eğer her $i : Y \hookrightarrow M$ ile $(Y, i^*\Theta_2)$ bir simplektik manifold ve $i^*\Theta_1 = 0$ sağlanıyorsa Y altmanifolduna bir LS-altmanifold denir[Don],[Sil].

Tanım 3.2.3. X, M ve A birer kompleks analitik manifold ve $\pi : M \to X$ bir holomorfik eşleme olmak üzere; X'in herhangi bir açık kümesi U için $\pi^{-1}(U) = M_{|_U} \subset M$ ile $U \times A$ biholomorfik iseler M'ye X üzerinde bir holomorfik lif demeti denir. Yani, X üzerindeki bir holomorfik lif demetini lokal olarak $X \times A$'ya denk olarak görebiliriz.

Örnek 16. *X, herhangi bir U açık kümesi üzerinde $(z_1, \ldots, z_n)$ kooordinatlarına sahip kompleks analitik bir manifold olmak üzere X'in kompleks kotanjant demetinin $(1,0)$-kısmı $(T_{1,0}U)^* = \{(p, \epsilon) : p \in U, \epsilon \in \langle z_i \rangle\} = X \times \langle z_i \rangle$ olarak görülebileceğinden $(T_{1,0}X)^*$, X üzerinde trivial olarak bir holomorfik lif demetidir. Ayrıca, kısa bir hesap ile herhangi holomorfik $\Theta \in (T_{1,0}X)^*$ bir kompleks simplektik form olacağından $(T_{1,0}X)^*$'nın kompleks simplektik bir manifold olduğunu söyleyebiliriz.*

Önerme 3.2.4. *$(\mathbb{CP}^1, \omega_{FS})$ kompakt Kähler manifoldu üzerinde, ω_{FS} ile aynı sınıftaki Kähler formları belirli LS-altmanifoldlarına eşleyen ve kompleks simplektik bir yapıya sahip holomorfik bir lif demeti $\mathcal{W}$ vardır[Don].*

$\mathcal{W}$'i lokal olarak X'in kompleks kotanjant demetinin $(1,0)$ kısmı olarak görebiliriz. Ayrıca π ile yapılan eşlemeyi lokal olarak şu şekilde hesaplayabiliriz: $U, V \subset \mathbb{CP}^1$, birer açık top olsun ve $\omega_{FS|_U} = dd^c\phi_U, \omega_{FS|_V} = dd^c\phi_V$ sağlansın. U üzerindeki herhangi bir Kähler form $\omega_{FS} + dd^c\phi$ için $\partial(\phi_U + \phi)$'nin grafiği $\mathcal{W}_U$'nun bir LS-altmanifoldudur ve $U \cap V$ üzerindeki geçiş fonksiyonları da $\partial(\phi_V - \phi_U)$ ile verilir.

Şimdi problemin holomorfik diskleri içeren alternatif yorumunu verebiliriz:

Teorem 3.2.5. *([Don]; $\mathbb{CP}^1$ için Teorem 3) $\{\omega_{FS} + dd^cF_\theta\}_{\theta \in S^1}$, $\mathbb{CP}^1$ üzerinde bir Kähler form ailesi olacak şekilde bir $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{CP}^1 \times S^1, \mathbb{R})$ verilmiş olsun ve herhangi $\omega_{FS} + dd^cF_\theta$'nın $\pi : \mathcal{W} \to \mathbb{CP}^1$ altında karşılık geldiği LS-altmanifold Λ_θ ile gösterilsin. Sınır değeri F tarafından belirlenen Problem 3.2.1'in bir çözümünün olması için gerek ve yeter koşul*

(1) Her $z \in \mathbb{CP}^1$ için $\pi(g_z(0)) = z$

(2) Her $z \in \mathbb{CP}^1$ için $g_z(\theta) \in \Lambda_\theta$

(3) Her $\tau \in D$ için $z \mapsto \pi(g_z(\tau))$; $\mathbb{CP}^1$'den $\mathbb{CP}^1$'e bir difeomorfizm

olacak şekilde bir $(g_z : D \to \mathcal{W})_{z \in \mathbb{CP}^1}$ holomorfik disk ailesinin var olmasıdır. Dahası, her $\tau \in D$ için $z \mapsto g_z(\tau)$'nun görüntüsü $\omega_{FS} + dd^c\Phi_\tau$ ile eşlenen LS-altmanifold Λ_τ'dur.

Problem 3.2.1'in özel bir çözümünün varlığı: Genel bir yol ile $\mathbb{C} \hookrightarrow (\mathbb{CP}^1, \omega_{FS})$ olarak düşünelim ve $\mathbb{C}^2$ üzerine bir $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ etkisi tanımlayalım:

$$\rho(\lambda)(z, w) = (\lambda z, \lambda^{-1} w).$$

$\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olarak düşünülebileceğinden ρ'yu S^1'in $\mathbb{CP}^1 \times S^1$ üzerine etkisi olarak da düşünebiliriz.

Şimdi, kesin altharmonik herhangi bir $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ fonksiyonu $\mathbb{CP}^1 \times D$ üzerinde bir çözüme sahip olan sınır koşuluyla verilmiş HMAE ile ilişkilendireceğiz.

Ama ondan hemen önce rastgele alınan bir ϕ'nin istenilen kadar yakınında S^1-invaryant başka bir potansiyelin olduğunu söyleyen bir önerme verelim:

Önerme 3.2.6. *D üzerinde $|z|^2$'ye eşit ve $|z| \to \infty$ iken $\psi - \log(1+|z|^2)$ düzgün bir fonksiyona genişleyecek şelkilde; $\mathbb{C}$ üzerinde S^1-invaryant, düzgün ve kesin altharmonik bir ψ fonksiyonu alalım. Her $\varepsilon > 0$ için*

(i) $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *topu üzerinde* $\phi_\varepsilon = (1-\delta_1)(|z|^2 + o(|z|^2)) - \delta_2$

(ii) $|z| > 1$ *için* $\phi_\varepsilon = \psi$

(iii) $||\phi_\varepsilon - \psi||_{\mathcal{C}^2} < \varepsilon$

sağlayan düzgün, kesin altharmonik bir ϕ_ε fonksiyonu ve $\delta_1, \delta_2, r > 0$ değerleri vardır[NyR14].

Teorem 3.2.7. *ϕ düzgün ve kesin altharmonik bir fonksiyon olmak üzere; problemin bir çözümü var ve $(z,\theta) \in B_r(0) \times S^1$ için $\omega_{FS} + i\partial\overline{\partial}\tilde{F}_\theta$'nin lokal potansiyeli $c\phi(\theta z)$ olacak şekilde sınır koşulunu belirleyen, S^1-etki ρ altında invaryant bir $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{CP}^1 \times S^1)$ fonksiyonu ile $c, r \in \mathbb{R}_{>0}$ değerleri vardır[NyR14].*

Kanıt 3.2.8. *Önerme 3.2.6'daki ψ için $\mathbb{CP}^1$ üzerinde bir $F_0(z,\theta) = \psi(z) - \phi_{FS}(z)$ tanımlayalım. Sınır değerleri F_0 tarafından belirlenen problemin, yani sınır değerlerleri $\{dd^c\psi\}$ olan HMAE'nin, bir trivial çözümü vardır. İstenildiği kadar küçük bir $\varepsilon > 0$ için Önerme 3.2.6'daki değerler ile $F(z,\theta) = \phi_\varepsilon(\theta z) - \phi_{FS}(z)$ kurabiliriz ve $||F - F_0||_{\mathcal{C}^2} < \varepsilon$ sağlanacağından Teorem 2.1.9 gereğince F için problemin bir çözümü vardır. Ayrıca düzgün ve kesin altharmonik bir ϕ, lokal olarak $\phi(z) = |z|^2 + o(|z|^2)$ yazılabileceğinden birim top üzerinde $\phi_\varepsilon = (1-\delta_1)\phi - \delta_2$ sağlanır. Böylece $c = 1-\delta_1$ ve $(z,\theta) \in B_r(0) \times S^1$ için $\omega_{FS} + dd^cF_\theta = dd^c(c\phi(\theta z))$ sağlanır.*

3.3 Başlangıç Koşulu Olmayan Hele-Shaw Akışının Kısa Süreli Varlığı

Teorem 3.3.1. *Bir pozitif ve düzgün κ fonksiyonu için ;*

$$Alan(\Omega_t) = t; \quad 0 < t < \epsilon$$

sağlayan bir $\epsilon > 0$ değeri ve κ geçirgenlikli Hele-Shaw akışını sağlayan bir $\mathbb{C} \supset \Omega_t \xrightarrow[t\to 0]{} \{0\}$ ailesi vardır.

Kanıt 3.3.2. *Rastgele, pozitif bir $\kappa \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ verilmiş olsun. $\phi - \phi_{FS}$, $\mathbb{CP}^1$ üzerine düzgün bir fonksiyon olarak genişleyecek şekilde $\Delta\phi_{|\mathbb{C}} = 1/\kappa$ sağlayan bir potansiyel ϕ fonksiyonu ve bu potansiyele uygun olarak problem 3.2.1'in bir Φ regüler çözümü var olacak şekilde; her $\theta \in S^1$ için $dd^c(c\phi(\theta z))_{|B_r(0)} = \omega_{FS} + dd^c F_\theta$ sağlayan, S^1-etki ρ-altında invaryant bir sınır koşulu $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{CP}^1 \times S^1)$ ile $c, r \in \mathbb{R}_{>0}$ değerleri sabitlensin. Sınır değeri F tarafından belirlenen problem için Teorem 3.2.5'deki $(1), (2), (3)$'ü sağlayan holomorfik disklerin düzgün bir ailesi olarak bir $(g_z)_{z\in\mathbb{CP}^1}$ alalım.*

Φ regüler bir çözüm olduğundan $0 \in D$ için $\omega_{FS} + dd^c\Phi_0 > 0$ ve $\Phi(z, 0) = \Phi_0(z) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{CP}^1 \times \{0\})$ olacağından $log(1 + |z|^2) + \Phi_0$'ın $\mathbb{P}^1$ üzerinde kesin altharmonik, düzgün bir fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz ve eğer bir $z \neq 0$ için $\partial(\phi_{FS} + \Phi_0)(z) = 0$ sağlanırsa $\Delta(\phi_{FS} + \Phi_0)_{|\mathbb{CP}^1} \not> 0$ olacağından her $z \neq 0$ için $\partial(\phi_{FS} + \Phi_0)(z) \neq 0$ eşitsizliği sağlanır. Φ_0, $\mathbb{CP}^1$ üzerinde S^1-invaryant bir fonksiyon olacağından $\Phi_0(z) = \Phi_0(|z|)$ sağlanır ve $\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}(z) = \frac{\partial\Phi_0(|z|)}{\partial z} = \overline{z}\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}(|z|)$ olacağından $\partial(\phi_{FS} + \Phi_0)(0) = 0$ olur. Böylece, her z için

$$g_z(0) \in \tilde{\Lambda}_0 \sim \omega_{FS} + dd^c\Phi_0$$

olduğundan da $g_0(0) = 0$ ve $z \neq 0$ için de $g_z(0)$'ın ikinci koordinatı sıfırdan farklıdır.

$\mathcal{W}$ üzerindeki holomorfik disklerin $(g_z)_{z\in\mathbb{CP}^1}$ ailesinin sürekliliğinden; $\mathcal{W}_{\mathbb{C}}$, π altında $\mathcal{W}$'nın bir açık kümesi olmak üzere yeteri kadar küçük $|z| \neq 0$ değerleri için $img_z \subset \mathcal{W}_{\mathbb{C}}$ durumu sağlanır. $\mathcal{W}_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$'nin kompleks kotanjant demetinin $(1,0)$'lık kısmı ile denk olacağndan $\mathcal{W}_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^2$ olarak hesalanabilir ve böylece bir $\tilde{\tilde{\varepsilon}} > 0$ değeri; $0 < |z| < \tilde{\tilde{\varepsilon}}$ sağlayan z değerleri için

$$img_z \subset \mathbb{C}^2$$

durumunu sağlar. Böylece, $\mathcal{W}$ üzerindeki g_z holomorfik disklerinin ailesi ile $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$ üzerinde bir holomorfik disk ailesi kurabiliriz:

z, $0 < |z| < \tilde{\tilde{\varepsilon}}$ sağlayan bir değer olmak üzere

$$f_z : D^{\times} \to \mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$$

$$\tau \mapsto \rho(\tau) g_z(\tau)$$

fonksiyonu D üzerine genişleyebilir ve $\theta \in S^1$ ve $\tau \in D$ için $f_{\theta z}(\tau) = f_z(\theta\tau)$ olacağından f_z holomorfik diskinin yalnızca $|z|$'ye bağlı olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi, $|z| = t$ için $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$ üzerindeki bu holomorfik diske Σ_t diyelim. Böylece; $\left(\Sigma_t\right)_{t\in(0,\tilde{\tilde{\varepsilon}})}$, $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$ üzerindeki bu holomorfik disklerin düzgün bir ailesi olmuş olur ve şu durumlar sağlanır:

(i) Her $\theta \in S^1$ için $\Sigma_t(\theta) = \rho(\theta) g_t(\theta) = g_{\theta t}(1) \in \tilde{\Lambda}_1$ ve yeterince küçük bir t için, $g_{t\theta}$'nin görüntüsü $B_r(0) \times \mathbb{C}$'de olacağından bir $\tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\tilde{\varepsilon}}$ için her $t \in (0, \tilde{\varepsilon})$ değeri $g_{\theta t}(1) \in B_r(0) \times \mathbb{C}$ durumunu sağlar. Böylece $t \in (0, \tilde{\varepsilon})$ ve $\theta \in S^1$ için

$$\Sigma_t(\theta) \in \tilde{\Lambda}_1 \cup (B_r(0) \times \mathbb{C}) = \left\{ \left(z, c\frac{\partial\phi}{\partial z}(z)\right) : z \in B_r(0) \right\}$$

$$\subset \left\{ \left(z, c\frac{\partial\phi}{\partial z}(z)\right) \right\} \doteq \Lambda$$

içermesi sağlanır.

(ii) $\{0\} \times \mathbb{CP}^1$ *ile* $\overline{\Sigma}_t = \Sigma_t[D]$ *ta olarak* $(0, \infty)$ *noktasında kesişir.*

(iii) π *holomorfik lif demeti için* $\pi : \Sigma_t \to \pi(\Sigma_t)$ *bir izomorfizmadır.*

$\mathbb{CP}^1$ *üzerindeki* $\gamma(z) \doteq \pi g_z(1)$ *difeomorfizması ve* $0 < |z| < \tilde{\varepsilon}$ *sağlayan bir* z *değeri için* $\{\gamma(\theta z) : \theta \in S^1\} = \{\pi f_z(\theta) : \theta \in S^1\}$*;* $\pi\Sigma_{|z|}$*'nin sınırıdır ve* γ *bir difeomorfizm olduğundan* γ*'nın,* $|z| = t$ *yarıçaplı çemberinin altındaki görüntüsü* $\mathbb{C}$*'de basit ve kapalı düzgün bir eğri, düzgün Jordan eğrisi, olur. Böylece;* $t = |z|$ *için*

$$\partial\Omega_t = \{\gamma(\theta z) : \theta \in S^1\}$$

düzgün Jordan eğrilerinin belirlediği bölgelerin ailesi $\{\Omega_t\}_{t \in (0,\tilde{\varepsilon})}$*, düzgün Jordan bölgelerinin artan, orijini içeren ve* $t \to 0$ *iken* $\Omega_t \to \{0\}$ *sağlayan bir ailesi olmuş olur. Böylelikle* $\Omega_t = \{\gamma(\tau z) : \tau \in D\} = \{\pi f_z(\tau) : \tau \in D\} = \pi\Sigma_t$ *ailesi; Teorem 3.1.12 ile* $1/(c\Delta\phi)$ *geçirgenlikle Hele-Shaw akışı için bir çözümdür. Kompleks momentlere göre Hele-Shaw akışı için çözüm, geçirgenliğe göre homojendir; yani bir* $c \in \mathbb{R}_{>0}$ *için* κ *geçirgenliği* $c\kappa$ *ile değiştiğinde çözüm, zamanın yeniden parametrize edilmesi ile sabit kalır. Sonuç olarak* $\varepsilon = c^{-1}\tilde{\varepsilon}$ *için* $\{\Omega_t\}_{t \in (0,\epsilon)}$ *ailesi,* κ *geçirgenlikli Hele-Shaw akışının çözümü olmuş olur ve*

$$Alan(\Omega_t) = Alan(\Omega_0) + t; t \in (0, \varepsilon)$$

sağlanır.

3.4 Ek

Zayıf Hele-Shaw Akışı ve HMAE:

Pozitif bir κ geçirgenliği ve açık, sınırlı bir Ω_0 başlangıç bölgesi için; Hele-Shaw akışının zayıf çözümünün;

$$\Delta u_t = \kappa^{-1}(\chi_{\tilde{\Omega}_t} - \chi_{\tilde{\Omega}_0}), \quad u_{|\mathbb{C}} \geq 0, \quad u_{|\tilde{\Omega}_t^c} = 0$$

durumlarını sağlayan tek türlü bir $u = u(z,t)$ ile tek türlü bir şekilde

$$\tilde{\Omega}_t = \{z \in \mathbb{C} : u_t(z) > 0\} \cup \tilde{\Omega}_{t_0}$$

olarak yazılabileceğini söyleyebiliriz[Gus].

Tanım 3.4.1. X bir Riemann yüzeyi ve ω, X üzerinde bir Kähler form olmak üzere; bir $\psi \in \mathrm{PSH}(X,\omega) = \mathrm{Sh}(X,\omega)$ için

$$v_{z_o}(\psi) \doteq \sup\{c \geq 0 : \psi \leq c\ln|z - z_0|^2 + \mathcal{O}(1)\}$$

değerine ψ'nin z_0'daki Lelong sayısı denir.

Şimdi, $t \in \mathbb{R}$ için

$$\psi_t \doteq \sup\{\psi \in \mathrm{Sh}(X,\omega) : \psi \leq 0, v_{z_o}(\psi) \geq t\}$$

olmak üzere

$$\Omega_t \doteq \{z \in X : \psi_t(z) < 0\}$$

olarak tanımlansın. Göreli kompakt her $S \subset X$ üzerindeki ω'ya göre ψ_t ile Ω_t tek türlüdür ve Ω_t; $\omega_{\psi_t} = (1 - \chi_{\Omega_t})\omega + t\delta_{z_0}$ eşitliğini sağlayan, $t > 0$ için z_0'ı içeren açık, bağlantılı bir bölgedir[NyR18]. Böylece; $\mathbb{C}$ üzerinde, $\psi = -u_t$ olmak üzere $\{\Omega_t\}_{t\in(0,t_0)}$ ailesi zayıf Hele-Shaw akışını verir. Ω_t'ye, ω-Kähler formuna göre zayıf Hele-Shaw akışı ve ψ_t'ye de Ω'ya göre Hele-Shaw zarfı denir.

ω, X üzerinde bir Kähler form olmak üzere $\pi_X : X \times D \to X$ için

$$\tilde{\Phi} \doteq \{\Psi \in \mathrm{PSH}(X \times D, \pi_X^*\omega) : \mathrm{limsup}_{X\times S^1}\Psi \leq 0, v_{(z_0,0)}(\Psi) \geq 1\}$$

tanımlayalım. (Burada τ, D'nin ve z, X'nin koordinatı olmak üzere $v_{(z_0,0)}(\Psi) \geq 1$; her $c < 1$ için $(z_0, 0)$'ın etrafında $\Psi(z,\tau) \leq c\ln(|z-z_0|^2 + |\tau|^2) + \mathcal{O}(1)$ eşitsizliğinin sağlanması anlamına gelir.) $\tilde{\Psi}$, $X \times D - \{(z_0, 0)\}$ üzerinde sınırda $\lim_{|\tau|\to 1}\tilde{\Phi}(z,\tau) = 1$ sağlayan HMAE'nin (zayıf)çözümüdür[[NyR18]; Önerme 6.2] ve ω için Hele-Shaw zarfları ile arasında

$$\psi_t(z) = \inf_{|\tau|>0}\{\tilde{\Phi}(z,\tau) - (1-t)\ln|\tau|^2\},$$

$$\tilde{\Phi}(z,\tau) = \sup_t\{\psi_t(z) + (1-t)\ln|\tau|^2\}$$

ilişkisi vardır[[NyR18]; Teorem 6.3]. Böylece düzgünlük şartı ortadan kaldırıldığında da; HMAE ve Hele-Shaw arasında bir duallikten söz edebiliriz.

HMAE ve Hele-Shaw dualliğine uygun bir örneğe değinelim:

Örnek 17. *$X = \mathbb{CP}^1$ olsun.*

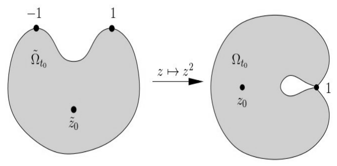
Ω_t, X üzerinde bir Hele-Shaw akışı olmak üzere bir $p \in \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}^1$ için;

(i) $t < t_0$ için Ω_t sınırlı, basit bağlantılı ve düzgün bir aile

(ii) Ω_{t_0}, $\mathbb{C}$'de basit bağlantılı ve $\partial\Omega_{t_0}$, kendini tam olarak p noktasında teğetsel olarak kesen bir eğrinin görüntüsü

olacak şekilde eğer bir $t_0 > 0$ varsa Ω_t'ye p noktasında kendine-teğet gelişen Hele-Shaw akışı denir.

Örneğin: Sabirlenmiş bir t_0 için $\tilde{\Omega}_{t_0}$; analitik sınıra sahip olan, $-i$ noktasını içeren ve $z \to -\overline{z}$ altında simetrik olan bir bölge ve $\tilde{\omega} = i|z|^2 dz d\overline{z}$ olsun. Analitik ikili için klasik Hele-Shaw var olacağından bir $[t_0 - \delta, t_0 + \delta_0]$ aralığında Hele-Shaw'un çözümü var olacak şekilde bir $\delta > 0$ değeri vardır. $f(z) = z^2$ elemesi ile $\tilde{\omega}$'nın geri görüntüsü $\omega = dd^c|z|^2$ olur ve $t \in [t_0 - \delta, t_0]$ için $\Omega_t \doteq f(\tilde{\Omega}_t)$ bölgeleri ω'ya göre bir Hele-Shaw akıştır ve $p = 1$ noktasında kendine teğet olur.



Bir ω'ya göre Hele-Shaw akışı; bir p noktasında kendine-teğet olarak gelişiyorsa HMAE'nin çözümü olan $\tilde{\Phi}$, $\{p\} \times S^1$ üzerinde iki kez türevlenemez[[NyR18]; Teorem 9.2].

Bu konu ile ilgili ayrıntılı bilgi okumak ve ilgili teoremleri görebilmek için [NyR18], [NyR] ve [NyR15]'e bakılabilir.

Bölüm 4

Ters Potansiyel Problemi

Potansiyel teoride genel olarak; ρ, bir yoğunluk fonksiyonu ve μ, bir ölçü olmak üzere

$$u^{\rho}(z) = \int K(z,w)\rho(w)dA(w)$$

ile

$$u^{\mu}(z) = \int K(z,w)d\mu(w)$$

fonksiyonlarına sırasıyla ρ'nun ile μ'nün bir K çekirdeğine göre potansiyeli denir[Isa]. Potansiyel teorinin ters problemi ise verilmiş bir potansiyelin ölçüsünü veya bölgesini araştırır.

Özel olarak; bir Ω bölgesi ve $\mathbb{C}$ üzerindeki bir yoğunluk fonksiyonu ρ için

$$U^{\Omega}(z) = U^{\Omega,\rho}(z) \doteq \int_{\Omega} \log|z-w|\rho(w)dA(w)$$

fonksiyonuna Ω bölgesinin logaritmik potansiyeli denir ve bölgenin potansiyeli U, bölgenin tümleyeni üzerinde harmonik; tüm düzlem boyunca da altharmonik bir fonksiyondur. Böylece, bir bölgenin logaritmik potansiyeli anlamında ters potansiyel problemi; *sınırlı, basit-bağlantılı bir E bölgesi ve bir ρ yoğunluğu için $(\overline{E})^c$ üzerinde, $z \to \infty$ durumunda uygun şekilde büyüyen bir u harmonik* *fonksiyonu verildiğinde; u fonksiyonunun basit-bağlantılı bir $\Omega \subset E$ bölgesinin ρ'ya göre potansiyeli olup olamayacağını, $u = U^{\Omega,\rho}$, ve eğer bir çözüm varsa bu çözümün tek türlü olup olamayacağını araştırır*[[Che]; Problem 1].

Eğer Ω problemin bir çözümü ise, yani bir Ω için $u = U^{\Omega}$ sağlanıyorsa;

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int_{\Omega} \log|z-w|\rho(w)dA(w) = -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{1}{z-w}\rho(w)dA(w)$$

eşitliği sağlanır ve $|z| > \text{maks}_{w\in\overline{\Omega}}|w|$ sağlayan $z \in \mathbb{C}$ değerleri için de

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z}\Big(1-\frac{w}{z}\Big)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{z^{k+1}}$$

eşitliği gerçekleneceğinden

$$a_k = \int_{\Omega} w^k \rho(w)dA(w)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-(k+1)}$$

olarak hesaplanır. Böylece; $u_{z|_{\Omega^c}}$'nin kuvvet serisinin katsayıları olan $(a_0, a_1, \dots)$; Ω'nın ρdA ölçüsüne göre kompleks momentlerini verir. Böylece ters potansiyel problemi;

> "*D, bir disk ve $(a_0, a_1, \dots)$, bir kompleks sayı dizisi olmak üzere her bir a_k'nın bir ρ yoğunluğuna göre k. kompleks momenti olacağı tek türlü belirli bir basit-bağlantılı $\Omega \subset D$ bölgesi var mıdır?*"

olarak yeniden karakterize edebiliriz[[Che]; Problem 2].

$\mathbb{C}$ üzerinde; momentler ile bir bölge her zaman tek türlü olarak belirlenemeyeceği gibi problemi çözen bir Ω bölgesi de her zaman bulunamayabilir[Che]. Hatta, bazı u fonksiyonları için problemin çözümü var olacak şekilde uygun yoğunluk fonksiyonu seçilebilir. Örneğin verilen $u(z) = 1/z + e^{1/z^2}$ fonksiyonu için $\rho \geq$

0.0074 sağlayan tüm sabit ρ yoğunluklu problem için problemin bir çözümü var; $u(z) = 1/z + 1/z^3, \rho > 1874$ ikilisinin ise bir çözümü yoktur[[Che]; Örnek 2.1, 2.3]. Genel olarak, problemin farklı boyutlarda ve farklı çekirdeklerle kurulmuş halleri için [Che] ve [Isa]'ya bakılabilir. Dahası, bazı düzgün $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ bölgeleri için U^{Ω_0} potansiyelinin; öyle bir u_t varyasyonu vardır ki u_t için ters potansiyel problemin Ω_0'a yakın tek türlü belirli bir Ω_t çözümü vardır[NyR18]. Peki, *verilen bir Ω bölgesi için Ω'nın; moment değişimleri t'ye göre korunan ve artan bir düzgün Ω_t varyasyonu var mıdır?*

Teorem 4.0.1. *Ω, düzgün bir Jordan bölgesi ve V; $\partial\Omega$'nın üzerinde düzgün, sıfırlanmayan bir dış normal vektör alanı olarak verilsin. Bir $\varepsilon > 0$ değeri için*

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \partial\Omega_t = V$$

olacak şekilde; moment değişimleri t'ye göre lineer olan bir $\{\Omega_t\}_{t\in[0,\varepsilon)}$ düzgün varyasyonu vardır.

(Teorem 4.0.1'in kanıtı için [NyR14], Bölüm 8'e bakılabilir.) Teorem 2.1.4'ten; Ω_t, bir $1/\rho$-geçirgenlikli Hele-Shaw akışı için bir çözümdür. Böylece bu teoremi boş olmayan başlangıç koşullu Hele-Shaw akışının varlığı olarak görebiliriz: *Bir Ω_0 düzgün Jordan bölgesi ve $\partial\Omega_0$'ın bir komşuluğu üzerinde düzgün, pozitif bir $\kappa = 1/\rho$ fonksiyonu verildiğinde bir süre için κ geçirgenlikli Hele-Shaw akışını çözen düzgün artan bir $\{\Omega_t\}_{t\in[0,\varepsilon)}$ ailesi vardır.* Bu teoremin detayları için [NyR14], Bölüm 7 incelenebilir.

Kaynakça

[Dem] Jean-Pierre Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, 2012

[Lee] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 218, Springer, 2. Edisyon

[Koł91] Sławomir Kołodziej, *The complex Monge-Ampère equation and pluripotential theory*, 1991

[Wel] Raymond O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 65, Springer, 3. Edisyon

[KoN] Shoshichi Kobayashi & Katsumi Nomizu, *Foundations of Differantial Geometry*, volume 2, Interscience Publishers, 1969

[Şah] Bayram Şahin, İnönü Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, 1996

[Mar] Daniel Martin, *Manifold Theory*, Horwood Publishing, 2002

[Ati] Michael Atiyah, *The Non-existent complex 6-sphere*, 2016

[GuZ05] Vincent Guedj ve Ahmed Zeriahi, *Intrinsic Capacities on Compact Kähler Manifolds*, The Journal of Geometric Analysis, Cilt 5, Sayı 4, 2005

[GuZ17] Vincent Guedj ve Ahmed Zeriahi, *Degenerate Complex Monge-Ampere Equations*, European Math. Soc., EMS Tracts in Mathematics 26, 2017

[Gue] Vincent Guedj, Kompakt Kähler Manifoldlar Üzerine Ders Notları, Institut de Mathématiques de Toulouse, 2021

[NyR18] Julius Ross ve David Nyström, *The Dirichlet Problem For The Complex Homogeneous Monge-Ampere Equation*, 2018

[BeT] Eric Bedford ve B. A. Taylor, *A New Capacity For Plurisubharmonic Functions*, Acta Math.149, 1982

[Koł98] Sławomir Kołodziej, *The complex Monge-Ampère equation*, Acta Math., 180, 69-117, 1998

[Don] S. K. Donaldson, *Holomorphic discs and the complex Monge-Ampère equation*, Journal of Symplectic Geometry, Volume 1, Number 2, 171-196, 2002

[NyR14] Julius Ross ve David Nyström, *The Hele-Shaw Flow and Moduli of Holomorphic Discs*, 2014

[GuA] Björn Gustafsson ve Alexander Vasil'ev, *Conformal and Potential Analysis in Hele-Shaw cells*, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, 2004

[How] S. D. Howison, *Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems*, Euro. Jnl of Applied Mathematics, vol. 3, sf. 209-224, 1992

[Kha] Ali Haseeb Khalid, *Free Boundary Problems in a Hele Shaw Cell*, A thesis submitted in conformity with the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, Department of Mathematics Faculty of Mathematical & Physical Sciences University College London, 2015

[Gak] F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems*, Pergamon Press, 1966

[Ste] Elias M. Stein ve Rami Shakarchi, *Complex Analysis 2*, Princeton Lectures in Analysis ,Princeton University Press, 2003

[Sil] Ana Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, 2006

[Vas] Alexander Vasil'ev, *From the Hele-Shaw experiment to integrable systems: A historical overview*, 2009

[Ach] D. J. Acheson, *Elemantary Fluid Dynamics*, Oxford University Press Inc., Oxford Applied Mathematics And Computing Science Series, 1990

[Tho] L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, Macmillan Education Ltd, 5.Edisyon

[Kli] Maciej Klimek, *Pluripotential Theory*, Oxford University Press, New York, 1991

[Ric] Stanley Richardon, *Hele Shaw Flows with a Free Boundary Produced by the Injection of Fluid into a Narrow Channel*, J. Fluid Mech.(1972), vol. 56, part 4, sf. 609-618

[Ran] Thomas Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, London Mathematical Society Student Text 28, 2003

[Gus] Björn Gustafsson, *Applications of variational inequalities to a moning boundary problem for Hele-Shaw Flows*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 16, No. 2, 1985

[Che] V. G. Cherednichenko, *Inverse Logarithmic Potential Problem*, De Gruyter, Inverse and Ill-Posed Problem Series, ISBN 9067642029, 1996

[Isa] Victor Isakov, *Inverse Source Problems*, American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, No. 34, ISBN 0821815326, 1990

[NyR] Julius Ross ve David Nyström, *Harmonic Discs of Solutions to the CH-MAE*, 2014

[NyR15] Julius Ross ve David Nyström, *Application of the Duality Between the CMAE and the Hele-Shaw Flow*, 2015

[HeSh] Håkan Hedenmalm ve Sergei Shimorin, *Hele–Shaw flow on hyperbolic surfaces*, J. Math. Pures Appl. 81 (2002) 187–222

[Mor] Faith A. Morrison, *An Introduction To Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, 2013

[GuTV] Björn Gustafsson, Razvan Teodorescu ve Alexander Vasil'ev, *Classical and Stochastic Laplacian Growth*, Birkhäuser, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, 2014

[Fla] Harley Flanders, *Differentiation Under the Integral Sign*, The American Mathematical Monthly, June-July, 1973, Vol. 80, No. 6, sf. 615-627

[Huy] Daniel Huybrechts, *Complex Geometry*, Springer, 2005